FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Vol. XVI ♦ http://wp.ull.es/fpiem ♦ ISSN: 1695-6613 (p) y 1885-2912 (d)

REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS POR FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA

Aitana Martín Ferraz[1] (amartife@ull.edu.es)
Alexánder Hernández[1] (shernanh@ull.edu.es)
Matías Camacho Machín[1] (mcamacho@ull.edu.es)

[1]Universidad de La Laguna

Resumen

La investigación que se presenta analiza una serie de tareas de formulación de problemas matemáticos realizadas por futuros profesores de secundaria, explorando la relación entre las estrategias utilizadas previamente para resolver problemas con tecnología y las características de los nuevos problemas planteados. Los estudiantes para profesores resolvieron, haciendo uso del Sistema de Geometría Dinámica (SGD) GeoGebra, dos problemas, permitiendo a los participantes durante el proceso de resolución, aproximarse a la solución de manera dinámica, para luego, reflexionar sobre el proceso y formular problemas basados en lo descubierto en estas aproximaciones.

Se trata de analizar de qué manera, el uso de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas matemáticos facilita la capacidad de los futuros docentes para formular problemas y adaptados a contextos educativos. Los resultados obtenidos mostraron que el trabajo de resolución desarrollado con GeoGebra influyó positivamente en las tareas propuestas por los estudiantes.

Martín-Ferraz, A.; Hernández, A. y Camacho-Machín, M. (2024). Reformulación de problemas matemáticos por futuros profesores de secundaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, Vol. XVI. pp 133-162*.

Palabras clave: Resolución de Problemas Matemáticos, Formulación de Problemas, GeoGebra, Formación del Profesorado de Secundaria

Abstract

The research presented analyzes a series of problem-posing tasks carried out by future secondary school teachers, exploring the relationship between the strategies previously used to solve problems with technology and the characteristics of the newly posed problems. The pre-service teachers solved two problems using the Dynamic Geometry System (DGS) GeoGebra, allowing participants to approach the solution dynamically during the resolution process. They then reflected on the process and formulated problems based on the insights gained from these approaches.

The study aims to analyze how the use of technological tools in solving mathematical problems facilitates the ability of future teachers to formulate effective problems adapted to educational contexts. The results showed that the problem-solving work developed with GeoGebra had a positive influence on the tasks proposed by the students.

Keywords: Mathematical Problem Solving, Problem-posing, GeoGebra, Secondary Teacher Education

Introducción

En las últimas décadas, la investigación en la formulación de problemas matemáticos (problem-posing) ha ganado relevancia en el campo de la Didáctica de la Matemática, coincidiendo con la revolución digital de la sociedad. La incorporación de tecnologías digitales ha transformado tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas, lo que ha exigido revisar la formación de los futuros docentes. Hoy en día, no solo es fundamental que los profesores en formación sean capaces de resolver problemas matemáticos utilizando herramientas tecnológicas, sino también que comprendan las posibilidades didácticas que ofrece la formulación de problemas en entornos digitales: plantear, analizar y formular problemas con herramientas digitales enriquece el aprendizaje y fomenta el pensamiento matemático en el aula.

La formulación de problemas, como actividad educativa, no solo implica crear nuevos problemas, sino también modificar problemas existentes para adaptar su complejidad o explorar nuevas perspectivas. Varios autores, como por ejemplo Polya (1945), han señalado la importancia del uso de heurísticas en la resolución de problemas, otros estudios destacan cómo la variación de condiciones en los problemas permite a los estudiantes desarrollar habilidades críticas y creativas (Cai y Rott, 2023). Baumanns (2022), por su parte, ofrece un marco para entender el proceso de formulación de problemas, identificando etapas como la orientación, la conexión, la generación y la reflexión. Además, de investigaciones centradas en el uso de la tecnología (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013), como los sistemas de geometría dinámica (SGD), se puede extrapolar que el uso de herramientas digitales favorece dicho proceso. Esto es debido a que los SGD facilitan la visualización y la manipulación dinámica de conceptos matemáticos, lo que contribuye a una comprensión más profunda y flexible de las matemáticas.

Este trabajo se enfoca en examinar los resultados obtenidos a partir de actividades de creación de problemas matemáticos llevadas a cabo por futuros docentes de secundaria, investigando cómo las estrategias previas, utilizadas para resolver problemas con herramientas tecnológicas, influyen en las características de los nuevos problemas generados. En la primera etapa de la actividad, los participantes utilizan GeoGebra para abordar la solución de manera interactiva y dinámica. Posteriormente, reflexionan sobre el proceso y diseñan nuevos problemas basados en las observaciones realizadas durante la resolución.

El estudio busca responder a una cuestión clave: ¿cómo impacta el uso de herramientas tecnológicas en la capacidad de los futuros profesores para formular problemas adecuados y efectivos en entornos educativos? Este enfoque permitirá avanzar en la comprensión del papel de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y, también, plantear una actualización en la formación del profesorado.

