FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Vol. XVI ◆ http://wp.ull.es/fpiem ◆ ISSN: 1695-6613 (p) y 1885-2912 (d)

EL ROL DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS EN UNA PERSPECTIVA DE INTEGRACIÓN STEM EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matías Camacho-Machín[1] (mcamacho@ull.edu.es)

Fernando Hitt[2] (hitt.fernando@uqam.ca)

Alexander Hernández Hernández[1] (shernanh@ull.edu.es)

[1]Universidad de La Laguna (ULL)

[2]Université du Québec à Montréal (UQAM)

Resumen

Se presenta una investigación sobre la formación de profesores que aborda conceptos de cinemática y matemáticas en un entorno tecnológico, bajo un enfoque STEAM integrado. La propuesta incluye una integración gradual de disciplinas científicas, promoviendo un aprendizaje significativo (Chalmers et al., 2017; Hitt et al., 2022). La formación se desarrolla en varias etapas, promoviendo en paralelo tareas de formulación de problemas (problem posing) según Baumans & Rott (2022). El uso del software GeoGebra fue clave en las primeras etapas de la investigación, facilitando la resolución de problemas en contextos reales mediante la construcción de curvas de regresión que ajustan los datos y simplifican su análisis. En una etapa posterior, se propone integrar la cinemática filmando fenómenos reales, cuyos datos se obtienen a través de un análisis preliminar con Tracker, una aplicación de uso libre. Finalmente, se tratan los datos y se

Camacho-Machín, M.; Hitt, F. y Hernández, A. (2024). El rol de la modelización matemática y el uso de la tecnología en la formulación de problemas en una perspectiva de integración STEM en la formación de profesores de Educación Secundaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,* Vol. XVI, pp. 11-40.

buscan funciones que modelicen el fenómeno, usando preferentemente GeoGebra para proponer un modelo matemático.

Palabras clave: Uso de recursos digitales, Formulación de problemas matemáticos, Enfoque STEAM, Formación de profesorado de matemáticas

Abstract

This paper presents research on teacher training that addresses concepts of kinematics and mathematics in a technological environment, following an integrated STEAM approach. The proposal includes a gradual integration of scientific disciplines, promoting meaningful learning (Chalmers et al., 2017; Hitt et al., 2022). The training is carried out in several stages, while also promoting problem-posing tasks (Baumanns & Rott, 2022). The use of GeoGebra software was essential in the early stages of the research, enabling the resolution of real-world problems by constructing regression curves that fit the data and simplify analysis. In a later stage, kinematics is integrated by filming real-life phenomena, with data obtained through a preliminary analysis using the open-source application Tracker. Finally, the data is processed, and functions are sought to model the phenomenon, preferably using GeoGebra, to propose a mathematical model for solving the task.

Keywords: Use of digital resources, Mathematical problem posing, STEAM, Prospective mathematics teachers

Introducción

A finales del siglo pasado y principios del presente, nacieron dos proyectos importantes en la comunidad científica. Ambos proyectos eran y siguen siendo muy ambiciosos y su impacto no ha sido tan importante como se esperaba. Específicamente, en la década de los 90 del pasado siglo, científicos preocupados por la poca comunicación entre los miembros de diferentes ramas de la ciencia, pusieron en evidencia la importancia de contar con nuevos científicos, ingenieros, tecnólogos que tuvieran una formación y visión más amplia sobre las ciencias. Es así como, en los Estados Unidos, se propone un programa centrado en el aprendizaje de conceptos de diferentes ramas científicas denominado STEM por sus siglas en inglés (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*). Poco después, a principios de este siglo, la comunidad europea propone un proyecto con objetivos similares, denominado PRIMAS acrónimo de *Promoting IBL –Inquiry based learning– In Mathematics and Science* (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013). Los problemas sobre el aprendizaje de las ciencias no se hicieron esperar y poco a poco el programa STEM cobró más fuerza y, al mismo tiempo, se empezó a hablar del STEM integrado, el cual tiene que ver con la incorporación paulatina de diferentes ramas científicas (Chalmers et al., 2017; Kelley & Knowles, 2017).

En este proceso de STEM integrado, diferentes países propusieron planes de estudio en los cuales las competencias STEM hicieron su aparición. Este es el caso de España en donde el currículo de la Educación Secundaria, y Primaria, la competencia STEM es una de las ocho competencias clave. En la LOMLOE (2020) se establecen cinco descriptores operativos[1] para la Educación Secundaria, denominados STEM1, STEM2…, STEM5. A manera de ejemplo, enunciamos dos de los de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO):

> *STEM1. Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y seleccionas y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando si fuera necesario.*
>
> *STEM5. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.*

La manera de operar en la mayoría de los sistemas educativos de cualquier país es mediante lo que se denomina desarrollo curricular "Top-Down". En este caso, dado que el proyecto era tan ambicioso, los problemas fueron más grandes que en otros proyectos de desarrollo curricular. Así, autores como Furner & Kumar (2007) afirman que la falta de recursos de

---

[1] Véase el Real Decreto de 16 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Canarias, p. 15379-15380. https://www.gobiernodecanarias.org/boc/2023/058/001.html

instrucción, materiales de apoyo y orientación pedagógica para la indagación, obstaculiza a los docentes para vincular e integrar las ciencias y las matemáticas en el aula. De manera más concreta, Chalmers, et al., (2017), haciendo referencia a Cooper (2014) y English (2016), puntualizan que:

> *En muchos planes de estudio de integración STEM, los estudiantes no participan profundamente en la construcción de conceptos matemáticos, de ingeniería y de ciencias. Existe el problema de que los componentes individuales de STEM, en particular las matemáticas y la ingeniería, se "atenúan" a medida que el enfoque de la enseñanza pasa de la construcción del conocimiento a la aplicación. (pág. 3)*

Planteamiento del problema de investigación

Como se ha señalado en la introducción, consolidar un desarrollo curricular centrado en lo que se ha llamado actualmente STEM integrado, es un proyecto de larga duración. El análisis de la literatura relacionada con los problemas de aprendizaje de los alumnos, vistos desde la perspectiva de STEM integrado, nos ha llevado destacar dos aspectos claves del proceso curricular:

1. La poca variedad de tareas para el aula que impliquen procesos cognitivos significativos en el aprendizaje en los estudiantes.
2. La responsabilidad de generar estos procesos de integración en el aula recae principalmente en los profesores.

Atacar estos dos problemas bajo el ángulo de la Didáctica de la Matemática implica tomar una posición con respecto a la elaboración de tareas. Blum y Niss (1991), junto con English (2015, 2016), argumentan en sus trabajos que la modelización matemática es un medio eficaz para que los profesores involucren a sus estudiantes en la exploración de problemas “auténticos”, los cuales incluyen sistemas complejos dentro de un contexto interdisciplinar.

Los argumentos de estos autores nos han sugerido que se debe considerar la gran importancia que tienen los procesos de modelización matemática como núcleo central para una perspectiva de la enseñanza guiada por las ideas del modelo STEM integrado (Figura 1). Además, de

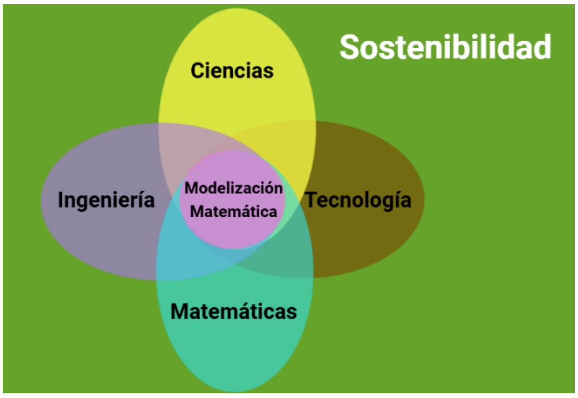


Figura 1. La modelización matemática como núcleo en el acercamiento de STEM integrado

acuerdo con el descriptor STEM5 arriba enunciado, el modelo debe estar totalmente ligado al fenómeno en estudio.

La propuesta de tomar la modelización matemática como este núcleo constituido por STEM, no es nueva. De hecho, desde los inicios del proyecto PRIMAS, existía la idea de considerar la modelización matemática para la integración de las diferentes ramas de la didáctica (de la biología, de la química, de la física, de las matemáticas).

