FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Vol. XVI ◆ http://wp.ull.es/fpiem ◆ ISSN: 1695-6613 (p) y 1885-2912 (d)

# ALGUNAS CARACTERÍSTICAS EN LAS ETAPAS DE CREATIVIDAD MATEMÁTICA AL INCORPORAR GEOGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**Eduardo Pérez-Olvera[1] (pe378359@uaeh.edu.mx)**
**Fernando Barrera-Mora[1] (barrera@uaeh.edu.mx)**
**Aarón Reyes-Rodríguez[1] (aaronr@uaeh.edu.mx)**

**[1]Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo**

***Resumen***

En este trabajo se reportan algunas modificaciones identificadas en las etapas del *Proceso Creativo Matemático* (PCM) de Hadamard (1945) al usar un Sistema de Geometría Dinámica en la resolución de problemas. La información se recopiló asignando un par de *problemas-reto* de geometría a un estudiante de posgrado en educación matemática, quien elaboró una bitácora digital (Santos-Trigo, 2020).

Se analizaron las ideas obtenidas súbitamente (iluminación), las obtenidas durante el trabajo consciente o durante procesos reflexivos. Los principales resultados indican que el SGD brinda al resolutor oportunidades para transitar por múltiples ciclos de modelación. Algunas acciones identificadas en el PCM se ven potenciadas, promovidas o guiadas por el SGD. Más aún, los resultados sugieren que las ideas, además de surgir súbitamente, también pueden ocurrir durante procesos reflexivos y trabajo activo, dando lugar a procesos que denominamos *incubación-iluminación progresiva*. Con el uso del

Pérez-Olvera, E.; Barrera-Mora, F y Reyes-Rodríguez, A. (2024). Algunas características en las etapas de creatividad matemática al incorporar GeoGebra en la solución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, Vol. XVI. pp 163-182.*

SGD, la etapa en donde se identificaron mayores cambios fue la de preparación, sin embargo, hay cambios en la incubación e iluminación que requieren mayor atención en futuras investigaciones.

*Palabras clave*: Creatividad Matemática, Proceso Creativo Matemático, Sistema de Geometría Dinámica, Planteamiento y Resolución de Problemas

***Abstract***

In this work, some modifications identified in the stages of Hadamard's (1945) Mathematical Creative Process (PCM) when using a Dynamic Geometry System (SGD) in problem-solving are reported. The information was collected by assigning a pair of geometry challenge problems to a graduate student in mathematics education, who developed a problem solving digital notebook (Santos-Trigo, 2020).

The ideas obtained suddenly (illumination), those obtained during conscious work, or during reflective processes were analyzed. The main results indicate that the SGD provides the solver with opportunities to go through multiple modeling cycles. Some actions identified in the PCM are enhanced, promoted, or guided by the SGD. Additionally, the results suggest that ideas, besides emerging suddenly, can also occur during reflective processes and active work, giving rise to processes we call progressive incubation-illumination. With the use of the SGD, the stage where the most significant changes were identified was the preparation stage. However, there are changes in incubation and illumination that require further attention in future research.

*Keywords*: Mathematical Creativity, Mathematical Creative Process, Dynamic Geometry System, Problem Posing and Solving

## Introducción

La habilidad para proporcionar soluciones innovadoras a los problemas, así como la capacidad para identificar propiedades nuevas, y establecer conexiones, entre diferentes conceptos matemáticos es fundamental en la formación de los estudiantes de todos los niveles escolares (de Vink et al., 2022; Leikin, 2013; Sriraman, 2009). Dada la necesidad e interés por fomentar la creatividad en los estudiantes y en los profesores, es necesario comprender cómo se desarrolla el proceso creativo en matemáticas (Schindler & Lilienthal, 2020). Por la razón anterior, durante los últimos años se ha incrementado el interés de los investigadores por analizar y profundizar en el conocimiento sobre la creatividad matemática (Haavold et al., 2018; Joklitschke et al., 2022; Kozlowski & Chamberlin, 2022).

Por otra parte, los avances tecnológicos han transformado nuestros estilos de vida, incluso la forma en que se lleva a cabo el proceso educativo. En esta línea de ideas, los salones de clase no han sido ajenos a estos cambios, ya que la incorporación de tecnologías digitales en las aulas ha tenido un impacto significativo sobre cómo se aprende, cómo se enseña y cómo se resuelven problemas matemáticos (Santos-Trigo, 2019). Entonces, la inclusión de herramientas digitales, como GeoGebra, en el estudio del PCM puede proporcionar nuevas dimensiones a la caracterización y análisis de la creatividad, derivadas de que los *affordances* de la herramienta modifican las formas en que los estudiantes piensan, representan y transforman la información involucrada en los problemas (Santos-Trigo et al., 2021).

Así, el objetivo de este trabajo es revisar y profundizar en el PCM desarrollado por un estudiante de posgrado en educación matemática, con formación previa en matemáticas aplicadas, al resolver dos *problemas-reto* de geometría con el uso de GeoGebra.

## Antecedentes

Los orígenes del estudio de la creatividad matemática se pueden rastrear hasta 1899, cuando Poincaré publicó un artículo sobre lógica e intuición, concluyendo que ambos aspectos son importantes para el desarrollo científico. Con su célebre frase "Es por la lógica que demostramos, pero por la intuición que descubrimos" (Poincaré, 1899, p. 161), Poincaré sugiere prestar más atención a cómo se desarrolla la actividad matemática.