Justificación

La formación de profesorado de matemáticas cubre diferentes ámbitos de especialización. El modelo MTSK (Carrillo et al. 2022) es una adecuada herramienta analítica para estudiar el conocimiento que se moviliza al desarrollar la actividad profesional ligada a la enseñanza de la matemática. Al igual que el modelo planteado por Ball, Thames y Phelps (2008), el MTSK distingue entre dos dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Carrillo et al. (2018) identifican dentro de cada dominio cuatro subdominios y consideran las creencias como elementos que condicionan el conocimiento del profesorado. La formulación y resolución de problemas, como actividad profesional, se sitúa en ambos dominios de conocimiento, en mayor o menor medida, en función de cómo se realice. Un profesor, cuando selecciona o diseña problema para sus estudiantes, debe poner en marcha su conocimiento matemático, conocer la matemática que está presente en esos problemas, la adaptación de este conocimiento al nivel de su alumnado, la adecuación al currículo, las posibles dificultades de los alumnos, la graduación o la importancia de las características de los problemas (contextos, representaciones...), pues todo ello influye en su posterior resolución. Por lo tanto, dicha selección y formulación de problemas es una tarea importante para la formación docente.

Otro elemento importante en conocimiento docente es el uso de la tecnología. Desde el punto de vista de Koehler et al. (2014), es necesario hablar de un dominio de conocimiento tecnológico, lo que genera un marco para conocimiento tecnológico pedagógico y de contenido (TPACK). Este marco describe los tipos de conocimiento necesarios para una integración efectiva de la tecnología en la enseñanza y enfatiza cómo la comprensión del contenido, la pedagogía y la tecnología por parte de los maestros interactúan entre sí para producir una enseñanza efectiva. En el contexto de la formulación de problemas, TPACK permite analizar herramientas digitales para formular y resolver problemas en la perspectiva de la competencia docente. Desde este marco, se considera el abordaje de problemas mediante enfoques tecnológicos innovadores y multidisciplinarios como elemento de integración de TPACK en la formación docente, apostando por que los futuros profesores estén mejor preparados para utilizar tecnología en la enseñanza. Con esto se consigue mejorar sus habilidades para formular y resolver problemas matemáticos de manera efectiva.

En la formación de docentes de matemáticas, es fundamental desarrollar no solo las habilidades mencionadas, sino también otras competencias clave, como la capacidad de integrar conocimientos teóricos y prácticos, y la adaptación a contextos diversos. Por ello, es necesario implementar actividades formativas que promuevan el desarrollo conjunto de estas competencias, permitiendo que se refuercen mutuamente. Esta integración favorecerá una preparación más completa, en la que el conocimiento matemático, didáctico y tecnológico se complementen de manera efectiva para enfrentar los desafíos actuales en la enseñanza de las matemáticas.

Objetivo de investigación

En esta investigación se explora cómo las características de los problemas matemáticos formulados por futuros docentes se relacionan con los problemas resueltos anteriormente, evaluando la influencia del uso de GeoGebra en la resolución de problemas planteados. Para alcanzar este objetivo, ponemos el foco del análisis en:

1. Analizar el uso de herramientas de construcción de GeoGebra en la aproximación dinámica durante la resolución de problemas.
2. Examinar las características de los problemas formulados tras la resolución de los problemas propuestos.
3. Identificar relaciones entre la manera en que los futuros docentes resuelven problemas y las características de los problemas formulados.

Marco Conceptual

Según diversos estudios en Didáctica de la Matemática, la formulación de problemas es una actividad fundamental que promueve tanto la comprensión profunda de los conceptos como el desarrollo de habilidades creativas y de resolución de problemas (Hernández et al., 2023; Cai & Rott, 2023). Esta práctica puede ser aplicada en diferentes momentos del proceso de aprendizaje, ya sea antes, durante o después de la resolución de un problema, e implica la creación de nuevos problemas o la modificación de problemas existentes (Baumanns, 2022). Se define como el proceso mediante el cual los estudiantes, a partir de su experiencia matemática, construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos. Esta actividad no solo desarrolla competencias matemáticas específicas, sino que también contribuye a la competencia matemática general del individuo, fomentando habilidades como la identificación, formulación, especificación y resolución de problemas (Hernández, Perdomo-Díaz, Camacho-Machín, 2023).

La formulación de problemas es una habilidad que permite, no solo resolver problemas existentes planteando casos más simples, sino también crear nuevos problemas a partir de situaciones dadas. Esta habilidad es fundamental para desarrollar un pensamiento crítico y creativo en los estudiantes (Cai y Rott, 2023). También está estrechamente relacionada con la capacidad de los estudiantes para comprender y aplicar conceptos matemáticos en contextos variados, lo que es esencial para su éxito académico y profesional.

El estudio de la formulación de problemas ha sido un tema de interés creciente en la investigación educativa, que busca consensos para hablar de un proceso general de resolución. Baumanns y Rott (2021) presentan un modelo de proceso de formulación de problemas para entender cómo los estudiantes y docentes abordan la formulación de problemas matemáticos, proporcionando una estructura para analizar y mejorar estas prácticas. Además, Baumanns (2022, p.36) señala diferentes objetivos que pretende alcanzar quien formula problemas, agrupándolos como: generación de problemas originales que no hayan sido previamente formulados, transformación de un problema existente para facilitar su resolución, modificación de condiciones para explorar otras dimensiones de un problema y diseño de tareas para otros.

