

DISEÑO Y APLICACIÓN DE INSTRUMENTOS PARA EL ESTUDIO DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA INTUITIVA

Zulema Oval Trujillo¹ (alu0101101057@ull.edu.es)

Israel García Alonso¹ (igarcia@ull.edu.es)

¹Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta el diseño de dos instrumentos de análisis enmarcados en una tesis doctoral, centrada en el estudio del concepto de esperanza matemática en el aula de educación secundaria y su potencial para mejorar la comprensión de la incertidumbre y el azar. Estos instrumentos se aplicaron en el aula de 2º de Educación Secundaria (12-13 años). El primero consiste en un juego de azar no equitativo que incorpora apuestas. El segundo instrumento está compuesto por cuatro juegos distintos, algunos equitativos y otros no, donde se reemplaza la apuesta por un sistema de acumulación de puntos. La aplicación de estos instrumentos reveló que los estudiantes, incluso sin instrucción previa en probabilidad, muestran capacidad para tomar decisiones basadas en los elementos propios del concepto de esperanza matemática. No obstante, se identificaron ciertas limitaciones en los instrumentos para discernir el enfoque de probabilidad específico o el razonamiento probabilístico empleado por los estudiantes. Se analizará el alcance y las limitaciones de estos instrumentos en relación con el propósito de la investigación.

Palabras clave: esperanza matemática, educación secundaria, juego equitativo, razonamiento probabilístico

Abstract

The design of two analytical instruments is presented, framed within a doctoral thesis, focused on the study of the concept of expected value in the secondary education classroom and its potential to improve the understanding of uncertainty and chance. These instruments were applied in the second year of secondary education (12-13 years old). The first was an unfair game of chance incorporating bets. The second instrument consisted of four different games, some fair and others not, where betting was replaced by a point accumulation system. The application of these instruments revealed that students, even without prior instruction in probability, demonstrate the ability to make decisions based on the elements inherent to the concept of expected value. However, certain limitations were identified in the instruments for discerning the specific probability approach or probabilistic thinking employed by the students. The scope and limitations of these instruments will be analyzed in relation to the purpose of the research.

Keywords: expected value, secondary education, fair game, probabilistic thinking.

Introducción

La alfabetización estadística y probabilística es una competencia esencial en la sociedad actual en la que diariamente recibimos una gran cantidad de información que de forma continua exige la toma de decisiones informada (Alsina y García-Alonso, 2023). Es más, nuestro entorno está regido por situaciones dadas en entornos de incertidumbre en las que la toma de decisiones necesita del conocimiento probabilístico (Estrella et al., 2023). A pesar de que la mayoría de los currículos incorporan estos conocimientos desde finales del siglo pasado, la probabilidad se aborda con un enfoque dirigido a la cuantificación de la probabilidad sin considerar otras ideas fundamentales que también forman parte de la alfabetización probabilística (García-Alonso et al., 2025).

La probabilidad surge a partir del estudio de los juegos de azar y entre otras razones, su estudio busca profundizar acerca de la equitatividad de los juegos, el tamaño de las apuestas y el reparto de las ganancias entre los jugadores que intervienen (Guerrero et al., 2017). Así el

concepto de juego equitativo, entendido como el equilibrio entre la probabilidad de ganar de cada jugador y su ganancia esperada en el juego (Hernández-Solís et al., 2021), involucra dos elementos: la probabilidad de ganar de cada jugador y los valores de la apuesta o ganancia. Estos elementos determinan el concepto de esperanza matemática, concepto poco explorado y del que existen pocas investigaciones previas.

En este trabajo se presenta el diseño y análisis de dos instrumentos empleados para analizar las intuiciones que presenta el alumnado de secundaria ante la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre determinadas por juegos de azar y el rol de los elementos que intervienen en la noción de esperanza matemática en su elección. Con ello se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué fortalezas y debilidades presenta el instrumento de análisis de las concepciones de esperanza matemática de estudiantes de secundaria basado en una apuesta?
- ¿Qué aspectos debe presentar un instrumento no centrado en la apuesta y que aborde las concepciones de esperanza matemática para estudiantes de secundaria?