Posteriormente, entre 1902 y 1904, Henri Fehr y Charles-Ange Laisant publicaron en *L'Enseignement Mathématique*, en colaboración con los psicólogos Théodore Flournoy y Édouard Claparède, un cuestionario que buscaba obtener información sobre los hábitos de la mente y las formas de trabajo de distintos matemáticos, publicando sus resultados por partes desde 1905 hasta 1908. Entre las conclusiones más importantes de los artículos anteriores destaca que, en la mayoría de los casos, la idea que permitió resolver el problema ocurrió mientras el resolutor dormía o, de manera súbita, tras haber explorado ampliamente, y de forma consciente el problema. Paralelamente, en 1908, Poincaré publicó su obra *Ciencia y Método*, donde analiza cómo se lleva a cabo el trabajo científico, enfatizando cómo operan los procesos de descubrimiento, razonamiento, justificación y creatividad en matemáticas; así como la relevancia del trabajo inconsciente y de la *iluminación* en el PCM. Poincaré comenta que los resultados de Fehr y Laisant, a pesar de haber sido obtenidos de forma independiente, confirman sus propias conclusiones.

Años más tarde, en 1926, Wallas, inspirado en los trabajos de Helmholtz y Poincaré, describe cuatro etapas en la resolución de problemas: (a) preparación, (b) incubación, (c) iluminación y (d) verificación. En 1945, Hadamard (1996), retomando todos los trabajos anteriores, y otros más, como lo expuesto por Helmholtz en 1896 (Hadamard, 1996) y el trabajo de Maillet (1905), caracterizó estas etapas específicamente en el campo de las matemáticas. Para conseguir lo anterior, realizó una recolección informal de información empírica, utilizando el cuestionario de 1902 y 1903 preguntó a personas a quienes denominó *hombres de primera* como George Polya y Albert Einstein, con la idea de describir las etapas del proceso creativo en el caso de las matemáticas. Posteriormente, con el trabajo de Rhodes (1961) y otras investigaciones recientes (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013; Pitta-Pantazi et al., 2018; Sriraman, 2009), estas etapas se consolidaron como los componentes básicos del PCM.

Por otra parte, en 1945, Polya analiza el proceso de resolución de problemas matemáticos a través de cuatro fases. Aunque menciona el trabajo inconsciente, su enfoque se centra en el trabajo consciente. A pesar de que Polya y Hadamard publicaron sus libros en el mismo año, se sabe que ambos discutieron acerca de estos temas (Hadamard, 1996), pero cada uno centró la atención en distintos aspectos que se complementan entre sí.

Para abordar la dificultad en el análisis de la creatividad, Rhodes (1961) propuso su modelo de las 4P's, en el cual describe aspectos que caracterizan la creatividad: (a) la persona, (b) el producto, (c) el proceso y (d) el ambiente de trabajo (*Press* en el original). Actualmente, este modelo ha sido adaptado, y ampliamente utilizado, para estudiar la creatividad matemática (Joklitschke, Rott, & Schindler, 2022; Pitta-Pantazi, Kattou, & Christou, 2018). El trabajo de Hadamard se distingue de otros enfoques que analizan la creatividad porque surge en el contexto de las matemáticas, a diferencia del resto de aproximaciones, las cuales se desarrollaron en el ámbito de la psicología (Joklitschke et al., 2022).

En la mayoría de los trabajos que analizan el PCM, las fases se describen de forma muy gruesa, por lo que hace falta realizar un análisis más fino de lo que ocurre en cada una de ellas, con la finalidad de tener una mejor comprensión del proceso creativo cuando se utilizan tecnologías digitales en la resolución de problemas. En este contexto, en el presente trabajo se busca responder a la pregunta: ¿De qué manera influye el uso de GeoGebra sobre el PCM desarrollado por un estudiante de posgrado en educación matemática, con formación en matemáticas aplicadas, al resolver problemas-reto de geometría?

## Marco conceptual

Esta investigación se apoya en un marco conceptual (Lester, 2005), el cual consiste en un refinamiento de las etapas asociadas con la creatividad matemática (Hadamard, 1945), en donde se destaca el papel del trabajo consciente e inconsciente en el PCM, cuando se resuelven problemas. Las etapas originales, asociadas con el trabajo consciente, se refinaron considerando elementos de las cuatro fases de Polya (1945). Adicionalmente, consideramos algunos conceptos que permiten determinar la influencia del uso de las tecnologías digitales en la resolución de problemas, particularmente aquellos que dan cuenta de cómo las herramientas digitales pueden ayudar a transformar los métodos tradicionales de pensamiento matemático. También se reconoce el efecto de las diversas interacciones del resolutor con otras personas, tanto directas como indirectas, en el PCM.

Wallas (1926) y Hadamard (1945), inspirados en el trabajo de Poincaré (1952), describen cuatro etapas que caracterizan el proceso creativo matemático, siendo el trabajo inconsciente una parte fundamental en este proceso.

La primera etapa que describen es la 'preparación', la cual consiste en todo el trabajo consciente llevado a cabo en el proceso de resolución, explorando distintas alternativas que con frecuencias pueden parecer improductivas. Sin embargo, estos intentos, proporcionan una mejor comprensión del problema.