Una forma de conectar la resolución y la formulación de problemas es a través de la generalización. Esto implica identificar patrones o propiedades comunes en problemas específicos y extender estas observaciones a casos más amplios (Baumanns 2022, p.21). Este camino de formulación ha sido explorado anteriormente, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) presentan un acercamiento a la resolución de problemas siguiendo distintas aproximaciones (numérica, algebraica, etc.) haciendo uso del sistema de geometría dinámica, GeoGebra. Las aproximaciones dinámicas permiten identificar patrones y propiedades invariantes en las construcciones realizadas para explorar los problemas. Además, estas propiedades permiten extender los problemas a casos más generales. Ya sea en la formulación o en la resolución de problemas, el proceso de generalización permite a los estudiantes aplicar conocimientos aprendidos en contextos específicos a una variedad más amplia de situaciones. Así, los participantes consolidan su entendimiento y fomentan el pensamiento matemático. Por ejemplo, aprender a resolver un problema sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo puede llevar a generalizar este conocimiento para cualquier polígono.

Otra vía para reformular problemas es la abstracción, es decir, eliminar detalles específicos de un problema para enfocarse en sus características esenciales y generales, lo que implica crear modelos matemáticos que representen la estructura subyacente del problema (Baumanns, 2022). La capacidad de abstraer permite a los estudiantes manejar problemas complejos reconociendo patrones y aplicando principios generales. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) proponen abordar la resolución de problemas mediante una aproximación algebraica que permita formalizar las conjeturas planteadas, abstrayendo las ideas fundamentales para realizar una demostración formal con rigor matemático.

Para ilustrar estos conceptos, Baumanns (2022, p.21) utiliza un ejemplo práctico: la construcción de cuadrados sobre los lados de un paralelogramo y la construcción del cuadrilátero de vértices los centros de estos cuadrados (Fig. 1). Este problema puede generalizarse explorando qué sucede si se construyen cuadrados en los lados de otros polígonos, tales como triángulos o hexágonos, buscando con ello identificar patrones y propiedades que se mantienen constantes a través de diferentes figuras. Además, al abstraer este problema, los estudiantes pueden usar variables para representar las longitudes de los lados y las posiciones de los vértices, y utilizar ecuaciones para describir las relaciones entre estas variables, facilitando así un análisis más general del uso de métodos algebraicos y geométricos avanzados.

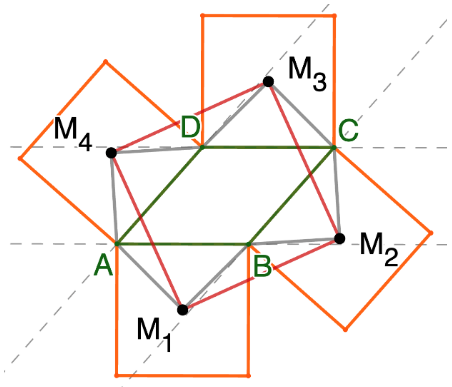

Figura 1. Problema que involucra el proceso de generalización (Baumanns, 2022, p.22).

Por otro lado, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) resuelven un problema en el que deben encontrar el paralelogramo de mayor área inscrito dentro de un triángulo dado y donde uno de sus vértices coincide con uno del triángulo (Fig. 2). Durante el proceso, analizan regularidades y plantean una extensión en la que el paralelogramo tiene dos vértices sobre un lado del triángulo. Además, realizan un proceso de abstracción cuando hacen una aproximación algebraica y gráfica dando con la función que representa el área dependiendo de la longitud de un lado del paralelogramo.

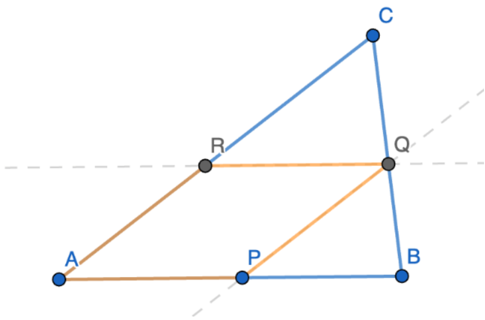

Figura 2. Problema que involucra el proceso de generalización (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013).

Cai y Rott (2023) destacan la importancia de las estrategias heurísticas en la formulación de problemas y cómo estas pueden influir en la calidad de los problemas generados. En su revisión de la literatura, identifican varias estrategias que los estudiantes y docentes pueden utilizar, como el uso de variaciones "*what if not*" y la incorporación de contextos reales para hacer los problemas más relevantes y atractivos para los estudiantes. Estas estrategias fomentan una práctica efectiva de formulación de problemas. Heurísticas, como la variación de condiciones y la exploración de diferentes enfoques para resolver un problema, ayudan a los estudiantes a adquirir una comprensión más matizada de los conceptos matemáticos y a desarrollar habilidades críticas en su proceso de pensamiento.

El uso de GeoGebra en la formulación de problemas facilita la realización de ensayos, conjeturas y generalizaciones, elementos clave en la exploración matemática. Además, permite a los estudiantes visualizar y manipular objetos matemáticos de manera dinámica, lo que enriquece su capacidad para generar nuevos problemas a partir de observaciones y manipulaciones realizadas durante el proceso de resolución (Hernández, Perdomo-Díaz, Camacho-Machín, 2023).

Este marco conceptual nos permite explorar la influencia del uso de GeoGebra en la resolución de problemas y en las características de los problemas planteados posteriormente. Asimismo, los aspectos teóricos y empíricos definidos favorecen que podamos establecer conexiones entre las estrategias de resolución empleadas por los futuros docentes y las características de los problemas que reformulan.