Marco conceptual

La alfabetización probabilística se entiende como el conocimiento necesario para “acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real” (Gal, 2012, p. 4). Es por ello necesario construir en los escolares los conocimientos que permitan la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre con argumentos basados en la probabilidad (Batanero, 2005). Una estrategia para ello es el análisis de juegos de azar (dados, monedas, ruletas), que facilita la comprensión del azar (Cañizares et al, 2004), el estudio de su naturaleza impredecible y la necesidad de contar con herramientas probabilísticas que permitan la toma de decisiones (Batanero et al., 2019).

Esta idea justifica el diseño del instrumento *Juego de apuestas*, el cual se trata de un juego de azar que involucra distintas composiciones probabilísticas además de incorporar apuestas entre

jugadores, siendo este un elemento que puede poner en relieve una aversión del riesgo (Borovcnik, 2020) en la toma de decisiones del alumnado.

Estudios como el de Guerrero et al. (2017), con estudiantes de Bachillerato (16 años), muestran que ante una situación no equilibrada sobre la que decidir la opción más favorable, son capaces de llegar a la respuesta mediante el cálculo de la esperanza matemática. Pero, incluso con estudiantes de educación primaria con edades entre 5 y 10 años (Schlottmann y Anderson, 1994), se ha comprobado que son capaces de comprender algunos componentes básicos del concepto de valor esperado, considerando tanto la probabilidad de ganar como el valor del premio para tomar decisiones. O la investigación de Lapidow y Bonawitz (2023), quienes con escolares de edades semejantes comprobaron que muestran comprensión intuitiva del valor esperado cuando se trata de evaluar situaciones de incertidumbre. Además, cuando tomaban decisiones en estos juegos de azar, los escolares eran capaces de considerar otros aspectos y no sólo la probabilidad.

Las investigadoras Lapidow y Bonawitz (2023) utilizaron el juego de azar *What's in the box*, un juego que no involucra apuestas y que se propone a estudiantes de educación primaria (5 – 10 años). En él, los estudiantes deben elegir entre dos conjuntos de cajas: uno con contenido conocido (con 2 canicas en cada una) y otro conjunto con un contenido desconocido. En ambos casos se ganan las canicas que contenga la caja elegida. Con este experimento, se evidenció la hipótesis de que los niños consideraban aspectos que van más allá de la incertidumbre al tomar decisiones de exploración.

De igual forma, la investigación desarrollada por Serradó (2018) propone el juego *Integer Addition Bingo* compuesto por cartas con diez números grabados comprendidos entre el -10 y el 10. Los estudiantes debían tachar el número de la carta cuando lograban alguno de los valores tras la suma de dos números aleatorios que genera una plataforma digital y que estaban comprendidos entre el -5 y el 5.

Las investigaciones anteriores fundamentan el instrumento *Las fichas misteriosas* formado por juegos equitativos o no en los que no contemplan la idea de apuesta, con los que analizar las

ideas intuitivas de los estudiantes sobre la toma de decisiones y su relación con el concepto de esperanza matemática.

Instrumento 1: Juego de apuestas

Diseño del instrumento

El instrumento *Juego de apuestas* consiste un juego de azar que involucra apuestas entre jugadores. Este consta de una urna compuesta por 20 bolas, de las cuales 12 son blancas y las 8 restantes negras. El juego se desarrolla entre dos jugadores de modo que el jugador 1 apuesta una cantidad de 200€ a obtener una bola blanca y el jugador 2 apuesta una cantidad de 100€ a obtener una negra (Figura 1). El juego consiste en extraer una bola de la urna teniendo en cuenta que, si la bola extraída es blanca el jugador 1 recuperará su apuesta y ganará los 100€ que ha apostado el jugador 2, perdiendo este, dicha cantidad, mientras que si la bola extraída es negra entonces el jugador 1 perderá los 200€ que ha apostado siendo en este caso el jugador 2 quien gane dicha cantidad y recupere su apuesta de 100€. Analizando la composición y diseño del juego vemos que se trata de un juego favorable para el jugador 2, con una esperanza matemática de +20€.