La etapa de 'incubación' es aquella en la cual se pasa del trabajo consciente al trabajo inconsciente. Mientras que la etapa de iluminación se caracteriza por la aparición repentina de una idea que *resuelve* el problema. Esta idea surge de manera espontánea, sin haber estado pensando conscientemente en el problema en ese momento y, con frecuencia, suele estar acompañada de un sentimiento de certeza.

La etapa final es la 'verificación', donde se reflexiona sobre las ideas generadas en la fase de iluminación. Durante esta etapa, se evalúan y refinan los argumentos al conectar diferentes elementos del problema con los recursos del resolutor. Según Hadamard (1996), esta fase es crucial por tres razones: primero, porque es necesario confirmar la validez de las ideas, ya que, a pesar de la certeza inicial, es esencial asegurar su fiabilidad para evitar errores o malinterpretaciones. Segundo, porque se verifican los resultados mediante argumentos formales, lo cual requiere un enfoque consciente y meticuloso para estructurar adecuadamente los hallazgos. Tercero, porque se exploran posibles aplicaciones del resultado obtenido, no solo confirmando el éxito en la resolución del problema, sino también buscando utilizar este resultado en otros contextos o áreas de estudio.

Considerando las etapas anteriores como base, se identificó que las fases por las que transita una persona al resolver un problema, descritas por Polya (1945), proporcionan elementos para refinar las etapas de preparación y verificación, asociadas con el trabajo consciente, ya que aportan acciones relevantes que se llevan a cabo durante tales etapas, y que regularmente no se mencionan en las caracterizaciones más comunes del PCM.

Las cuatro fases por las que transita una persona al enfrentar un problema matemático son: (1) entender el problema, (2) diseñar un plan, (3) llevar a cabo el plan, y (4) visión retrospectiva (Polya, 1945). Al proponer estas fases, Polya parte de la premisa de que nuestra comprensión inicial de un problema es incompleta y evoluciona, no solo a medida que avanzamos en la búsqueda de una solución, sino también una vez que la solución ha sido encontrada

La primera etapa, ‘entender el problema’, requiere que el estudiante no solo comprenda todas las afirmaciones y requisitos del problema, también se debe identificar claramente qué se le solicita (la incógnita), reconocer la información dada (los datos), y entender las condiciones del problema. Para alcanzar una comprensión adecuada del problema, el estudiante debe adoptar estrategias tales como dibujar figuras cuando sea necesario y utilizar una notación adecuada, facilitando así el camino hacia la solución.

La segunda etapa es ‘diseñar un plan’. Esta fase implica esbozar los pasos que serán necesarios para resolver el problema. Polya destaca que la transición de ‘entender el problema’ a ‘concebir el plan’ a menudo requiere un esfuerzo considerable y puede incluir la exploración de varias alternativas que inicialmente no conducen a una solución. Además, aunque reconoce que las ideas pueden surgir después de un trabajo inconsciente, no profundiza en este aspecto.

La tercera etapa es ‘llevar a cabo el plan’. Esta fase es, generalmente, más directa que la concepción del plan, aunque conlleva sus propios desafíos. Polya hace una distinción crucial entre los pasos intuitivos, aquellos que parecen correctos a primera vista, y los pasos formales, que deben evaluarse rigurosamente para asegurar su corrección. En esta etapa, no es suficiente que el estudiante esté convencido de que cada paso es correcto; es esencial que pueda justificar y demostrar la validez de cada acción del plan. Esto subraya la importancia de la precisión y la fundamentación matemática en la resolución de problemas

La última etapa es ‘Visión retrospectiva’. Esta fase es crucial una vez que el estudiante ha llegado a una solución. El primer aspecto importante de esta etapa es la verificación exhaustiva de cada paso del proceso para confirmar que todos son correctos y que no se han pasado por alto posibles errores, especialmente en argumentaciones que son extensas y complejas. El segundo aspecto se centra en la reconsideración del problema desde nuevas perspectivas: explorar si el problema puede resolverse de una manera alternativa o si se pueden realizar deducciones por otros métodos. Finalmente, el tercer aspecto implica la exploración de conexiones con otros problemas. Esto incluye evaluar si la solución obtenida ofrece algún *insight* que pueda ser aplicable a problemas similares o si se asemeja a otros problemas previamente enfrentados, ampliando así la comprensión y aplicación del conocimiento matemático.

Otro elemento importante para el refinamiento de las etapas del PCM consiste en la relevancia del proceso de la interacción social, el cual recientemente se ha identificado como un componente fundamental en el proceso creativo matemático (Sriraman, 2009). Esta interacción social se puede considerar tanto de *manera directa*, al interactuar con colegas, en conferencias y mentores, como de *manera indirecta*, a través de la lectura de libros, artículos, o la visualización de contenido audiovisual en internet, etcétera.

En lo que respecta al uso de herramientas digitales, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) argumentan que su empleo en la resolución de problemas permite a los expertos pasar por cinco etapas: comprensión, exploración, búsqueda de múltiples aproximaciones, extensión, integración y reflexión. En esta misma línea de ideas, Santos-Trigo et al. (2021) destacan varias estrategias al usar herramientas digitales, las cuales incluyen obtener información relevante mediante plataformas en línea y enciclopedias electrónicas, lo cual facilita la recolección de datos específicos del problema. Otra estrategia clave es la construcción de un modelo dinámico del problema usando un sistema de geometría dinámica. Este enfoque permite crear y modificar sistemáticamente el modelo para identificar propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos, explorando casos particulares y familias de construcciones para detectar invariantes y patrones significativos. Utilizar un modelo de geometría dinámica ayuda a los resolutores a identificar patrones, formular conjeturas basadas en las relaciones observadas y registrar estos hallazgos mediante funciones, relaciones o tablas que organizan los datos interactuando con los elementos del modelo.