Considerando que la modelización matemática sería el elemento central de nuestra propuesta de investigación, los autores analizaron cuál sería el papel de la tecnología en estos procesos. Como se ha señalado, nuestra investigación, enmarcada en una perspectiva de la didáctica de las matemáticas, opta por utilizar herramientas tecnológicas de uso libre como GeoGebra y Tracker. Esto no implica que el uso del papel y lápiz haya sido descartado, por el contrario, estos recursos fueron fundamentales en los procesos de modelización matemática, contribuyendo a la producción de representaciones espontáneas que se pueden asociar con la creatividad. No olvidemos que esta componente es de suma importancia en la competencia STEM y señalada de manera especial en los descriptores operativos STEM1 a STEM5 de la LOMLOE. Además, asociada a la creatividad está el planteamiento de problemas, componente considerada en la elaboración de las actividades experimentadas.

Los argumentos expresados en los párrafos anteriores permitieron la elaboración de tareas significativas, las cuales siguen un proceso de descubrimiento guiado (Freudenthal, 1991) y preguntas encadenadas con el objetivo de promover un aprendizaje en espiral a la manera propuesta por Mason (1996).

El segundo aspecto clave al que nos referimos anteriormente es el del profesorado como elemento en el que recae la responsabilidad. Teniendo en cuenta, que la formación del profesorado de matemáticas de educación secundaria es esencial, es por lo que optamos por realizar una experimentación con los estudiantes del Máster, bajo una perspectiva de STEM integrado.

Para la experimentación, se decidió diseñar tareas de formación que promuevan el aprendizaje de conceptos de diferentes ramas científicas. En la siguiente sección se detallarán los aspectos elegidos.

Metodología de investigación

Participantes

El grupo de estudiantes de posgrado que participó en esta investigación cursaba un Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. La población estaba compuesta por 19 graduados en matemáticas que seguían dicho programa. Para el desarrollo de la experimentación, se formaron 5 equipos de trabajo: uno de tres miembros y los otros cuatro, organizados por los propios estudiantes.

El estudiantado participante, en sus estudios previos al Máster cursaron, además de las materias habituales del Grado en Matemáticas, una asignatura optativa relacionada con la Educación Matemática, en la cual habían tenido un primer contacto con el Sistema de Geometría Dinámica (SGD) GeoGebra. El curso impartido, constaba de 28 horas presenciales (24 horas para la experimentación y 4 horas de exposiciones de Tareas).

Método de enseñanza en la experimentación

Se decidió utilizar el método de enseñanza ACODESA (Apprentissage en Collaboration, Débat Scientifique et Autoréflexion, en sus siglas en francés), que divide el proceso de enseñanza en cinco etapas: 1ª. Trabajo individual; 2ª. Trabajo en equipo; 3ª. Debate en gran grupo; 4ª. Autorreflexión (retorno al trabajo individual, proceso de reconstrucción de lo realizado en clase); 5ª. Proceso de institucionalización (el profesor resume las ideas que emergieron en clase y propone las soluciones institucionales), ver Figura 2.

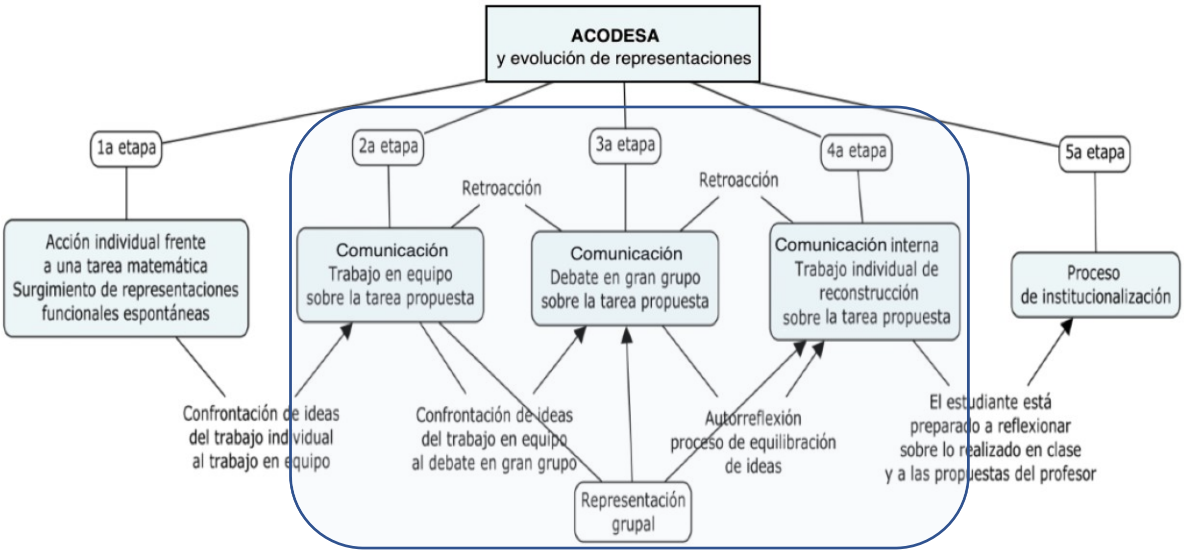


Figura 2. Cinco etapas del método de enseñanza ACODESA. Énfasis de las tres etapas intermedias (Hitt, 2007; Hitt & Quiroz, 2019)

Para el método de enseñanza ACODESA el trabajo individual, que es la primera etapa, es fundamental y se concibe con la intención de que el estudiante llegue con ideas propias a la discusión posterior con sus compañeros permitiendo con ello estar en mejor posición para el debate en grupo. En todo el proceso de resolución de las otras tres fases, los investigadores jugaron el papel de guías. No se proporcionaban respuestas a las demandas de los estudiantes, sino que se promovía la reflexión y consolidación de ideas. Es en la fase de institucionalización (la quinta y última) en la que el profesor-investigador analiza las diferentes producciones de los alumnos, sus representaciones espontáneas y discute su pertinencia o no de las mismas, para introducir posteriormente las representaciones institucionales y la resolución de la tarea.

Características de las tareas

Considerando la perspectiva de STEM integrado, los investigadores decidieron que los contenidos a tratar, para la población descrita con anterioridad, serían de Matemáticas, Física y uso de Tecnología. De manera más precisa, la intención fue la de incidir en los procesos de modelización matemática relativos a conceptos de cinemática, uso de GeoGebra y Tracker. De hecho, se incluyó también un acercamiento a las artes desde la perspectiva de la matemática, relacionada con el número de oro y la espiral áurea y los procesos homotéticos ligados a cuadros y pinturas en el arte. Esto último nos permite aproximar la experimentación a una perspectiva próxima STEAM integrado (incluyendo las artes).

El diseño de las tareas, como se mencionó anteriormente, requirió un proceso de organización que incluyera preguntas encadenadas a lo largo de su desarrollo. El objetivo era promover la creatividad de los participantes en un marco de descubrimiento guiado, como señala Freudenthal (1991) en su fenomenología didáctica. Bajo estas características, cada tarea contiene preguntas que fomentan tanto el desarrollo de una matemática horizontal como el planteamiento de una matemática vertical. Al proponer preguntas encadenadas, también se promueve el aprendizaje en espiral, en línea con la propuesta de Mason (1996), como se indicó previamente. Además, se buscó establecer discusiones sobre el rol de la tecnología en la resolución de las tareas. La elaboración de estas tareas incluye una perspectiva de formulación de problemas, donde se invita a los participantes a plantear preguntas más complejas y a proporcionar respuestas que los lleven más lejos en su investigación.

Durante el curso, se introdujeron una serie de actividades previas en las que uno de los profesores-investigadores proponía su resolución al gran grupo, para luego proporcionar la tarea diseñada que debía resolverse siguiendo el método ACODESA. A continuación, se presenta un análisis previo de las tareas utilizadas en la investigación.

Análisis a priori de las tareas

Los estudiantes realizaron cinco tareas o actividades. Las dos primeras actividades, con una estructura similar, presentan problemas contextualizados (en el entorno del estudiante o en la propia matemática) y se pide a los estudiantes que las resuelvan, primero con lápiz y papel y posteriormente haciendo uso de GeoGebra (Fase 1). En la segunda fase (Fase 2) se pide que formulen problemas sugeridos por la resolución del problema que se plantea (Véase el Anexo 1). Las actividades 3 y 4 son esencialmente diferentes. La actividad 3 (oro azul) está directamente relacionado con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS y se corresponde con una actividad STEM y directamente al descriptor STEM5. Se estructura en tres fases, en la primera fase se hace una presentación de la situación a analizar, en la segunda, se proponen una serie de actividades individuales, y finalmente se trata de discutir en grupo e institucionalizar los resultados obtenidos. La actividad 4, se puede considerar una actividad STEAM, puesto que se contextualiza en el arte. También aparece organizada en las mismas tres fases que la actividad 3 (véase el Anexo 2). Finalmente, la quinta y última actividad (Actividad 5), solicitaba la elaboración de un modelo matemático para interpretar una actividad de cinemática analizada con el software libre Tracker. Su estructura es diferente a las otras cuatro actividades (véase el anexo 3). En la última fase de la actividad 5 se pide a los estudiantes que formulen una actividad de modelización con Tracker, en términos similares a la que han resuelto para aprender a utilizar el software y combinarlo con GeoGebra (Fases anteriores).