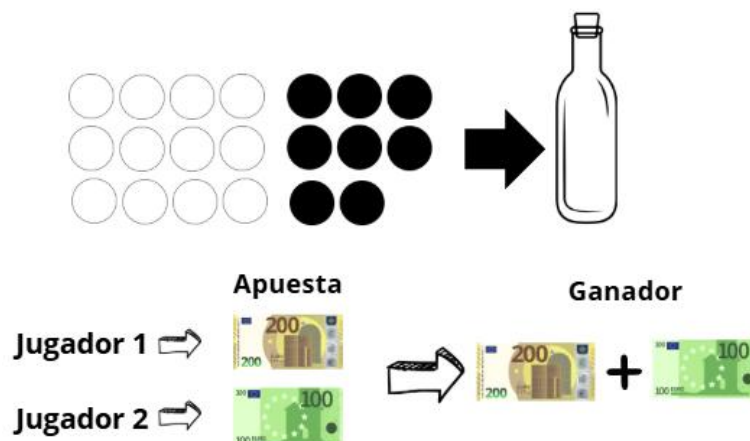


Figura 1. Diseño Juego de apuestas (Elaboración propia).

Una vez introducido el juego, el alumnado tendrá que responder de manera razonada a tres preguntas con las que se va a analizar el razonamiento empleado y el rol de la esperanza matemática en su toma de decisiones. Las preguntas planteadas son: 1) En una sola jugada,

¿qué jugador elegirías?; 2) Si se realizan 5000 jugadas, ¿qué jugador escogerías?; 3) ¿Cómo cambiarías los datos iniciales para que ningún jugador tenga ventaja?

Las dos primeras preguntas se han planteado para analizar los elementos en los que el alumnado centra su razonamiento a la hora de tomar decisiones, es decir, si se centran en la probabilidad, en la ganancia y pérdida o si por el contrario tienen en cuenta ambos elementos. En la segunda pregunta se ha incrementado el número de jugadas realizadas analizando así cómo influye el número de jugadas en su razonamiento. En la última pregunta se busca ver qué estrategias sigue el alumnado para convertir un juego definido como no equitativo en uno que sí lo sea. En esta pregunta se puede manifestar el sesgo de equiprobabilidad en el razonamiento seguido por los estudiantes (Lecoutre, 1992).

Fortalezas y debilidades

El instrumento *Juego de apuestas* es un instrumento de fácil implementación puesto que no requiere de manipulación ni preparación previa, únicamente debemos asegurarnos de que todo el alumnado comprende su funcionamiento una vez introducido en el aula. Por otro lado, el análisis de las respuestas dadas por el alumnado permitirá comprobar si el alumnado es capaz de razonar en un entorno de incertidumbre en el que se debe tomar decisiones según el valor que toman los elementos que intervienen en la noción de esperanza matemática (probabilidad y ganancia o pérdida). Por otro lado, el instrumento diseñado se centra en el concepto de las apuestas entre jugadores, contexto poco apropiado para el aula de secundaria.

Por último, hay que tener en cuenta que la última pregunta planteada pide una única estrategia para convertir un juego no equitativo en uno que sí lo sea, pudiendo el alumnado igualar la probabilidad y ganancia o pérdida de ambos jugadores, lo que limitaría la aparición de diferentes estrategias en el razonamiento seguido por el alumnado. Si esto fuera así, se realizaría una mejora de esta última pregunta pidiendo al alumnado desarrollar dos modificaciones diferentes del juego, obligándoles de este modo a aplicar distintos razonamientos para convertir el juego en equitativo.

Instrumento 2: Las fichas misteriosas

Diseño del instrumento

El instrumento *Las fichas misteriosas* es una modificación del instrumento anterior a partir de los juegos empleados en otras investigaciones como *What's in the box* (Lapidow y Boawitz, 2023) o *Integer Addition Bingo* (Serradó, 2018) y que, entre otras características, no involucra apuestas entre jugadores. Este instrumento está compuesto por cuatro juegos de dos jugadores, en los que cada uno tendrá asignadas cuatro fichas, salvo el Juego IV, en el que un jugador tendrá cuatro y otro jugador ocho fichas. Además, cada una de las fichas tendrá grabado un número comprendido entre el -10 y el 10. Por lo que, se diferencian en la probabilidad y esperanza matemática que presenta cada uno de los jugadores.

En el *Juego I* ambos jugadores presentan las mismas fichas de juego, con esto nos referimos a que ambos jugadores dispondrán de un conjunto de fichas idéntico (Figura 2), por lo que ambos jugadores presentarán la misma esperanza matemática. Con este primer juego se busca que el alumnado se familiarice con la dinámica del juego.