La formulación de conjeturas implica traducir las observaciones obtenidas del modelo de geometría dinámica a un lenguaje formal, conectando objetos del modelo con elementos o propiedades geométricas como cuadriláteros cíclicos, bisectrices, puntos medios y directrices. Además, es esencial pasar de una aproximación empírica y visual a la utilización de argumentos geométricos o algebraicos, lo cual permite validar las conjeturas. La evidencia empírica proporcionada por el modelo de geometría dinámica es crucial para justificar resultados y realizar transformaciones que, por ejemplo, permitan verificar la congruencia de ángulos o triángulos, así como utilizar propiedades de una circunferencia para verificar resultados

El interés principal de este trabajo son las etapas del PCM, sin embargo, su definición es demasiada amplia para el análisis, por lo que, tomando como base las etapas propuestas por Hadamard (1996) y Wallas (1926) y el trabajo de Polya (1945), se propone el siguiente refinamiento de las etapas de preparación y verificación (**Tabla 1**).

## Elementos metodológicos

El estudio se diseñó como un estudio de caso, cualitativo y descriptivo, centrado en un análisis profundo de un solo participante (Swanborn, 2010). Se trata de una investigación exploratoria (Swedberg, 2020), apropiada para temas poco estudiados o que se analizan desde una perspectiva nueva o diferente.

El participante de la investigación es un estudiante de un posgrado en educación matemática de una universidad pública de México; quien cuenta con un perfil de licenciado en matemáticas aplicadas. El estudiante es una de las dos personas con mejor desempeño académico de una generación de licenciatura integrada por 15 estudiantes. Fue seleccionado por su experiencia, habilidad e interés en la resolución de problemas matemáticos, además de su disposición y capacidad para expresar y detallar, de forma verbal y escrita, su proceso de pensamiento. Durante el tiempo que le llevó al participante resolver los problemas, se desarrollaron diversas sesiones de discusión con el segundo autor del artículo, quien fungió como tutor, con la finalidad de ampliar la información de cómo se llevó a cabo el PCM. Durante las discusiones con el tutor, la colaboración del participante fue activa, proporcionando aclaraciones y profundizando en los aspectos interesantes de sus registros escritos y procesos mentales.

La elección de los problemas de geometría euclidiana la realizó el segundo autor del artículo. Se incluyeron dos *problemas-reto*, los cuales demandan un esfuerzo considerable y un tiempo más allá de unas pocas horas para ser resueltos. Esto permitió profundizar en cada etapa y en la identificación de momentos clave del PCM. No se impuso un límite de tiempo para obtener la

*Tabla 1: Refinamiento de las etapas del PCM.*

| **Etapas del PCM** | **Subetapas** | **Acciones Asociadas** |
|---|---|---|
| Preparación | Explorar el problema | Identificar, representar y transformar la información |
| | | Resolver casos particulares |
| | | Buscar Patrones |
| | Comprender el problema | Extender los recursos |
| | | Relacionar datos e incógnitas |
| | Elaborar un plan | Formular conjeturas |
| | | Formular problemas auxiliares |
| | | Obtener problemas equivalentes |
| | Ejecutar el plan | Éxito |
| | | Fracaso |
| Incubación | | |
| Iluminación | | |
| Verificación | Validez de la idea y revisar la solución | Comprobar la idea |
| | | Comprobar el argumento |
| | | Comprobar cada paso de la solución |
| | Precisar la solución | Realizar cálculos numéricos o algebraicos |
| | | Escribir una demostración o justificación |
| | | Obtener soluciones diferentes |
| | Continuación del problema | Obtener problemas derivados del proceso |
| | | Vincular con otros problemas |
| | | Buscar utilizar el resultado |
| | | Buscar utilizar el método |

solución de estos problemas. En cambio, se registró el tiempo real utilizado, lo que facilitó un análisis detallado del proceso de solución. El tiempo requerido para resolver el primer problema fue de aproximadamente 90 días, mientras que obtener la solución del segundo problema solo requirió de dos días.

El enunciado del primer problema, denominado *tipo Napoleón*, por su similitud con el teorema de Napoleón, es el siguiente: “Sobre los lados del triángulo $ABC$ se construyen triángulos equiláteros $ACD$, $ABE$, y $BCF$; los puntos $K$ y $H$ son puntos medios de $EF$ y $DF$ respectivamente. Demostrar que el triángulo $AKH$ es equilátero”. El segundo problema se retomó del canal de youtube *Mind Your Decisions* (https://bit.ly/45BrzpZ), perteneciente a Presh Talwalkar, quien identificó al problema como un *Killer Math Problem*, con el siguiente enunciado: Dentro del triángulo equilátero $ABC$ se coloca un punto $D$, determinándose los segmentos $AD$, $BD$ y $CD$ con los que se construye el triángulo $EFG$; se dan por conocidos los ángulos $x$ e $y$. ¿Cuál es la medida de los ángulos del triángulo $EFG$ en términos de $x$ e $y$?