Metodología

Esta investigación se engloba dentro de una intervención docente diseñada para realizar una actividad de resolución y formulación de problemas matemáticos con tecnología. Se llevó a cabo en el curso 2022-2023 del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de La Laguna.

Participantes

Los participantes fueron 15 estudiantes titulados en el Grado en Matemáticas, por lo que, el presentaban un profundo conocimiento teórico y práctico en diversas áreas de las matemáticas y considerables habilidades en el manejo de herramientas digitales, destacando especialmente GeoGebra.

La clase se dividió en siete equipos de dos estudiantes (excepto un equipo de tres). En este trabajo nos referiremos a ellos de forma anónima de la siguiente manera: Equipo 1, Equipo 2 (trío), Equipo 3, Equipo 4, Equipo 5, Equipo 6 y Equipo 7.

Además, se debe tener en cuenta que, en este contexto del máster, los estudiantes acostumbraban a participar en actividades y proyectos que simulaban situaciones de aula.

Tarea de formulación

Se plantearon dos problemas específicos relacionados con conceptos geométricos. Se pidió a los participantes que resolvieran los problemas utilizando diferentes aproximaciones, incluyendo una aproximación dinámica usando GeoGebra (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013). Debían proponer situaciones de aula donde se pudieran implementar los problemas ya resueltos. Se pidió además que presentaran problemas que reformularan los originales y resolver las propuestas. En la tabla 1, se expone el enunciado de la tarea en los mismos términos en que fue presentado a los estudiantes.

Tabla 1. Enunciado de la Tarea.

En esta tarea se van a resolver dos problemas en los cuales se va a trabajar la formulación y resolución de problemas de matemáticas mediante la utilización de GeoGebra. Para ello, se han seguido las siguientes indicaciones para el trabajo de estos problemas:

1. Aproximación dinámica utilizando GeoGebra.
2. Aproximación numérica.
3. Aproximación algebraica.
4. Comprobación de los resultados. Algunas extensiones.
5. Ruta potencial de implementación en el aula.
6. **Formular dos problemas** por cada uno de los resueltos por tu grupo (esbozando su posible solución).
7. Indicar en qué se han basado para **formular** cada uno de esos problemas.

Se pueden distinguir varias Actividades a realizar:

i. Aproximación Dinámica (y algebraica en su caso) con GeoGebra. Se pide que representen los datos y relaciones de cada problema en una construcción de GeoGebra. Luego se deben añadir otros objetos matemáticos que permitan explorar el problema para encontrar la solución o descubrir propiedades que nos lleven a ella. Las variadas herramientas de construcción de GeoGebra, la oportunidad que ofrece para cuantificar magnitudes y la interactividad permiten explorar visualmente las propiedades geométricas de los objetos matemáticos presentes en el problema. Al manipular y observar los cambios en tiempo real se produce una comprensión del problema, se conjeturan propiedades y se encuentran caminos a la solución. A la vez, en todo el proceso van apareciendo nuevas preguntas relacionadas con el problema inicial.

ii. Comprobación de los resultados. Algunas extensiones. Se trata de que, después de obtener soluciones, se verifique su exactitud y se exploren posibles extensiones del problema. Este proceso de verificación y generalización ayuda a idear nuevas vías de investigación dentro del mismo problema.

iii. Ruta potencial de implementación en el aula: Este paso implica una tarea relacionada con el conocimiento didáctico del contenido. Hay que reflexionar sobre en qué momento se puede abordar el problema, qué deben saber los estudiantes de secundaria, qué se desea enseñar y cómo hacerlo de una manera secuenciada.

iv. Formulación de nuevos problemas. Los estudiantes deben evidenciar la capacidad de adaptar problemas a diferentes contextos, a proponer problemas similares más simples y a ajustar el nivel de dificultad.

v. Justificación de las reformulaciones. Finalmente, para ayudar al análisis de las propuestas, los estudiantes deben justificar las modificaciones realizadas o la generación de nuevos problemas. En la investigación, esto permitirá comprobar si los cambios introducidos son deliberados o están fundamentados en principios matemáticos.

Problemas

La Tarea pedía trabajar con dos problemas seleccionados para la investigación: uno con la construcción de un cuadrado a partir de unas condiciones dadas y otro con un triángulo inscrito en una circunferencia de área máxima cuando dos de sus vértices se mueven en la circunferencia que los contiene. Los pasos de solución y la resolución de ambos problemas han sido objeto de análisis en otros trabajos. (Reyes-Rodríguez, Santos-Trigo, Barrera-Mora, 2017) y (Hernández, Perdomo-Díaz, Camacho-Machín, 2023) analizan el problema 1 y (Santos-Trigo, Camacho-Machín, Barrera-Mora, 2024) utilizan el problema 2 para ejemplificar un enfoque de enseñanza para el Cálculo. A continuación, se detallan las ideas generales para su resolución.

Problema 1

“Encontrar diferentes formas de construir un cuadrado del que se conoce uno de sus vértices (P) y el punto medio (M) de uno de los lados del extremo P. Construirlo si el punto M es un punto medio de uno de los lados opuestos al punto P.”

La dificultad en su resolución radica en identificar diferentes métodos para construir el cuadrado con estas condiciones. Este tipo de problema es ideal para aplicar conocimientos de geometría euclidiana y para explorar múltiples estrategias de construcción geométrica.