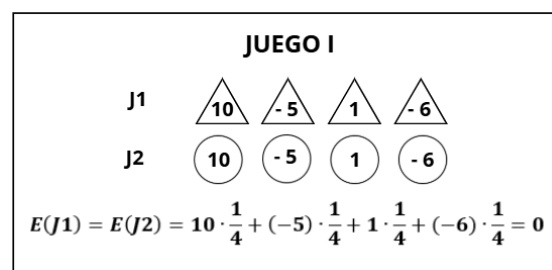


Figura 2. Composición Juego I (Elaboración propia).

En el *Juego II* ambos jugadores dispondrán de la misma cantidad de fichas, sin embargo, el valor de cada una de ellas diferirá, de este modo ambos jugadores presentarán la misma probabilidad, pero distinta esperanza matemática (Figura 3). En su diseño vemos que el jugador 1 contiene una ficha con una ganancia relevante (+9) con respecto al conjunto del jugador 2, quien a su vez contiene la ficha con mayor pérdida (-7). De igual modo, el jugador 1 tiene mayor probabilidad de perder puntos (1/2), mientras que el jugador 2 tiene una probabilidad de 3/4 de no perder puntos. Aún así, la esperanza matemática del jugador 1 es de +1, superior a la del jugador 2, que es igual a +3/4.

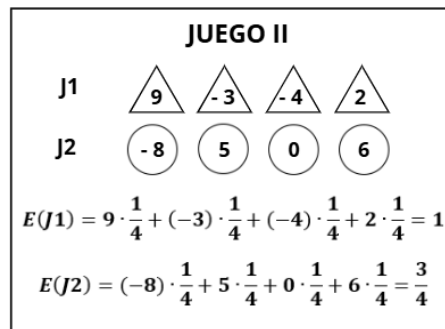


Figura 3. Composición Juego II (Elaboración propia).

La composición del *Juego III* es similar a la del juego descrito anteriormente, sin embargo, muestra algunas diferencias en cuanto a las ganancias y pérdidas que presenta cada uno de los jugadores (Figura 4). En este caso el jugador 2 es quien contiene a su vez en su conjunto la ficha de mayor valor (+10) y la de menor valor (-7), sin embargo, la esperanza matemática del jugador 1 es superior, siendo esta igual a +3. Si nos detenemos a analizar la probabilidad de ganar puntos de cada conjunto vemos que la del jugador 1 es superior (3/4), mientras que la probabilidad de perder puntos es la misma (1/4) en ambos jugadores.

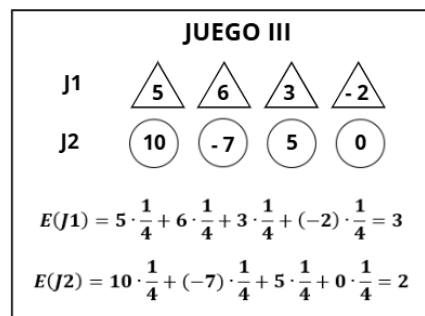


Figura 4. Composición Juego III (Elaboración propia).

El *Juego IV* se ha diseñado de modo que ambos jugadores presenten la misma esperanza matemática, pero diferente probabilidad. En este caso el jugador 1 dispondrá de cuatro fichas de juego, la mitad de las que dispondrá el jugador 2 quien en su caso dispondrá de un total de ocho fichas de juegos (Figura 5). Analizando individualmente la construcción del juego vemos que el jugador 1 contiene la ficha con la mayor ganancia de puntos (+10), mientras que el jugador 2 contiene la ficha con mayor pérdida de puntos (-6). Así mismo, la probabilidad de ganar puntos del jugador 1 es igual a 1/2 siendo menor que la del jugador 2 (5/8).

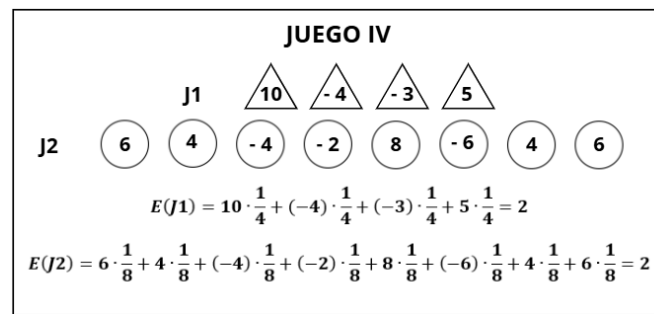


Figura 5. Composición Juego IV (Elaboración propia).