Actividad 1

Se pide resolver un problema mediante un proceso de modelización matemática utilizando tecnología (GeoGebra) sobre “tres monedas tangentes”, pidiendo el cálculo del área de la región que queda entre las tres monedas. Al final se requiere al estudiante que proponga y resuelva un problema más complejo relacionado con el resuelto.

Una vez resuelta la tarea de encontrar el área pedida, se esperaba que en la fase 2, el estudiante formulase una tarea más compleja, que se asemejase a lo siguiente: Fijar el área que queda encerrada (por ejemplo, 1 cm^2) y proponer una posición que podrían tener, por

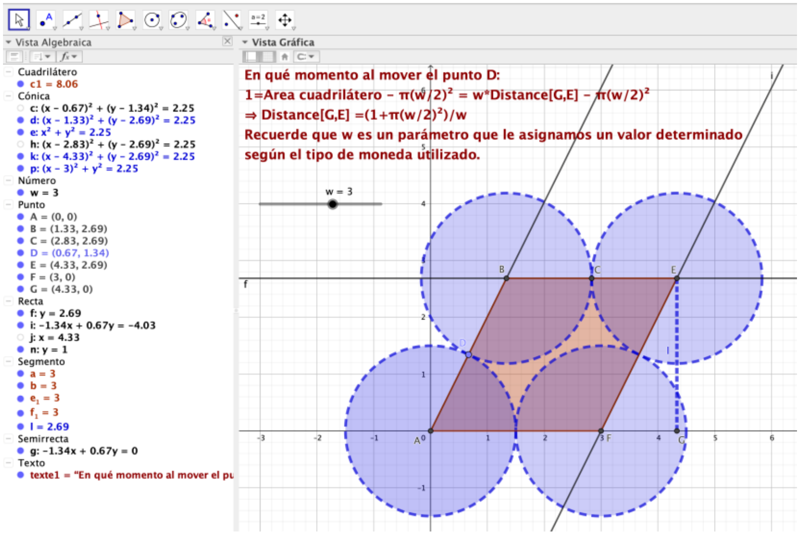


Figura 3. Propuesta dinámica pensada por los investigadores para el caso de 4 monedas

ejemplo 4 monedas. Con la ayuda de la tecnología se podría proponer la exploración de una construcción dinámica (ver Figura 3).

Actividad 2

Se trata de resolver una ecuación algebraica compleja (tomada del National Council of Teachers of Mathematics [NCTM],1988) relativa a ideas simples de resolución de ecuaciones de 2º grado, que promueven una matemática horizontal, y la complejidad de la ecuación necesita un proceso de descubrimiento dirigido hacia una matemática vertical. En este caso, es importante señalar que las limitaciones de la tecnología (en nuestro caso GeoGebra) no permite encontrar todas las soluciones directamente, ya sea en forma algebraica o gráfica. La tecnología que podría jugar un papel de apoyo, en este caso concreto, podría ser un obstáculo.

Los investigadores supusieron que los estudiantes analizarían por separado cada polinomio y en la pregunta sobre una proposición más compleja, llegarían a obtener un método basado en un proceso de visualización de polinomios de 2º grado tal y como se muestra en la Figura 4.

Actividad 3

Consiste en la presentación de problemas con el objetivo de crear nubes de puntos y utilizar herramientas de GeoGebra para encontrar curvas que se ajusten a los puntos. Posteriormente se presentó la tarea denominada "el oro azul" (Boucher et al., 2007, p. 77). Esta tarea intenta

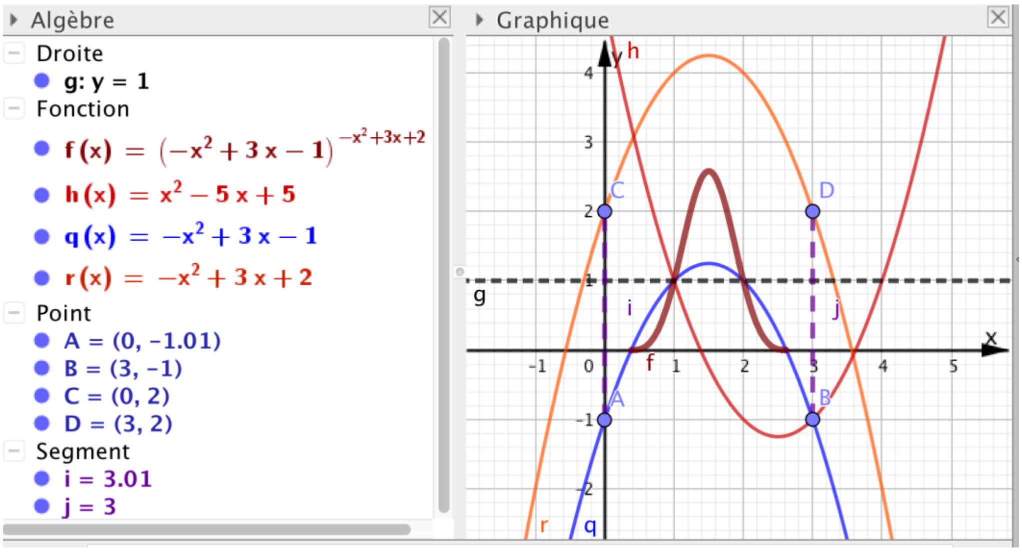


Figura 4. Propuesta pensada por los investigadores basada en la visualización matemática

promover la competencia STEM5 del currículo de Educación Secundaria, que está ligada a los problemas de la humanidad y sostenibilidad. En su primera parte, se trata de que los estudiantes determinen para qué población mundial la comunidad tendrá problemas de agua potable. Una vez calculada la población mundial, se espera que los estudiantes busquen en Internet los datos del crecimiento y evolución de la poblacional mundial para que, con la función logística, hagan predicciones de una fecha crítica (aproximada) de cuándo faltará agua potable en el planeta.

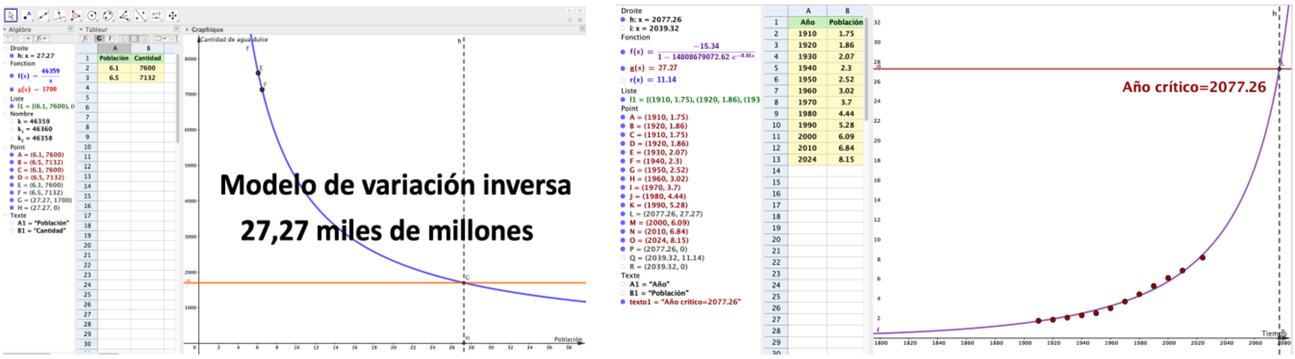


Figura 5. Modelo de variación inversa para determinar la población crítica (27.27 miles de millones de personas) y ajuste con la función logística y los datos de la población mundial (año crítico 2077)

Actividad 4

Se realiza previamente una presentación sobre monumentos construidos por la civilización griega, así como de pinturas de Botticelli y su relación con el número y la espiral áureos (ver Figura 6). A continuación, se entrega a los estudiantes una obra de Theo van Doesburg y se les solicita que la analicen desde una perspectiva matemática, específicamente utilizando el concepto de homotecia.