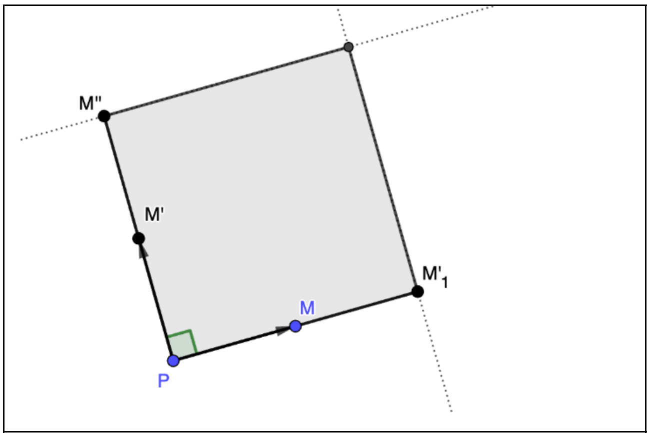

Figura 3. Construcción del Equipo 2 para la primera parte

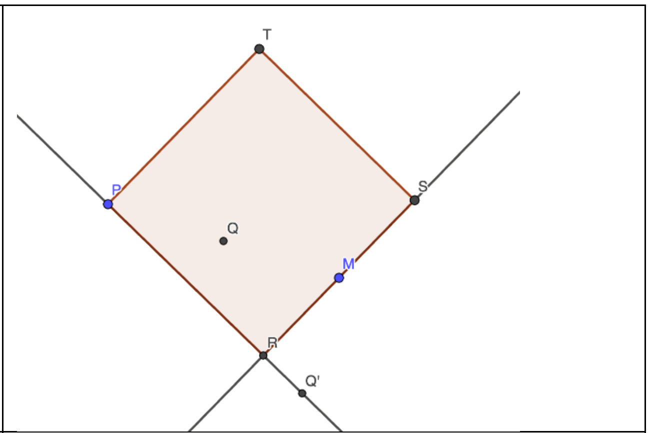

Figura 4. Construcción *del Equipo 3 para la segunda parte.*

- Punto P: Es uno de los vértices del cuadrado, y su ubicación está definida.
- Punto M: Es el punto medio de uno de los lados del cuadrado. En la primera parte del enunciado está en uno de los lados de extremo P y en el siguiente apartado está en uno de los lados opuesto al punto P.

Suponiendo el problema resuelto y partiendo de la construcción de un cuadrado que incluya sus puntos medios, se puede utilizar GeoGebra para su exploración. Esto genera un proceso que necesita reconocer los diferentes ejes de simetría de un cuadrado, encontrar propiedades no usadas habitualmente y usar técnicas de construcción dinámica que permitan trasladar dichas propiedades a una nueva construcción (Véase las Figuras 3 y 4).

Problema 2

"Dada una circunferencia de radio R con centro en el origen de coordenadas, desde un punto exterior P situado sobre el eje de abscisas y exterior a la circunferencia se trazan las rectas tangentes a la misma. Determinar las coordenadas del punto P, de modo que el triángulo formado por los puntos de tangencia y el origen de coordenadas tenga área máxima."

En la figura 5 se observa la construcción realizada por uno de los equipos, en la que añaden el lugar geométrico que describe la función área del triángulo.

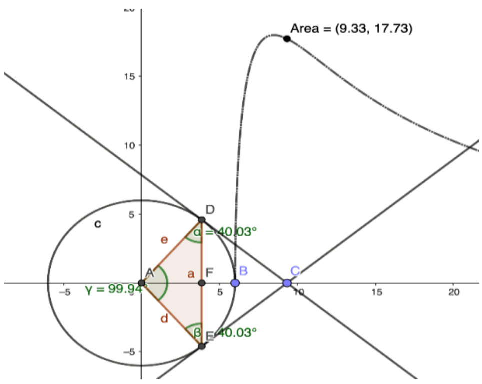

Figura 5. Construcción realizada por el Equipo 1.

Los estudiantes deben aplicar sus conocimientos de geometría analítica para encontrar las coordenadas del punto P que maximicen el área del triángulo. En esta construcción, GeoGebra permite arrastrar el punto P sobre la semirrecta, observando cómo afectan los cambios en la configuración del triángulo, proporcionando un enfoque interactivo que debe llevar a la discusión de su(s) solución(es). Para luego, con la ayuda de herramientas como *Lugar Geométrico*, visualizar la función área (Ver Ejemplo en Fig. 5).

La investigación

La investigación se desarrolló en tres fases, con el propósito de asegurar una recolección de datos adecuada para el análisis.

La primera fase del estudio consistió en la recopilación de datos durante el transcurso de la intervención compuesta por cuatro sesiones de dos horas cada una. Se entregó a los participantes, la tarea con el enunciado de los dos problemas. Posteriormente al trabajo de aula, los equipos entregaron un informe y los archivos de GeoGebra con las construcciones dinámicas realizadas.