El PCM propuesto por Hadamard (1996) sugiere un largo periodo de trabajo consciente, seguido de fases de procesamiento inconsciente de la información. Para capturar la información del PCM, el participante elaboró una *bitácora digital* (Santos-Trigo, 2020) donde registró detalladamente sus pensamientos y acciones durante la resolución de problemas, empleando herramientas digitales. Este registro incluyó fechas, imágenes y observaciones relevantes desde el inicio del proceso hasta la demostración y redacción de las soluciones. Se almacenaron archivos de GeoGebra tanto localmente, en un equipo de cómputo, como en la nube para asegurar una comunicación efectiva y documentar el progreso en la solución del problema.

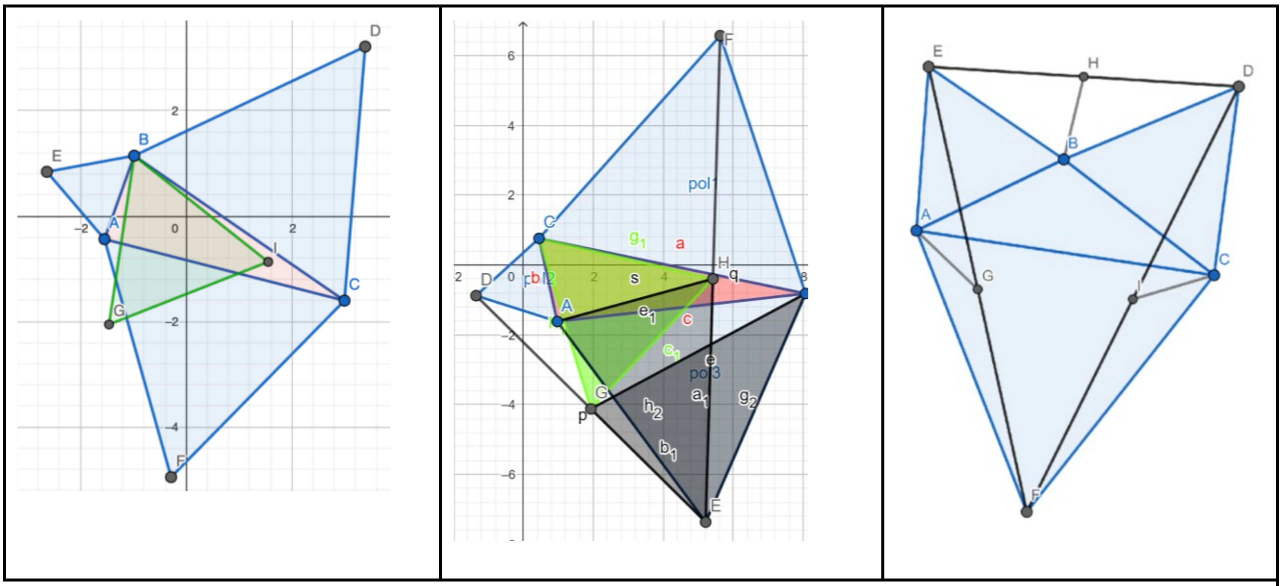
El análisis de los datos se realizó en tres etapas, la primera se basó en la identificación de las acciones consideradas en el refinamiento del PCM (**Tabla 1**), las cuales se buscaron y marcaron en la bitácora digital. Posteriormente, se identificaron acciones semejantes, las cuales se agruparon. En la segunda etapa se identificaron en la bitácora digital las interacciones sociales, directas e indirectas, que tuvo el participante con otras personas, las cuales se organizaron en cuatro categorías: (a) académicas, que son las interacciones en clases y seminarios, asociados con el posgrado en educación matemática donde está inscrito el participante, las cuales brindaron al resolutor información que se relaciona con el problema que se está abordando; (b) extracurriculares, que son aquellas que provienen de actividades adicionales al posgrado, en este caso actividades relacionadas con la olimpiada de matemáticas en su fase estatal (estado de Hidalgo, México), (c) con el mentor, son las interacciones que el resolutor realizó con su mentor sobre los problemas que se encontraba resolviendo, (d) de consulta, en esta categoría se agrupan todas las interacciones indirectas que realizó el resolutor al revisar libros, artículos y contenido audiovisual.

Por último, se analizaron las ideas que el resolutor obtuvo de manera súbita mientras realizaba otras actividades (iluminación), o mientras se encontraba realizando procesos reflexivos o analizando las ideas obtenidas durante el trabajo consciente, relacionadas con exploraciones previas. El análisis de estas ideas se centró en las circunstancias en las que ocurrieron, más que en sí la idea fue significativa en la solución o si fue una aproximación errónea. La colaboración activa del participante en el análisis de las producciones escritas permitió aclarar dudas y aportar detalles importantes sobre el PCM.