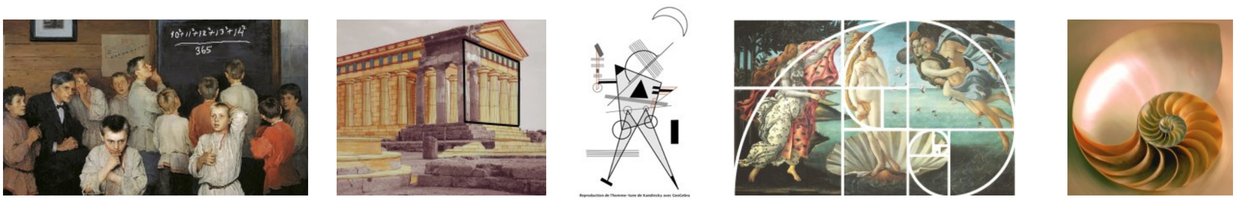
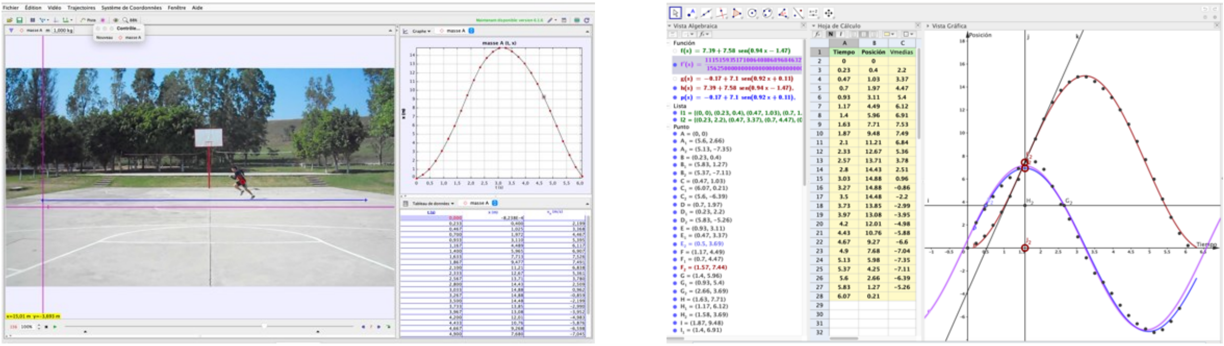


Figura 6. Cálculo mental (pintura de Bogdanov-Bielsky), restos griegos en Sicilia, Kandinsky y GeoGebra, Boticelli y la espiral áurea y foto de un caracol

Actividad 5

Se introduce inicialmente el software Tracker, analizando el video de una persona cruzando de ida y vuelta una cancha de baloncesto (la Figura 7 muestra un fotograma). La actividad consistió en que los estudiantes, organizados en equipos, tomaran datos con Tracker de un video que representara un fenómeno de la vida real, seleccionado por ellos mismos, con el objetivo de responder a preguntas que ellos formularan. Además, se les solicitó que el procesamiento de los datos se realizara utilizando GeoGebra.



Figuras 7.1 y 7.2, Presentación de Tracker con una persona que atraviesa (ida y vuelta) una cancha de baloncesto (izquierda). Análisis de datos con Tracker y GeoGebra (derecha).

Análisis de resultados

Análisis de la Actividad 1

En la tarea de las tres monedas se espera que los estudiantes muestren elementos de control sobre la matemática que realizan. Solamente uno de los equipos puso las 3 monedas sobre la mesa para medir visualmente el área solicitada. Obviamente, si se cubriera la superficie libre con un dedo, se podrían dar cuenta que el área es menor a un centímetro cuadrado.

Este problema ha sido propuesto a estudiantes de Grado que se inician en el manejo de GeoGebra en otros cursos, y suele presentar muchas dificultades para el alumnado, principalmente debido a los cálculos de áreas de sectores circulares y a la confusión entre las unidades de medida de grados y radianes. Sin embargo, en la experimentación actual con estudiantes de Máster, todos los equipos lograron encontrar el área solicitada sin mayor dificultad (ver Figura 8).

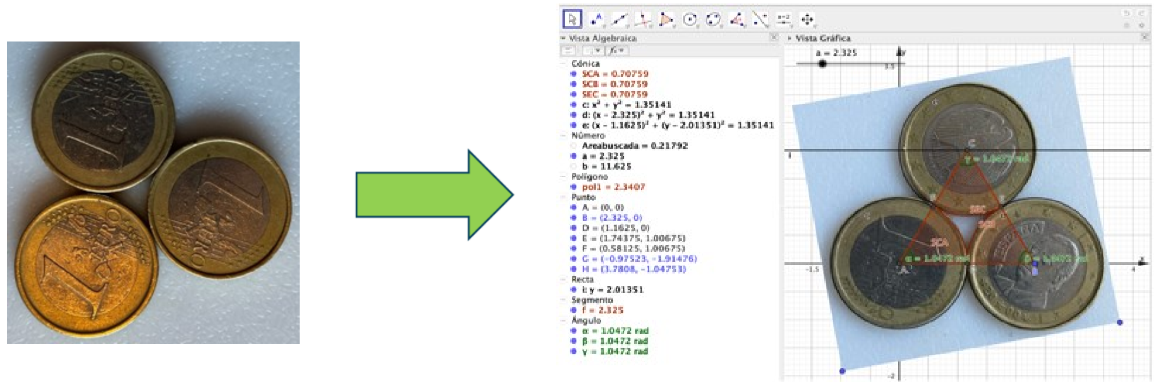


Figura 8. Actividad con tres monedas que se tocan dos a dos

Aparecieron algunas características interesantes que surgieron de las preguntas que se propusieron al final de cada tarea, ligadas a la formulación de problemas (*problem posing*), que consistían en generalizar el problema y/o proponer un problema más complejo, para luego resolverlo. En el caso de las monedas, en la Figura 9 se observan las propuestas de los diferentes equipos.

Podemos conjeturar de inmediato y se puede verificar, que el problema que se supondría "más complejo" propuesto por los equipos 1 y 2, no tiene complejidad alguna. Resulta ser un ejercicio, que es incluso más sencillo de resolver que el inicial de las 3 monedas, ya que, si se forma el cuadrado con los centros de los círculos, el problema equivale a calcular el área de ese cuadrado y restarle el área de un círculo. En principio, no habría necesidad de utilizar GeoGebra sino que sería un simple ejercicio de papel y lápiz.

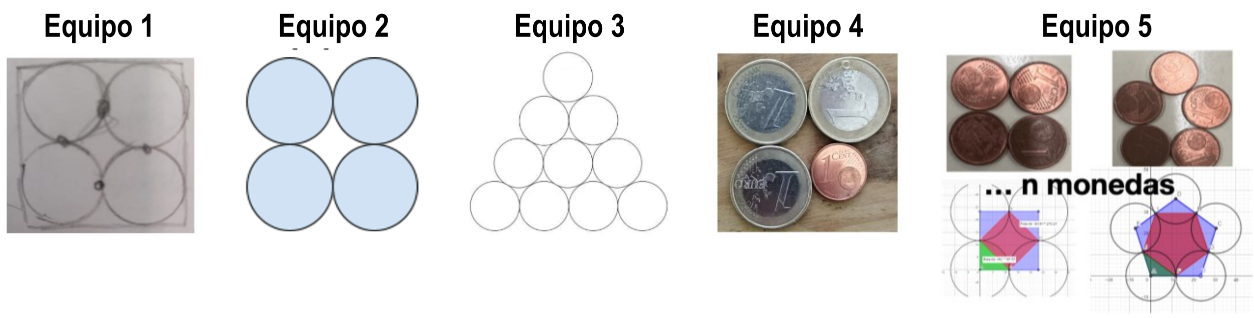


Figura 9. Proposición de problema más complejo (problem posing) referente a la Actividad 1

Con respecto al equipo 3, su propuesta de generalización es la de calcular el volumen que se encuentra entre cada tres monedas. También en este caso, sería una tarea de papel y lápiz más o menos sencilla. El único elemento que puede ofrecer dificultad es el de visualizar el volumen entre dos planos, para cada tres monedas.

El equipo 4 añade una problemática más interesante. No hay solución única, depende de la posición de la moneda más pequeña.

El equipo 5 realiza una generalización considerando un mismo tipo de moneda, formando un polígono regular de n-lados. El equipo solamente enunció el problema sin resolverlo.