La dinámica de juego será la misma en cada uno de los juegos que componen el instrumento. Cada jugador situará sus fichas de juego boca abajo en su mesa. A continuación, seleccionará de manera aleatoria una de ellas, le dará la vuelta y apuntará el valor que tiene inscrito en la hoja de recogida de datos (Figura 6). Seguidamente situará la ficha boca abajo junto al resto de fichas de juego y las mezclará. Este proceso lo repetirá cada jugador de manera alterna hasta completar un total de diez rondas. Una vez finalizadas, ganará el jugador que mayor acumulación de puntos haya obtenido.

RECOGIDA DE DATOS

JUEGO 1

Identificación:

Partida	Puntos obtenidos		Puntos acumulados	
	Triángulo	Círculo	Triángulo	Círculo
1				
2				
3				

Figura 6. Ficha de recogida de datos (Elaboración propia).

Dinámica de aula

Para introducir el instrumento *Las fichas misteriosas* en el aula, inicialmente se dividirá al alumnado en parejas. A continuación, se les pedirá que elijan un jugador (triángulos o círculos) y se les entregará las fichas que componen el instrumento correspondiente al jugador seleccionado. Una vez repartidas las fichas se procederá a explicar en qué consiste el juego, asegurándonos de que se ha comprendido. A continuación, se les entregará una hoja que contiene la composición del Juego I, de modo que cada estudiante tendrá que coger únicamente

las fichas que se indican y posicionarlas frente suya bocabajo. Seguidamente comenzará a jugar anotando los resultados obtenidos en la ficha de recogida de datos correspondiente.

Una vez manipulado este primer juego se pasará a la entrega de la hoja de composición de los Juegos II y III. Estos se repartirán de manera alterna a cada una de las parejas, de modo que la mitad de las parejas jugará al Juego II y la otra mitad al Juego III. Una vez finalizada su manipulación se repetirá la dinámica con el Juego IV. En todos y cada uno de los juegos en los que ha participado el alumnado se rellenará la ficha de recogida de datos mencionada anteriormente.

Al finalizar la manipulación de los distintos juegos, se realizará una reflexión final. Para ello se le entregará al alumnado una ficha compuesta por cuatro preguntas, las cuales tendrán que contestar de manera individual y con las que se busca analizar el razonamiento empleado identificando los elementos en los que se centran en su toma de decisiones, es decir, si se centran en la experiencia dada por la manipulación del juego o si van más allá incorporando alguno de los elementos que intervienen en el concepto de esperanza matemática. Las preguntas planteadas son: 1) Si tuvieras que elegir un juego, ¿qué juego elegirías? ¿Qué jugador preferirías ser? ¿Por qué?; 2) Si se realizaran 5000 partidas, ¿qué juego preferirías? ¿Qué jugador preferirías ser? ¿Por qué?; 3) Sabiendo que un juego es equitativo cuando ningún jugador tiene ventaja frente al otro, ¿consideras que todos los juegos son equitativos? Indica cuáles sí y cuáles no.; 4) Elige un juego no equitativo e indica qué cambios harías para que ahora los dos jugadores tengan las mismas oportunidades de ganar.

En la primera pregunta, el alumnado tendrá que decidir y justificar cuál es el juego más favorable. Se pretende conocer si su justificación se basa en el valor de la probabilidad, en los valores de las fichas o en otra razón, como puede ser el valor de los resultados de la partida (experiencia). La segunda pregunta pretende indagar cómo influye en la decisión del alumnado el número de partidas realizadas. La tercera pregunta indaga sobre qué considera el alumnado que es un juego justo y cómo lo justifica. Y la última pregunta pretende conocer las estrategias seguidas por el alumnado para equilibrar un juego que, a priori, es considerado no justo. En las

preguntas tres y cuatro se tendrá presente la posibilidad de darse el sesgo de equiprobabilidad en la respuesta de los estudiantes (Lecoutre, 1992).