## Análisis de datos y Resultados

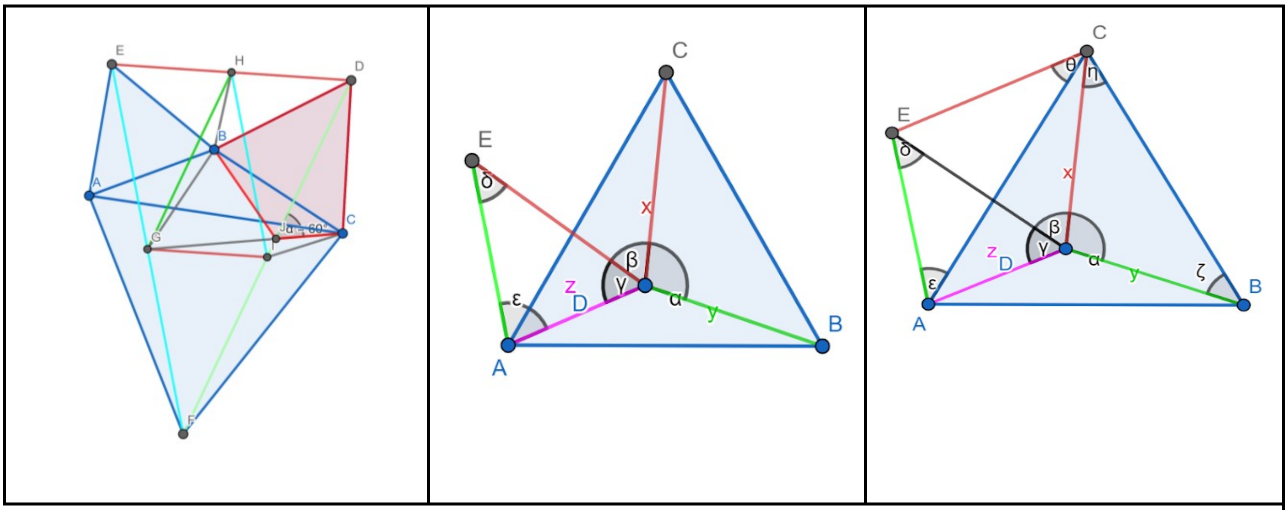
El análisis de los datos se estructuró con base en el refinamiento de las etapas que integran el PCM (**Tabla 1**)**.** A continuación, se realiza una síntesis del trabajo del participante, organizado con base en el marco antes mencionado, resaltando la contribución de GeoGebra en cada una de las acciones del PCM, fundamentalmente en lo que se refiere a las etapas de preparación y verificación.

En lo que respecta a la acción de ‘Identificar, representar y transformar la información’, se observó que el SGD no solo contribuyó en la generación de un modelo dinámico que asistió en la exploración del problema, sino que también permitió realizar modificaciones en el modelo original, basadas tanto en la información obtenida de exploración con el SGD como de la interacción social y los procesos de reflexión del resolutor. Estas modificaciones promovieron exploraciones adicionales, integrando información nueva que, en ocasiones, se vinculaba con datos previos. Esto indica que el resolutor llevó a cabo múltiples ciclos de modelación, en cada una de las cuales modifica y refina sistemas conceptuales integrados por objetos matemáticos y relaciones entre ellos (Lesh, 2003). A continuación, se presentan algunos de los modelos utilizados en el problema 1, que muestran algunas características de la evolución del problema.




*Figuras 1.1, 1.2 y 1.3. Modelo 1 (izquierda), modelo 2 (centro) y modelo 3 (derecha).*

Además, el resolutor identificó información utilizando colores entre los elementos relacionados.




*Figuras 2.1, 2.2 y 2.3. Modelo 4 (izquierda), modelo 5 (centro) y modelo 6 (derecha).*

El SGD facilitó el análisis de múltiples casos particulares gracias a sus características dinámicas, lo cual ayudó al resolutor a identificar información relevante, encontrar evidencia a favor para formular conjeturas y contribuir al proceso de justificación de resultados. Esto se logró mediante diversas rutas de pruebas, las cuales dependían de valores específicos de algunas variables del problema.

Además, el resolutor realizó múltiples casos particulares modificando dinámicamente los elementos del modelo con el SGD, con lo cual pudo identificar diferentes patrones, algunos de ellos fueron de utilidad en alguna de las soluciones del problema.

Las herramientas aritméticas y geométricas del SGD, así como sus características dinámicas, permitieron que el resolutor buscará e identificara diversos patrones, los cuales fueron comprobados empíricamente mediante las mismas características dinámicas del software. A continuación, algunos casos donde se observa esta información.

La evidencia empírica generada por el SGD y la identificación de diversos patrones, permitieron al resolutor formular varias conjeturas, las cuales inicialmente asumió como verdaderas basándose en dicha evidencia. Este enfoque se adoptó con el propósito de evaluar si estas conjeturas contribuyen a la solución del problema. Aquellas conjeturas que resultaban no ser útiles eran descartadas o pospuestas. En cambio, las conjeturas que demostraban utilidad motivaban la realización de demostraciones formales correspondientes.

El resolutor empleó el SGD como una herramienta esencial tanto para representar y validar sus ideas como para verificar la validez de sus argumentos durante la elaboración de pruebas. Esta estrategia reveló fallos argumentales en algunas de ellas. Con la asistencia del SGD, el resolutor ajustó estos argumentos, de acuerdo con diferentes valores de las variables involucradas en el problema, lo que permitió refinar su análisis y fortalecer las pruebas correspondientes. Además, identificó patrones que dieron lugar a nuevos problemas, lo que contribuyó a ampliar el entendimiento del problema original. Esta ampliación es fundamental para explorar aspectos previamente no considerados y profundizar en la comprensión global del problema.

El resolutor amplió sus recursos de diversas interacciones sociales, lo cual le permitió implementar dichos recursos en el SGD para realizar experimentaciones sobre el modelo inicial. Estas exploraciones no sólo avanzaron el proceso, sino que algunas de ellas culminaron en la obtención de información de gran valor para el proceso de solución. Para profundizar en el análisis de la interacción social se consideraron las cuatro categorías identificadas en la sección de metodología. En la siguiente tabla se presenta la cantidad de interacciones involucradas en la exploración del problema y el número de interacciones que tuvieron un impacto notable en la solución.