Análisis de la Actividad 2

La 2ª tarea trata sobre un problema propuesto en el libro del NCTM de 1988. Al final de cada capítulo se pregunta: ¿Pueden sus estudiantes resolver este problema? Nosotros escogimos el problema de la página 19:

Encontrar los valores de x *tal que* $(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1$

La mayoría de los estudiantes empezó utilizando logaritmos, sin darse cuenta de que ello restringe el dominio a los números positivos, lo que deja de lado posibles soluciones con números negativos, que ese es un aspecto fundamental para la resolución de esta tarea. De hecho, el problema se podría resolver realizando un estudio de casos:

A. Resolver la ecuación $x^2-9x+20=0$, y verificar que las soluciones al sustituirlas en la ecuación de la base no se obtiene una indeterminación.
B. Resolver la ecuación $x^2-5x+5=1$, y verificar que las soluciones al sustituirlas en la ecuación de la potencia no se obtiene una indeterminación.
C. Resolver la ecuación $x^2-5x+5=-1$, y verificar que al substituir las soluciones en la ecuación potencia, se obtiene un número par.

En otros cursos mencionados anteriormente, el alumnado es capaz de proponer la resolución de A y B, pero no la proposición C. Por otra parte, si se introduce la expresión en GeoGebra, se observa que este SGD no determina todas las soluciones, ya sea gráfica o algebraicamente (uso de Cálculo formal de GeoGebra). La resolución de esta actividad no muestra debilidades de GeoGebra, sino más bien, muestra la importancia del trabajo de papel y lápiz, así como la posibilidad de utilizar GeoGebra para reflexionar sobre la visualización matemática en la resolución de problemas.

Los equipos 1, 2 y 4 encontraron solamente como soluciones $x=1,4$ y 5. El equipo 3, sorprendentemente propuso como solución $x=4,\ 4{,}5$ y 5. Analizando lo realizado por los estudiantes, se encontró el por qué: buscaron intersecciones a partir de la gráfica y cometieron un error visual con el valor de $x = 4{,}5$ (ver Figura 10).

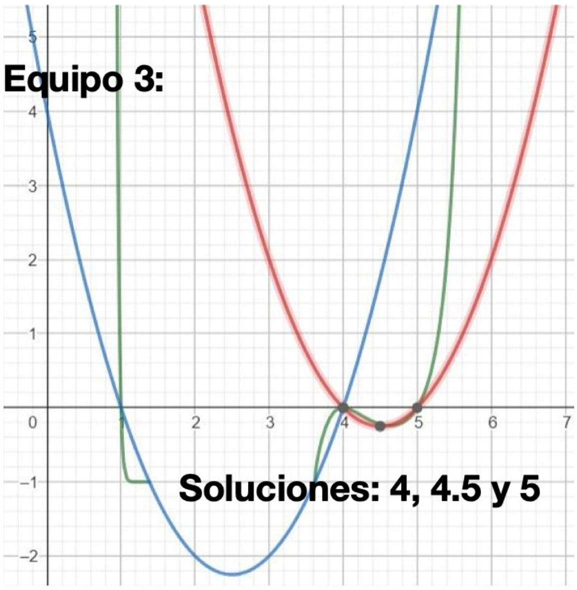


Figura 10. Producción del equipo 3 sobre el problema del NCTM

Análisis de la Actividad 3

La producción individual a este problema "Oro azul" fue muy variada. El hecho de no saber cuál sería un modelo adecuado ni el resultado asociado al modelo, hizo que las diferentes propuestas individuales fueran todas propuestas como soluciones, sin llegar a un acuerdo en lo que sería una propuesta aceptable. Diríamos que no hubo consenso para proporcionar una respuesta.

Así que, en un mismo equipo, se propusieron el modelo lineal, el de variación inversa, y el cociente de dos polinomios de 1er grado. El único grupo estable fue el equipo 2, proponiendo el modelo de variación inversa, obteniendo 27,27 miles de millones de personas, sin embargo, no buscaron la fecha en la que posiblemente se alcance esa cifra.

Solamente los equipos 1 y 3 propusieron fechas probables de año crítico. El equipo 1, propuso dos fechas 2263 y dentro de 19 años (2043). La diferencia enorme entre las fechas no los llevó a discutir y ponerse de acuerdo. Una persona del equipo 3 llegó a la conclusión que el año crítico sería en el 2376. Esta respuesta que no fue discutida por todo el equipo.

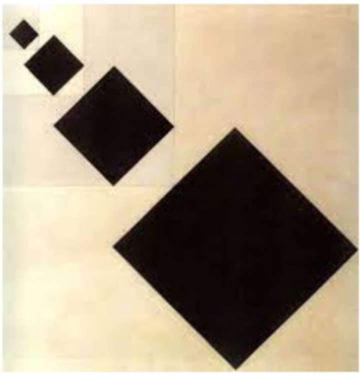


Figura 11. Pintura "Arithmetic composition" de Theo van Doesburg (1929-1930)

Análisis de la Actividad 4

En esta etapa, se realizó previamente una presentación sobre el número y la espiral áurea. Además, se presentó a los estudiantes pinturas y obras arquitectónicas en las que se cree que se han utilizado esos conceptos. Al presentar a los estudiantes el cuadro *Arithmetic composition* de Theo van Doesburg (1929-1930) se esperaba que los alumnos fueran conscientes de que no se pueden cambiar colores (respetando los colores elegidos por el autor) y que era importante encontrar alguna relación en la construcción de los cuadrados (homotecia).

En este caso, aunque se pidió un trabajo individual y de equipo, sólo hicieron una entrega individual. En la Figura 12 se presentan algunas respuestas. En el caso de la 3ª reproducción en la parte superior de la Figura 12, los cuadrados no eran construcciones robustas, y para

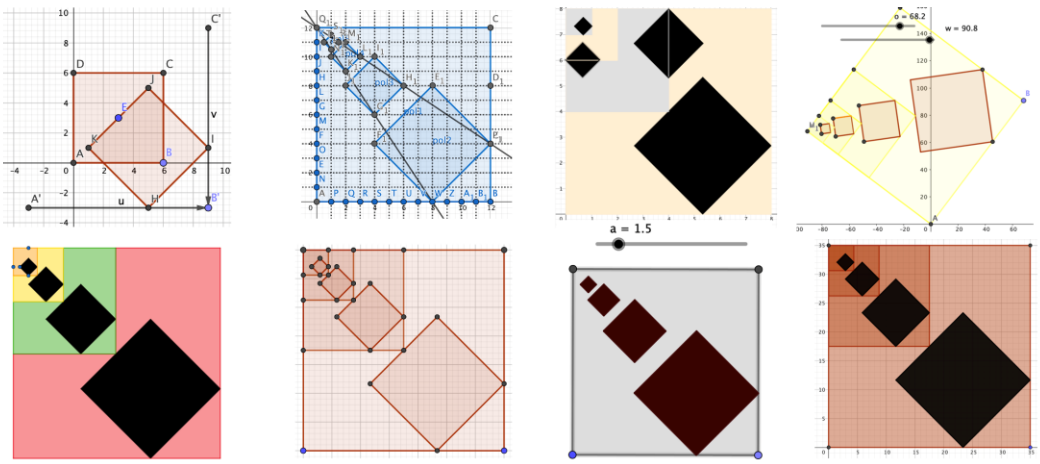


Figura 12. Producciones de los estudiantes de la actividad STEAM de arte. "Arithmetic composition" de Theo van Doesburg (1929-1930)

presentarlos los hemos movido (no utilizaron homotecia) con la intención de mostrar al lector este hecho.

Se puede apreciar que muchas de las respuestas consideraron la noción matemática de homotecia, sin embargo, alteraron los colores de la pintura original. Los estudiantes se centraron en la matemática subyacente y no en la importancia de los colores seleccionados por el pintor. Solamente hubo dos respuestas similares correspondientes a la 3ª figura de la parte superior de la Figura 12, que presentaron su producción acercándose a los tonos de la pintura y la distribución, sin embargo, estas dos estudiantes no utilizaron homotecia.

Análisis de la Actividad 5

Posterior a la presentación de Tracker y del video que muestra a un individuo atravesando una cancha de baloncesto (de ida y vuelta), se pidió a los estudiantes que propusieran una tarea por equipo considerando contenidos de cinemática, modelización matemática, y uso de Tracker para la toma de datos, y de GeoGebra para su tratamiento.