La segunda fase consistió en una revisión detallada los materiales entregados por los equipos. En primer lugar, se realizó un análisis minucioso de cada aproximación dinámica, con el fin de familiarizarse con las estrategias utilizadas y las herramientas de construcción adoptadas por cada equipo. Este análisis permitió identificar patrones comunes en las estrategias de construcción de los diferentes equipos, para señalar como característica las herramientas clave de su construcción: *Simetría Central*, *Rotación*, *Traslación*, Circunferencia e *Intersección*, Construcción de Rectas y *Simetría Axial*. Posteriormente se describirán en detalle.

Posteriormente se revisaron los problemas formulados por los equipos y sus resoluciones. Esta exploración detallada remarcó tres descriptores destacables que se detallarán en los siguientes apartados: el uso de un contexto realista o no, la adición de cambios matemáticos y la inclusión de datos numéricos. Para poder centrar el análisis en las actividades propuestas a los estudiantes, se decidió generar una versión simple de cada propuesta donde se pueden observar los cambios realizados en los términos que se acaban de indicar. En este artículo las denotamos por RPm_i-n, donde m indica el problema, i el equipo y n el número de la propuesta.

Finalmente, se procedió a la caracterización de las resoluciones presentadas y los problemas propuestos por los equipos participantes.

Características de las aproximaciones dinámicas para el problema 1

Analizando las propuestas de resolución de cada equipo se observa que, en general, utilizan estrategias similares para hacerlo, empleando las siguientes herramientas de construcción:

- *Simetría central*. Se apoyaron en dos puntos iniciales para construir un tercero simétrico al primero respecto del segundo. Por ejemplo, en el primer apartado, se calculaba un punto simétrico al vértice conocido utilizando el punto medio de un lado contiguo como referencia.
- *Rotación*. Utilizaron giros para obtener nuevos puntos a partir de los conocidos. Por ejemplo, en el primer apartado, un punto era rotado 90 grados respecto al vértice conocido para determinar la posición de un nuevo vértice del cuadrado.
- *Traslación*. Aplicaron traslaciones para encontrar nuevos vértices. Por ejemplo, en el segundo apartado, construían el vector desde un vértice conocido hasta el punto medio del mismo lado, para luego obtener un nuevo vértice trasladando el punto medio con dicho vector.
- *Circunferencia e Intersección*. Construyeron circunferencias y sus intersecciones con otros elementos para determinar nuevos puntos. Por ejemplo, en el primer apartado, se traza una circunferencia con centro uno de los vértices y radio el lado del cuadrado para conseguir un nuevo vértice como intersección de la circunferencia y una recta perpendicular al lado conocido.

- *Rectas y Simetrías axiales*. Combinaron simetrías axiales y rectas paralelas para conseguir los vértices del cuadrado. Por ejemplo, en el primer apartado, tras calcular un vértice simétrico a otro respecto al punto medio de un lado, se trazaban rectas paralelas o perpendiculares a los lados conocidos del cuadrado para determinar los vértices restantes y completar la figura.

Características de las aproximaciones dinámicas para el problema 2

En este segundo problema, la aproximación dinámica fue muy parecida para todos los equipos. La utilización de la herramienta *Lugar geométrico* fue común en todos los equipos. Por lo tanto, las herramientas empleadas por los equipos en la resolución de este problema fueron:

- *Valor*. Una vez construido el triángulo, se puede visualizar el valor del área en sus propiedades. Algunos equipos visualizaron el valor del área y movían el punto sobre el eje para encontrar el triángulo de área máxima.
- *Rastro*. Activando el rastro de un objeto al arrastrarlo deja una huella de los lugares que ocupa durante su movimiento. Los equipos construyen el punto $A = (x(P), t_1)$, siendo t_1 área del triángulo. De esta manera, su abscisa coincide con la primera coordenada de P, y su ordenada es el área del triángulo. Al arrastrar P, queda registrado en la pantalla la trayectoria de A y se visualiza donde se alcanza el área máxima.
- *Lugar Geométrico*. Esta herramienta representa el conjunto de puntos en el plano que verifican una condición. En este caso, se utiliza para registrar el lugar geométrico del punto A respecto al conjunto de posiciones que puede ocupar el punto P.

Características de los problemas formulados

Teniendo en cuenta las características de las propuestas de ambos problemas por parte de los equipos, se ha optado por agruparlos en torno a tres indicadores: contexto, cambios matemáticos y datos nuevos.

- *Contexto* (C). Se introducen nuevos escenarios o situaciones para los problemas originales, haciendo que sean más familiares y relevantes para los estudiantes de secundaria. Por ejemplo, en una de las reformulaciones, del equipo 3 para el problema 1, se planteó un escenario donde los estudiantes deben calcular las dimensiones de una cancha de baloncesto, utilizando los puntos de las esquinas de la cancha como referencia para construir un cuadrado.

- *Cambios matemáticos* (CM). Se modifica la estructura original del problema, cambiando condiciones iniciales o relaciones geométricas para aportar una nueva perspectiva matemática. Por ejemplo, en una de las reformulaciones, del equipo 4 para el problema 2, se pide calcular el área máxima de un cuadrilátero formado por los puntos de tangencia sobre la circunferencia y las rectas que pasan por dos puntos situados en el eje de abscisas, uno en el lado positivo y otro en el negativo, externos a la circunferencia centrada en el origen.
- *Datos nuevos* (DN). Se incluyen nuevos parámetros y datos numéricos. Por ejemplo, en una de las reformulaciones, del equipo 1 para el problema 1, se pide construir el cuadrado mediante un triángulo cuyos vértices son dos esquinas contiguas del cuadrado, y el punto medio del lado contrario a estos. Como dato nuevo, se da que el ángulo formado en el vértice que se encuentra en el punto medio es de 53,1302º aproximadamente.