Fortalezas y debilidades

Al igual que primer instrumento, con el instrumento *Las fichas misteriosas* buscamos distinguir los elementos involucrados en el concepto de esperanza matemática (probabilidad y ganancia o pérdida) en el razonamiento seguido por el alumnado, pero en este caso sin incorporar la apuesta entre jugadores. Este instrumento se ha diseñado de manera que el alumnado pueda manipular el juego físicamente, lo que puede generar la aparición de una nueva variable de análisis, *la experiencia*, en la que se incorporan razonamientos tales como el resultado de la partida o la alusión a la diversión. No obstante, pese a que la manipulación del juego enriquece la dinámica de aula y la comprensión del juego, requiere un mayor tiempo en su implementación, factor a tener en cuenta a la hora de llevarlo al aula, puesto que puede generar una falta de tiempo en la reflexión final del alumnado.

Conclusiones

A lo largo de este estudio se ha analizado un instrumento utilizado para observar los aspectos relacionados con la esperanza matemática en estudiantes de secundaria que se basa en una apuesta. El estudio de las fortalezas y debilidades de este instrumento nos ha permitido desarrollar un nuevo juego que, sin incorporar la apuesta, permite el análisis de distintas situaciones equilibradas y no equilibradas, con las que abordar las ideas intuitivas acerca de la esperanza matemática.

Por otro lado, como posible limitación, encontramos que es un instrumento que requiere de un mayor tiempo en su implementación en el aula, pero se considera que la variedad de juegos que ofrece permitirá observar una mayor riqueza en las respuestas del alumnado.

La esperanza matemática es un concepto que implica, no sólo el conocimiento de una herramienta de cálculo de riesgo, sino que ofrece la posibilidad de introducir situaciones de incertidumbre que potencie en el alumnado el razonamiento probabilístico, que en esencia es muy diferente a otro tipo de razonamiento matemático.

Referencias bibliográficas

- Alsina, A., y García-Alonso, I. (2023). La estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros en España. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 6 (2), 11–27.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3):247-264.
- Batanero, C., Ortiz, J., Gómez, E. y Gea, M. M. (2019). Les jeux équitables comme contexte pour l'enseignement des probabilités et la formation des enseignants. En V. Martin, M. Thibault y L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités*. (pp. 219-244). Presses de l'Université de Québec.
- Borovcnik, M. (2020). Risk and Decision Making – Psychological and Educational Aspects. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 740-754). Cham: Springer International Publishing.
- Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., y Ortiz, J. J. (2004). Children's understanding off air games. In M. A. Mariotto (ed.). *European research in mathematics III: Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. CERME.
- Estrella, S., Méndez, M., Olfos, R. y Aguilera, J (2022). Early statistics in kindergarten: analysis of an educator's pedagogical content knowledge in lessons promoting informal inferential reasoning. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 11(1), 1–13.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43–71). Kluwer Academic Publishers.
- García-Alonso, I., Vásquez, C. y Alsina, Á. (2025). Panorama curricular de la alfabetización temprana en Estadística y Probabilidad. Profesorado. *Revista de currículum y formación de profesorado*, 29(1), 265-294. DOI: <https://doi.org/10.30827/profesorado.v29i1.30849>
- Guerrero Treviño, H., Ortiz de Haro J. J., y Contreras, J. M. (2017) Evaluación del conocimiento sobre la esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 107–125.
- Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., y Gea, M. (2021). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innovaciones Educativas*, 23(34), 228–243.
- Lecoutre, M.P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557–568. <https://doi.org/10.1007/BF00540060>
- Lapidow, E., y Bonawitz, E. (2023). What's in the Box? Preschoolers Consider Ambiguity, Expected Value, and Information for Future Decisions in Explore-Exploit Tasks. *Open Mind: Discoveries in Cognitive Science*, 7, 855–878. https://doi.org/10.1162/opmi_a_00110

Schlottmann, A., y Anderson, N. H. (1994). Children's judgements of expected value. *Developmental Psychology*, 30(1), 56–66. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.30.1.56>

Serradó, A. (2018). Reasoning in Decision Making Under Uncertainty and Decisions of Risk in a Game of Chance. *Teaching and Learning Stochastics*. Springer International Publishing AG, 201–221.