Si bien los equipos propusieron situaciones variadas, salvo uno de ellos, la selección de variables era la más simple posible. Los equipos 1 y 4, decidieron realizar ellos mismos su video. El equipo 3 realizó un video muy simple (sobre un péndulo), pero su análisis tenía que ver con el péndulo de Foucault. Este equipo hizo referencia a los videos que se encuentran en Internet del museo de Valencia sobre el péndulo de Foucault. Con respecto a los equipos 2 y 5, ellos tomaron de Internet un video. Uno sobre la cicloide considerando sus propiedades de braquistroconía y tautocronía. El equipo 5 presentó un video mostrando el choque entre dos bolas sostenidas con un cable (ver Figura 13).

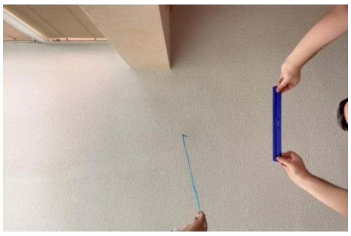
Equipo 1

El equipo 1 cometió el error de tomar datos de la caída libre de un objeto y no desechó los datos después de que el objeto rebotó sobre el suelo. Entonces, su modelo matemático, en lugar de ser una función cuadrática, propuso un polinomio de 3^er^ grado. Es notorio que, al proponer el polinomio de tercer grado, no consiguieron una asociación con la física y resultados conocidos sobre la caída libre.

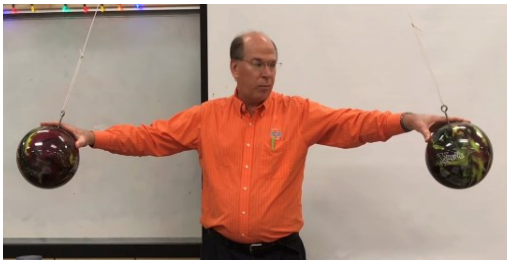
Equipo 1

Equipo 2

Equipo 3



Equipo 4



Equipo 5

Figura 13. Proyectos (videos de un fenómeno de la vida real, ligados a la cinemática)

Equipo 2

El equipo 2 realizó una excelente presentación sobre la cicloide y sus propiedades como curva braquistócrona y tautócrona a partir de la observación del deslizamiento de bolas. Este equipo, tal y como se indicó, tomó de Internet el video. Dado que en Internet se realiza una integración entre las matemáticas y la física, los estudiantes de este equipo utilizaron Tracker llegando a las mismas conclusiones que en el sitio web. Cabe aclarar que la excelente exposición y manejo de la matemática subyacente fue muy bien presentada y fue notorio que los estudiantes asimilaron los contenidos tanto de matemáticas como de física.

Equipo 3

El equipo 3 realizó un video sobre un péndulo que ellos colgaron de un techo y lo pusieron a dar vueltas. Las variables consideradas fueron las variables x (posición) e y (altura). Realizaron una toma de datos con Tracker, analizando por parejas las diferentes variables incluyendo el tiempo. Estos estudiantes relacionaron la noción del péndulo con la experimentación de Foucault, proporcionando un acercamiento histórico y artístico en el que mencionando museos en donde se puede apreciar el péndulo de Foucault.

Equipo 4

El equipo 4 realizó su propio video de individuo haciendo ejercicios con pesas. Las variables seleccionadas fueron el tiempo y la altura. Utilizaron Tracker para la toma de datos y propusieron una función sinusoidal como modelo. Este equipo integró bien las herramientas tecnológicas acorde con el fenómeno físico analizado.

Equipo 5

El equipo 5 tomó en Internet un video sobre el choque de dos bolas. Si bien en su selección de variables mencionan tiempo, posición, altura, velocidad, aceleración y trayectoria. Señalan, además, que en el choque de dos bolas se puede trasmitir la energía cinética. Sin embargo, su análisis con Tracker se limitó al uso de las variables tiempo (variable independiente) y altura (variable dependiente).

En resumen, se puede afirmar de este análisis que los estudiantes de los equipos 1, 4 y 5 pensaron que la tarea consistía en proporcionarle más atención al uso tecnológico (en este caso toma de datos con Tracker y análisis de datos y procesos de modelización matemática con GeoGebra) como herramienta, que al fenómeno físico y su contra parte matemática. El equipo 3 realizó un video demasiado simple impulsando el péndulo para realizar un movimiento circular, la toma de datos con Tracker es muy sencilla, por lo que no fueron capaces de explotar las diferentes maneras de analizar el movimiento de un péndulo en forma práctica; sin embargo, este equipo menciona la importancia del péndulo relacionándolo con el experimento del péndulo de Foucault. Si bien el equipo 2 utilizó los resultados encontrados en Internet sobre la cicloide y sus propiedades (braquistócrona y tautócrona), fue el equipo que logró conjugar los aspectos propios de la cinemática, modelización matemática y tecnología.

Conclusiones

Las diferentes tareas proporcionadas a esta población de futuros profesores de matemáticas de la ESO y Bachillerato nos muestran diferentes problemas a analizar desde un punto de vista del STEAM integrado. Con la primera tarea sobre las monedas, si bien los estudiantes no encontraron dificultades para encontrar el área pedida, solamente un equipo mostró elementos de control sobre la matemática al poner sobre la mesa tres monedas y visualizar aproximadamente el área que se debiera calcular utilizando tecnología. Un hecho destacable es que no utilizaron la herramienta GeoGebra CAS (*Computer Algebra System*) para hacer los cálculos algebraicos, sino más bien una combinación de GeoGebra y lápiz y papel. Con respecto a las preguntas para promover una generalización o propuesta de problemas más complejos, cuatro de los equipos propusieron problemas o ejercicios rutinarios, más que verdaderos problemas. Esto indica que debemos poner más atención a la promoción de ideas que vayan más allá de lo ya realizado, de acuerdo con las características teóricas del *problem posing* que proponen, entre otros, Baumanns y Rott (2022). Se puede afirmar que habría que hacer más énfasis en que la herramienta tecnológica debería jugar un papel más importante como *scaffolding* en el desarrollo de nuevas ideas relativas al *problem posing*.

La segunda tarea nos mostró de manera clara que el poder de la tecnología es sorprendente. Los estudiantes confían demasiado en lo que una herramienta tecnológica les proporciona y no confrontan sus resultados con los que se pudieran obtener con un acercamiento de lápiz y papel. Si bien los equipos propusieron generalizaciones interesantes, se observó que, al no resolver adecuadamente las tareas propuestas antes de la generalización (que no resolvieron) pierden fuerza sus proposiciones. Consideramos que, en esta tarea, el principal problema fue la falta de equilibrio entre los procesos de instrumentación e instrumentalización, en el sentido propuesto por el proceso de Génesis instrumental que proponen Rabardel (1995) y Guin & Trouche (1999), entre otros.

En la tercera actividad, los estudiantes no tuvieron argumentos para ponerse de acuerdo. Salvo uno de los equipos, el resto propuso diferentes modelos para calcular la población mundial en la que el mundo se vería en una situación crítica con respecto al agua potable. Se puede concluir que les faltaron elementos para convencer a sus compañeros. Solo dos equipos propusieron fechas en donde la humanidad tendría un problema grave; uno de ellos proporcionó dos fechas contradictorias. Esto nos conduce a pensar más en el método de enseñanza utilizado (ACODESA). En la discusión con los estudiantes salió como alternativa interesante añadir al modelo ACODESA el método sugerido por la Consejería de Educación del Gobierno de

Canarias, que es la técnica de enseñanza 1-2-4[2]. La técnica consiste en realizar, primeramente, un trabajo individual, posteriormente una discusión en parejas y finalmente discusión de dos parejas. Si añadimos esta técnica al método de enseñanza ACODESA, creemos que le proporcionará mayor fuerza en los procesos de aprendizaje en el aula.

La cuarta actividad, en la que se incorporan las artes en los procesos de modelización matemática, fue considerada interesante por los participantes. Los estudiantes dotaron de más importancia al uso de la tecnología (GeoGebra) y al contenido matemático. Los resultados nos muestran que es importante desarrollar en los estudiantes habilidades que tengan que ver con la estética al analizar una obra de arte, ya sea en arquitectura, pintura o cualquier otra manifestación artística.

En la quinta y última tarea, la herramienta tecnológica de Tracker tuvo mayor peso que la selección del fenómeno físico a estudiar. Consideramos que, en el futuro, se tendría que proporcionar mayor énfasis en el análisis de fenómenos físicos y sus procesos de modelización matemática.

Finalmente, se puede considerar que esta experimentación nos ha mostrado la complejidad del STEM integrado en la formación de profesores. Si bien la experiencia ha sido muy rica, consideramos que se deben realizar más investigaciones que profundicen sobre los resultados obtenidos.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación suministrada por el proyecto de investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE, y el apoyo recibido por el grupo TEMA (UQÀM).