Resultados

En esta sección, se presentan las soluciones a los dos problemas planteados y los problemas propuestos formulados por los siete equipos participantes. Se comentarán brevemente los procesos de resolución y se describirán los problemas planteados por los equipos. En el problema 2, las soluciones presentadas siguen de manera cercana las indicaciones proporcionadas a los participantes durante las sesiones. Por lo tanto, en este apartado se omitirán comentarios sobre dichas soluciones y se procederá a exponer únicamente los nuevos problemas que elaboraron los siete equipos participantes.

En lo que respecta a la formulación de nuevos problemas, todas las propuestas presentadas por los estudiantes se incluyen, sin importar si son o resolubles, su viabilidad o la coherencia. Para ello, tuvimos en cuenta el enunciado propuesto, tal como fue formulado, las resoluciones de los estudiantes para sus propios problemas y los comentarios realizados (cuando habían). En análisis se realiza por equipos.

Equipo 1

Cuando este equipo resuelve el problema 1, realiza tres aproximaciones para el primer apartado y una única propuesta para el segundo. En la primera aproximación, utilizan *Simetrías* de puntos y *Giros* para llegar al cuadrado; en la segunda, se opta por una *Traslación* del vértice conocido para obtener el segundo, y utilizan rotaciones para conseguir el resto de los vértices. En la tercera, optan por la construir circunferencias e intersecarlas con rectas trazadas desde los puntos dados. En cuanto al segundo apartado, comienzan trazando el *Punto Medio* de los dos puntos conocidos y haciendo una *Rotación* de 90º del mismo con respecto al punto M (punto medio de uno de los lados opuestos al punto P), se dan cuenta de que han conseguido un punto que está en la recta donde se encuentra P y uno de los vértices no conocidos. Trazan una recta que pasa por el vértice P y por este nuevo punto, luego construyen una recta que sea perpendicular a esta y que pase por M y, con la *Intersección* entre ambas rectas consiguen un vértice del cuadrado. Ya con los dos vértices consecutivos construyen el cuadrado haciendo uso de *Simetría* y rectas paralelas.

En definitiva, el equipo 1 explora distintas aproximaciones en ambos apartados utilizando las herramientas de rectas paralelas, perpendiculares, *Punto Medio* y *Rotación*. Después de esta experiencia, enuncian 5 propuestas de reformulación para el problema 1. Hay que señalar que este equipo plantea los problemas pensando en que deben ser resueltos por estudiantes de secundaria. Cuatro de las cinco propuestas están contextualizadas, además, son una secuencia de tareas que busca que se utilicen en GeoGebra las herramientas de *Rotación*, *Traslación*, *Punto Medio*, *Simetría Axial*. Una síntesis de sus propuestas es la siguiente:

- $RP1_1$-1 (CM): construir un rectángulo que tiene doble de largo que de ancho.
- $RP1_1$-2 (C-CM): construir un cuadrado conocidos dos vértices opuestos. Contexto: Arquitecto diseñando una plaza pública.

- RP1$_1$-3 (C-CM): representar tres cuadrados conociendo dos puntos medios de dos lados sin saber si son contiguos u opuestos. Contexto: Un joven príncipe decide construir un jardín para impresionar a la princesa.
- RP1$_1$-4 (DN): construir un cuadrado dado un vértice (A), el punto medio opuesto (M) y sabiendo que el ángulo que forman A y el vértice contiguo desde M es de 53.1301º.
- RP1$_1$-5 (C-CM): construir un cuadrado conociendo un vértice y los puntos medios de los lados opuestos al vértice dado. Contexto: Un ingeniero aeroespacial diseña la forma de los paneles solares para un nuevo tipo de satélite.

Para el problema 2, el Equipo 1, plantea dos propuestas, añadiendo contexto en una de ellas y proporcionando datos nuevos en la otra.

- RP2$_1$-1 (C-DN): encontrar el triángulo de área mínima dentro de la familia de triángulos que tienen vértices $O = (0,0)$, un vértice en el eje X (A) y un vértice en el eje Y (B) de forma que el segmento AB pasa por $(1,2)$. Contexto: Un fabricante de juguetes diseña un nuevo modelo de avión de juguete.
- RP2$_1$-2 (CM): encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en el triángulo de vértices $A = (0,8),\ B = (11,0),\ O = (0,0)$, de forma que uno de sus lados esté sobre AB.

Equipo 2

Al abordar el problema 1, este equipo ofrece una aproximación para cada apartado. En la resolución del primer apartado, el equipo utiliza rotaciones y traslaciones geométricas. Comienzan construyendo dos puntos arbitrarios P y M, y generan un tercer punto mediante una *Rotación* de 90º de M alrededor de P. Luego, se aplican traslaciones de vectores y construyen los segmentos y rectas necesarias para determinar los vértices restantes del cuadrado.

Para el segundo apartado, el equipo emplea circunferencias y rectas tangentes. Después de establecer los puntos P y M y su punto medio A, trazan circunferencias y rectas tangentes para determinar las intersecciones clave que le permiten construir el cuadrado.