*Tabla 2: Interacción social. Elaboración propia.*

| Categorías | Número de interacciones | Número de interacciones significativas |
|---|---|---|
| **Académicas** | 2 | 0 |
| **Extracurriculares** | 3 | 1 |
| **Con el mentor** | 7 | 7 |
| **De consulta** | 9 | 2 |

Los resultados de las dos primeras categorías eran de esperarse, ya que las clases del resolutor no eran de geometría y, a pesar de eso, tuvieron impacto en la exploración del problema, las actividades extracurriculares del resolutor, como por ejemplo su participación en los entrenamientos de la olimpiada matemática, aportaron rutas para explorar el problema, el resolutor aclara que en el caso de su participación apoyando en los entrenamientos de olimpiada, le han permitido aprender resultados y métodos que ha empleado en otros problemas aunque en este solo se registren 3.

Las interacciones con el mentor, además de ser la segunda más frecuente, fue la que provocó más avances significativos. Este resultado es de esperarse ya que en este caso las interacciones eran discusiones en específico del problema, lo cual muestra la importancia de este tipo de interacciones, ya que además el resolutor aclara que en la mayoría de estas interacciones lograba salir de los puntos en los que se encontraban estancados. Por último, las consultas fue la categoría que provocó más exploraciones, esto se debe a que el resolutor cuando el resolutor notaba ciertas peculiaridades que pudiesen servir a la solución, buscaba profundizar en ellas, el poco impacto en la solución se debe a que estas exploraciones por lo regular no presentaban información significativa, a pesar de eso las 2 interacciones significativas que se identificaron fueron cruciales en la primera solución del primer problema.

La última parte del análisis consta de las ideas que ayudaron a solucionar los problemas o bien, generaron avances significativos, así como las circunstancias en las que ocurrieron.

**Problema 1**

La primera idea que generó avances significativos ocurre después de que el resolutor se atascó en una exploración y se involucró en un proceso reflexivo, esta idea vincula una conjetura recién hecha con una representación visual de los elementos de la ley de senos y cosenos y con información obtenida anteriormente en una interacción social indirecta.

La segunda, la cual brindó la primera solución del problema, se obtuvo durante un proceso reflexivo que ocurrió debido a que el resolutor no encontraba manera de seguir avanzando en la exploración. Esta idea vínculo tanto el resultado probado una semana antes como el método empleado y una conjetura obtenida 23 días antes.

El siguiente avance ocurrió tal como se describe en el PCM, esta idea solucionaba la reformulación del problema que se realizó para obtener una prueba distinta.

La última se obtuvo mientras el resolutor trataba de dormir, al analizar las circunstancias de esta idea, el resolutor había tenido ideas nuevas durante el día mientras trataba de redactar las soluciones, esta solución era puramente geométrica, como se deseaba, y conectaba con múltiples resultados e ideas obtenidas durante todo el proceso.

**Problema 2**

La primer idea significativa para el problema 2 ocurrió después de un periodo en el que no abordó el problema; sin embargó, no se dio de la manera en la que se describe en el PCM, ya que el resolutor había empezado a reflexionar sobre el problema conscientemente, al pedirle más detalles al resolutor sobre esta idea, menciona que la idea vino acompañada de la construcción que tenía que hacer, ya que esta relacionaba los datos del problema, la conjetura obtenida el día anterior y la idea recién obtenida.

Durante un proceso reflexivo el resolutor relaciono el problema con otro que había realizado el día anterior; sin embargo, en esta ocasión esta idea no generó una solución. Finalmente, la solución se obtuvo mientras el resolutor trabajaba activamente en el problema.

## Conclusiones

En esta sección se responde a la pregunta de investigación: ¿De qué manera influye el uso de GeoGebra sobre el PCM desarrollado por un estudiante de posgrado en educación matemática, con formación en matemáticas aplicadas, al resolver problemas-reto de geometría? Se identificó que el contar con un modelo dinámico ofrece al resolutor la oportunidad de transitar por múltiples ciclos de modelación. Dado que no existen estudios similares, no se puede afirmar que este fenómeno se limite exclusivamente a la implementación de herramientas digitales. Sin embargo, esta observación aporta elementos valiosos que pueden ser considerados en trabajos futuros. Además, en concordancia con Sriraman (2009), se identificó que la interacción social jugó un rol importante en el PCM, aportando recursos para ampliar la exploración del problema e influir en la toma de decisiones del resolutor.

El análisis de las acciones del resolutor con el refinamiento del PCM propuesto, junto con la exploración detallada del problema, permite concluir que la incorporación de un SGD al proceso de resolución de problemas de geometría euclidiana ha potenciado de manera significativa ciertas acciones, como la identificación, representación y transformación de la información, la realización de casos particulares y la búsqueda de patrones. Este potenciamiento se caracteriza por capacidades que solo fueron posibles por las características del SGD. Además, el SGD promovió y guio otras acciones, como la formulación de conjeturas, planteamiento de problemas auxiliares o equivalentes, formalización de la solución y planteamiento de problemas relacionados, mediante la evidencia empírica que proporciona, lo que demuestra cómo la tecnología puede influir directamente en el PCM.