Referencias

Baumanns, L. & Rott, B. (2022). The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110, 251-269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

[2] https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/jrodmedk/2018/10/17/aprendizaje-cooperativo-dinamica-1-2-4/

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, 37-68.

Boucher, C., Marotte, L.& Coupal M. (2007). Intersection mathématique. 2e cycle (1re année). Montréal : Chenelière éducation.

Chalmers Ch., Carter M-L., Cooper T. & Nason R. (2017). Implementing big ideas to advance the teaching and learning of science, technology, engineering and mathematics (STEM). *International Journal of STEM Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9799-1

Cooper, T. (2014). YuMi Deadly Maths: Big ideas for mathematics: Prep to Year 9. Kelvin Grove, Qld: YuMi Deadly Centre, Queensland University of Technology.

English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July 2015, Hobart, Australia.

English L. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*. https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1

GeoGebra (software libre: http://www.geogebra.org/cms/).

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Furner, J.M. & Kumar, D.D. (2007) The Mathematics and Science Integration Argument: A Stand for Teacher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3, 185-189.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt, F. & Quiroz, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers d'un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

Hitt F., Soto J-L, Romero-Felix, C-F & Dávila-Araiza, M-T. (2022). Reflection on the STEM integration between concepts of kinematics and calculus. *Far East Journal of Mathematical Mathematics Education*, 23, 57-96.

Kelley T.R., & Knowles J.G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3, 1-11. https://doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z

LOMLOE. (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, de modificación de la Ley Orgánica de Educación. *Boletín Oficial del Estado* (BOE), 23 de diciembre de 2020. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2020-17264.

Maaß, K., & Reitz-Koncebovski K. (Eds). (2013). PRIMAS. Promoting inquiry in mathematics and science education across Europe. Freiburg: European Union and Seventh Framework Programme.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (1988). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, Reston, VA, USA.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Tracker. Logiciel libre. *Video analysis and modeling tool.* http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/

ANEXO 1: ENUNCIADO DE LAS ACTIVIDADES 1 Y 2 PROPUESTAS

Actividad 1 (Individual)

GeoGebra y la resolución de problemas.

Fase 1. Resolución de Problemas

Problema 1. Las monedas

Se tienen tres monedas de un euro y se colocan tal y como se puede observar en la siguiente fotografía, esto es, las monedas se tocan dos a dos. Si el diámetro de cada moneda mide 23.25 mm. ¿Cuál es el área de la superficie que queda entre las tres monedas?

Proceso de modelización en GeoGebra.

Responder individualmente a las siguientes tres preguntas.

a) ¿Dónde comenzar? Escribir qué es lo primero que se te ocurre para abordar la solución.
b) Sabiendo que puedes utilizar GeoGebra para resolver el problema, ¿Cuentas con una estrategia ANTES de comenzar con GeoGebra? Describe a grandes rasgos tu estrategia y si es necesario incluye en el espacio de debajo los dibujos hechos a mano.
c) En la estrategia pensada, en principio, ¿existe la posibilidad de una predicción (estimación del área buscada)?
d) Antes de utilizar GeoGebra, ¿se te ocurre una manera de verificar tu estimación?
e) Una vez en GeoGebra, ¿Dónde representarías la 1ª moneda? ¿Tu estrategia contempló un plan global de acción? ¿Tu estrategia contempla la construcción de elementos auxiliares?
f) Una vez resuelto el problema con GeoGebra y llegado a un resultado, en la estrategia utilizada, ¿has contado con algún elemento de control que permita saber si has cometido algún error en el proceso de resolución con GeoGebra?
g) Elaborar una tabla que muestre los conocimientos elementales que consideren que son necesarios para resolver el problema de la fase 1.

Problema	Saber básicos (conocimientos elementales)

Fase 2. Formulación de problemas

h) Formular un nuevo problema con un nivel más complejo donde el contexto fuera semejante o parecido.
i) Presenta una estrategia general para resolver el nuevo problema que acabas de formular.

Actividad 2 (Individual).

Uso de la tecnología como herramienta para promover la creatividad en el aula de matemáticas

El libro del año (Yearbook) promovido por el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics en los Estados Unidos de Norteamérica) del año 1988, fue sobre Algebra; precisamente poco antes de que la visualización matemática se mostrase como un elemento importante a promover su desarrollo en el aula (Zimmerman & Cunninham, 1991). En este libro del NCTM, al final de cada capítulo se propone un problema como desafío, y lo enuncian de la siguiente manera:

¿Pueden sus estudiantes de enseñanza secundaria resolver este problema ***?***

Uno de ellos es el siguiente (NCTM, p. 19):

Encontrar los valores de x tal que $(x^2-5x+5)^{x^2-9x+20}=1$

Fase 1. Resolución de problemas

a) ¿Dónde comenzar? Escribir qué es lo primero que se te ocurre para abordar el problema.

Proceso de modelización con GeoGebra

b) Sabiendo que puedes utilizar GeoGebra para resolver el problema, ¿Cuentas con una estrategia ANTES de comenzar con GeoGebra? Describe a grandes rasgos tu estrategia y si es necesario incluye en el espacio de debajo los dibujos hechos a mano.
c) En la estrategia pensada, en principio, ¿existe la posibilidad de una predicción?
d) Antes de utilizar GeoGebra, ¿se te ocurre una manera de verificar tu estrategia?
e) Una vez en GeoGebra, ¿Qué propondrías como proceso de solución utilizando GeoGebra?
f) Una vez resuelto con GeoGebra, ¿has contado con algún elemento de control que permita saber si has cometido algún error en el proceso de resolución con GeoGebra?
g) Elaborar una tabla que muestre los conocimientos elementales que consideres que son necesarios para resolver el problema de la fase 1.

Problema	Saber básicos (conocimientos elementales)

Fase 2. Formulación de problemas

h) La persona que formuló este problema pensó en algún procedimiento que le permitiera cambiar los polinomios de 2º grado en la ecuación. ¿Te puedes imaginar este proceso?
i) ¿Sería posible de utilizar este tipo de ecuación para otros polinomios de 2º grado?
j) ¿Podrías proporcionar alguna estrategia que te permitiera establecer ecuaciones similares del tipo $p(x)^{q(x)}=1$ con soluciones enteras?

ANEXO 2. ACTIVIDADES STEM y STEAM (3 Y 4 RESPECTIVAMENTE).

Actividad 3 (Individual-Equipo)

Cantidad de agua dulce en el planeta (STEM)

El objetivo principal es aprender el concepto de función lineal y función de proporcionalidad inversa (hipérbola equilátera). Para lograr este objetivo, es necesario desarrollar en paralelo los subconceptos de magnitud y variable para discutir la covariación entre variables. Dado que se trata de una situación de investigación, otras funciones y conceptos surgirán naturalmente a medida que se resuelva la situación.

Fase 1. Presentación de la situación de investigación

El agua es abundante en la Tierra. Cubre aproximadamente el 70% de la superficie terrestre. Sin embargo, sólo una pequeña porción de esta agua es agua dulce accesible a los humanos.

Según las Naciones Unidas, la cantidad media de agua disponible per cápita era de 7600 kilolitros por año en el año 2000, para una población mundial de 6100 millones de personas. En 2005, esta cantidad era de 7132 kilolitros per cápita, para una población mundial de 6500 millones de personas.

Se considera que la situación mundial sería crítica si la cantidad de agua disponible por habitante cayera por debajo del umbral de 1700 kilolitros al año.

¿A partir de qué población mundial se estará la cantidad promedio de agua disponible per cápita por debajo del umbral crítico?

Fase 2. Trabajo individual

1. Analizar la situación (reflexión individual).

a) Describir individualmente el fenómeno a estudiar.

b) Utiliza diferentes tipos de representaciones que puedan ayudarte a comprender el fenómeno.

c) Organizar los datos para identificar las cantidades involucradas.

d) Hacer una selección de las cantidades en juego (variables en juego).

e) Organiza una estrategia de ataque para responder a la pregunta formulada.

f) Ejecutar mi plan estratégico.

Fase 2. Trabajo en equipo

2. Hacer una comparación de los análisis de situación realizados individualmente (discusión en equipo).

a) Describe el fenómeno a estudiar después de la discusión en equipo.

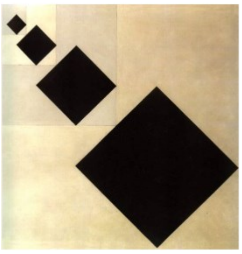
b) Utiliza diferentes tipos de representaciones que puedan ayudarte a comprender el fenómeno.

c) Discutir la organización de los datos propuestos.

d) Hacer una selección de las cantidades en juego (variables en juego).

e) Organizar una estrategia de ataque en equipo para responder a la pregunta formulada.

Actividad 4 (Individual-Equipo)
Arte y Matemáticas (STEAM). [3]

Fase 1. (Presentación de la situación de investigación)	
	En la siguiente imagen se observa una composición artística de un pintor constructivista del primer tercio del siglo pasado (1929) su nombre es Theo van Doesburg y el título del cuadro es “Arithmetic composition”
Fase 2. Trabajo individual	
Haciendo un estudio geométrico del cuadro (puede ser con GeoGebra), se observan en la configuración un gran número de conocimientos y conceptos matemáticos. • Hacer una construcción robusta del cuadro con el SGD. • Encontrar aquellos conocimientos y conceptos matemáticos que consideres que aparecen involucrados y situarlos en el Currículo de Educación Secundaria. Plantear una actividad para un grupo de estudiantes de Educación Secundaria., contextualizándola en algún nivel educativo	
Fase 2. Trabajo en equipo	
Hacer una comparación de los análisis de situación realizados individualmente (discusión en equipo). a) Describe la situación artística estudiar después de la discusión en equipo. b) Discutir la imagen que proporciona el cuadro. d) Hacer una selección los diferentes conceptos que están involucrados en la reproducción del cuadro (variables en juego). e) Organizar una estrategia de ataque en equipo para responder a las preguntas formuladas.	

[3] Adaptada de una tarea de investigación dirigida por J. María Fortuny (2024)

ANEXO 3. ACTIVIDAD STEM DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON TRACKER Y GEOGEBRA

Actividad 5. Modelización con Tracker

La carrera del siglo. Aquiles se entrena para la competencia del siglo.

El objetivo principal de esta actividad es el desarrollo de ideas intuitivas y su evolución con respecto al concepto de velocidad instantánea como promotor del concepto de derivada en un punto. Para lograr este objetivo, es necesario pensar en una estrategia por etapas. Es bien sabido en la literatura de didáctica de las matemáticas los problemas de aprendizaje de conceptos ligados al infinito, y en particular al concepto de derivada (e.g. Selden, Mason & Selden, 1989; Zandieh, 2000; Hitt & Dufour 2019). El infinito potencial está muy cercano a nuestra intuición[4], sin embargo, el infinito actual[5] (necesario para el aprendizaje del cálculo) es un gran problema de enseñanza. Bueno, no por nada pasaron más de 22 siglos para que el infinito actual fuera establecido formalmente en matemáticas. Indicios de esta problemática la tenemos desde Zenón y sus paradojas (siglo V antes de Cristo). Una de ellas es la de Aquiles y la tortuga, que la podemos enunciar de la siguiente manera: Si la tortuga inicia con una ventaja, cada vez que Aquiles llega a donde estaba la tortuga, ya ha transcurrido un momento y la tortuga ya se movió. Ello querría decir que por muy rápido que fuera Aquiles, jamás alcanzará a la tortuga.

Con respecto a esta problemática, hemos diseñado una tarea ligada a un fenómeno físico, que pueda desarrollar poco a poco ideas intuitivas que nos permita atacar el gran problema de aprendizaje de la derivada. Hemos elegido una tarea en donde la noción de velocidad instantánea emerge en forma natural. Una vez concluida esta tarea, el profesor iniciaría la introducción de cálculo de máximos y mínimos a la manera que Fermat lo estableció y a partir de allí introducir el concepto de derivada como un límite de pendientes.

Ahora nos centraremos en nuestra tarea. Dado que se trata de una tarea compleja o situación de investigación, el proceso se desarrolla en varias etapas incluyendo la toma de datos con Tracker y su análisis con GeoGebra para la producción de un modelo algebraico (función) que permita modelizar el fenómeno y proporcionar explicaciones del mismo, desde un punto de vista científico

[4] El infinito potencial lo podemos pensar como una variable que crece más y más sin límite.
[5] El infinito actual lo podemos concebir como una totalidad, sin movimiento, estático.

Fase 1. Presentación de la situación de investigación

Aquiles se prepara para la gran carrera contra la tortuga (VISUALIZAR EL VIDEO)

En esta etapa, Aquiles recorre de ida y vuelta una cancha de baloncesto que mide 15 m de ancho.

Fase 2. Trabajo individual

1. Analizar la situación (reflexión individual).

Mirar el video para detectar variables que podamos analizar para proporcionar una explicación científica del fenómeno.

a) ¿Qué tipo de preguntas podemos formular en relación con el contexto?

b) Una vez que hemos seleccionado una pregunta interesante, ¿Cómo puedes responderla?

c) Para poder avanzar en el acercamiento científico, ¿qué variables puedes identificar al analizar el fenómeno y que relación hay entre esas variables?

Fase 3. Trabajo en equipo

d) Discute con tus compañeros las preguntas que cada persona formuló, y enuncia enseguida las que hayan retenido para su análisis.

e) En su discusión se esperaría que algunas preguntas como las siguientes se hayan retenido.

- ¿Qué variables podemos tomar en cuenta?
- ¿Cuál es la velocidad media en la 1ª parte de la carrera? ¿Cómo se calcula?
- ¿Cuál es su aceleración?
- ¿En qué momento Aquiles alcanza su velocidad máxima en la 1ª parte de su recorrido?

Si esas preguntas no emergieron en la discusión, discútelas con tus compañeros.

f) En su discusión se esperaría que algunas preguntas como las siguientes se hayan retenido.

- ¿Qué variables podemos tomar en cuenta?
- ¿Cuál es la velocidad media en la 1ª parte de la carrera? ¿Cómo se calcula?
- ¿Cuál es su aceleración?
- ¿En qué momento Aquiles alcanza su velocidad máxima en la 1ª parte de su recorrido?

Si esas preguntas no emergieron en la discusión, discútelas con tus compañeros.

g) Toma de datos con Tracker.

- Fijar la toma de datos exclusivamente cuando Aquiles atraviesa la cancha de baloncesto (trayecto de ida)

- Fijar la toma de datos una vez cada 10 fotos.
- Una vez activado el puntero (masa), seleccionar el tiempo como variable independiente y la posición como la variable dependiente.
- Activar el menú masa, para seleccionar marcar por defecto.
- Tomar datos.

Obtención de puntos unidos por segmentos. ¿Qué representa cada segmento? ¿Qué representa la gráfica?

h) Paso de datos a una hoja de cálculo de GeoGebra. 1ª columna la variable tiempo, 2ª columna la variable posición o distancia recorrida (es lo mismo en los primeros 15 metros).
   - Construir una curva poligonal (menú activado estando en la ventana “Hoja de cálculo” en GeoGebra. ¿Discutir sobre la continuidad del evento y la posibilidad de modelización con una curva continua?
   - Analizar lo que significa velocidad media y calcularla añadiendo una 3ª columna.
   - Crear una lista de puntos (1ª y 2ª columnas) y la nube de puntos correspondiente en el plano cartesiano. Analizar cuidadosamente los datos para seleccionar la mejor curva de ajuste (regresión). Un aspecto importante es el punto de inflexión que proporciona un indicio para seleccionar un polinomio de 3^{er} grado.
   - Crear una lista de puntos (1ª y 3ª columnas) y la nube de puntos correspondiente en el mismo plano cartesiano. Analizar cuidadosamente los datos para seleccionar la mejor curva de ajuste (regresión). En este caso, un polinomio de 2º grado.
   - Analizar con cuidado las dos curvas y la relación entre ellas ligada a la pregunta inicial: ¿En qué momento Aquiles alcanza su velocidad máxima?
   - Discutir el significado de punto de inflexión, máximo del polinomio de 2º grado.

Fase 4. Regreso al trabajo individual, proceso de autorreflexión

Reconstrucción de lo realizado en clase.

Fase 5. Diseño de actividades de modelización con Tracker y formulación de problemas

Diseñar por grupos, cuatro actividades que incorporen problemas, basándose en la modelización matemática con Tracker. Deben estar contextualizadas en una de las cinco materias de matemáticas del Bachillerato LOMLOE (Matemáticas I y II, Matemáticas Aplicadas a las CCSS I y II y Matemáticas Generales).

Se debe realizar (o utilizar) el vídeo de un fenómeno y a partir del mismo se plantearán y resolverán los problemas y situaciones propuestas.

Las tareas deben presentarse tal cual las tendrán que resolver y presentar los alumnos y temporalizadas en sesiones