Los resultados de este trabajo contrastan con las concepciones tradicionales de Wallas (1926) y Hadamard (1996) sobre la aparición de ideas cruciales, exclusivamente, de manera inesperada (iluminación). Las observaciones indican que estas ideas también pueden surgir durante sesiones de reflexión consciente o mientras se trabaja activamente en el problema, a menudo vinculadas a información recabada en sesiones anteriores. Este fenómeno sugiere una reconsideración de los conceptos de incubación e iluminación, una perspectiva que restringe los escenarios reconocidos dentro del PCM.

Trabajar en un problema durante días sin avances significativos, podría parecer improductivo. Sin embargo, según Hadamard (1996), durante este tiempo se brinda información al inconsciente. Con esta consideración y la evidencia empírica proponemos el término *Incubación-Iluminación progresiva* para describir el proceso en el que la información obtenida en exploraciones previas, las cuales pueden ocurrir en distintos periodos tiempo, que es relegada al inconsciente y luego se sintetiza o une en ideas que surgen durante procesos reflexivos o de trabajo consciente. Este concepto y el refinamiento de las etapas del PCM son propuestos para ser debatidos y analizados más a fondo, con el objetivo de desarrollar herramientas que faciliten una comprensión más profunda del PCM.

El considerar tanto las ideas que produjeron un avance significativo como las que fracasaron no sólo se pudieron identificar algunos de los procesos mentales involucrados en la obtención de estas ideas, sino además se observó que estas aproximaciones erróneas son importantes en el proceso de solución al generar procesos reflexivos e incitar a abordar el problema desde nuevas perspectivas.

### Agradecimientos

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca CONACYT de Posgrado en México (No. CVU:1270949) brindada durante la realización de este proyecto.

El segundo autor de este trabajo agradece que esta investigación haya sido subvencionada por el Proyecto de Investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

## Referencias bibliográficas

de Vink, I.C., Lazonder, A.W., Willemsen, R.H., Schoevers, E.M. & Kroesbergen, E.H. (2022). The Creative Mathematical Thinking Process. In: Chamberlin, S.A., Liljedahl, P., Savić, M. (eds) *Mathematical Creativity* . Research in Mathematics Education. 147-172. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_11

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens [Inquiry into working methods of mathematicians]. (1902). *L'Enseignement Mathématique, 4*, 208–211.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens: Additions au questionnaire publié en 1902 [Inquiry into working methods of mathematicians: Additions to the questionnaire published in 1902]. (1904). *L'Enseignement Mathématique, 6*, 376–378.

Fehr, H. (1905). *L'enquête de "L'Enseignement Mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens* [*L'Enseignement Mathématique's inquiry into the working methods of mathematicians*]. En A. Krazer (Ed.), *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904* pp. 603–607. B. G. Taubner.

Fehr, H., Flournoy, I., & Claparède, E. (1908). *Enquête de "L'Enseignement Mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens* [*L'Enseignement Mathématique's inquiry into the working methods of mathematicians*]. Georg & Cie.

Hadamard, J., & Johnson-Laird, P. N. (1996). *The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Vol. 109). Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvzsmf1c

Haavold, P., Sriraman, B., & Lee, KH. (2018). Creativity in Mathematics Education. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. 1-10. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_33-7

Joklitschke, J., Rott, B., & Schindler, M. (2022). Notions of creativity in mathematics education research: A systematic literature review. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 1161–1181. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10192-z

Kozlowski, J.S., & Chamberlin, S.A. (2022). Mathematical Creativity Research in the Elementary Grades. In: Chamberlin, S.A., Liljedahl, P., Savić, M. (eds) *Mathematical Creativity*. Research in Mathematics Education. 65-80. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_6

Leikin, R., Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 45, 159–166 . https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1

Lesh, R.A., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37, 457–467. https://doi.org/10.1007/BF02655854

Maillet, E. (1905). Les rêves et l'inspiration mathématiques : (enquête et résultats). *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 7(1), 19-62 . https://www.sudoc.fr/185722296

Pitta-Pantazi, D., Kattou, M., & Christou, C. (2018). Mathematical creativity: Product, person, process and press. In F. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness*, 27-53. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_2

Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157-162. https://doi.org/10.5169/seals-1226

Poincaré, H. (1952). *Science and hypothesis*. Dover Publications.

Polya, G. (1945). *How to solve it; a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *The Phi Delta Kappan, 42*(7), 305–310. http://www.jstor.org/stable/20342603

Santos-Trigo., L. M. (2020). Bitácora digital y oportunidades de aprendizaje. Revista ciencia y cultura,1(1),1-3.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1-2), 279-302

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. In: Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (Eds), *Mathematical Problem Solving*, 63-89. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' Use of Technology Affordances to Contextualize and Dynamically Enrich and Extend Mathematical Problem-Solving Strategies. Mathematics, 9(8), 793. https://doi.org/10.3390/math9080793

Schindler, M., Lilienthal, A.. J. (2020). Students' creative process in mathematics: Insights from eye-tracking-stimulated recall interview on students' work on multiple solution tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 1565–1586. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10033-0

Sriraman, B. The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education* 41, 13–27 (2009). https://doi.org/10.1007/s11858-008-0114-z

Swanborn, P. G. (2010). *Case study research. What? Why? and How?* Sage

Swedberg, R. (2020). Exploratory research. In C. Elman, J. Guerring, & J. Mahoney (Eds.), The production of knowledge. *Enhancing progress in social science* (pp. 17-41). Cambridge University Press.

Wallas, G. (1926). The art of thought. J. Cape: London.