Este equipo ha diseñado problemas que abordan directamente las construcciones geométricas con regla y compás, así como la aplicación de teoremas clásicos. Sus propuestas son:

- $RP1_2$- 1 (CM): construir un triángulo rectángulo partiendo de la hipotenusa, donde el cateto mayor es el doble del cateto menor.
- $RP1_2$- 2 (CM): construir un hexágono regular mediante el uso de regla y compás partiendo inicialmente de dos puntos medios consecutivos.

Para el problema 2, el Equipo 2, plantea dos propuestas donde cambian la figura geométrica por un trapecio y un hexágono.

- $RP2_2$-1 (CM): determinar las coordenadas de un punto sobre el eje X y exterior a una circunferencia centrada en el origen, para formar un trapecio de área máxima con vértices: los puntos de tangencia de las rectas tangentes del punto a la circunferencia y los puntos de corte de la circunferencia con el eje Y.
- $RP2_2$-2 (CM): construir un hexágono de área máxima inscrito en una circunferencia dada.

Equipo 3

Para el problema 1, presentan seis aproximaciones dinámicas, tres para cada apartado. Para el primer apartado, plantean primero un camino con herramientas básicas para trazar el cuadrado. Usan *Punto*, *Recta*, *Circunferencia* y *Recta Perpendicular*. En los otros dos caminos, introducen herramientas como *Polígono Regular* y *Simetría Central* para simplificar pasos.

En el otro apartado, se tratan tres ideas que descubren tras explorar invariantes de un cuadrado cualquiera. La primera es apoyándose en que el ángulo entre un lado y el segmento PM es arcotangente (1/2). Luego, utilizan este ángulo para encontrar dos vértices, a partir de los cuales se completa el cuadrado. En la segunda aproximación, utilizan intersecciones de circunferencias y puntos medios, trazando rectas necesarias para determinar los vértices del cuadrado. En la tercera solución, aplican giros de 90º y simetrías para encontrar los vértices, mostrando un uso avanzado de las transformaciones geométricas en GeoGebra.

El Equipo 3 plantea cuatro propuestas que incluyen contexto y datos nuevos. Al plantearlas, el equipo ha enfocado los problemas para que sean resueltos por estudiantes de secundaria.

- $RP1_3$-1 (C-DN): calcular los metros necesarios de valla para bordear un terreno cuadrado cuya distancia de uno de sus vértices al punto medio de uno de los lados es de 8 metros.
- $RP1_3$-2 (C-DN): calcular la distancia a la que se encuentra cada uno de los amigos situados en las esquinas de un cuadrado, de área 144 m², desde un quinto amigo situado en el punto medio de uno de los lados.
- $RP1_3$-3 (C-DN): calcular el costo de pintar una pared cuadrada de 16 m² con una estantería triangular fijada desde la esquina superior izquierda hasta el punto medio del suelo, dado que la pintura cuesta 1,50 euros por metro cuadrado.
- $RP1_3$-4 (C-DN): determinar las dimensiones de un rectángulo para que su área sea máxima, dado un vértice y sabiendo que la distancia al punto medio del lado opuesto es de 5 metros.

Para el problema 2, el Equipo 3, plantea dos propuestas contextualizadas para el alumnado de secundaria.

- $RP2_3$-1 (C-DN): es similar al problema original, indicando que la circunferencia es de radio 4km, que el punto P está en $(4\sqrt{2}, 0)$ y pregunta por la distancia de P hasta el punto donde sea máxima el área del triángulo.

- $RP2_3$-2 (C-DN): calcular el área del deltoide de la imagen (Figura 6) y sabiendo que la distancia CO es de 20 m, la distancia CF es la mitad de la altura del triángulo CEF y el triángulo COF tiene 12m^2 de área.

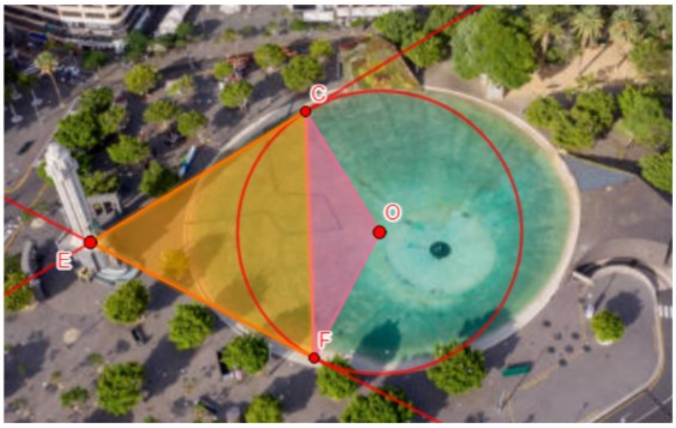

Figura 6. Equipo 3 - RS2.

Equipo 4

Primeramente, abordan el problema 1, comenzando por el primer apartado. El equipo utiliza la *Simetría Central* para reflejar el punto P a través de M hallando P', luego traza circunferencias y rectas perpendiculares para encontrar los otros vértices. Para la segunda aproximación, rotan el punto P' alrededor de P y luego aplican rotaciones encadenadas para encontrar los vértices del cuadrado. En la tercera, el equipo utiliza las mismas ideas, pero con herramientas más básicas, excluyendo la *Rotación* y la *Simetría Central*.

En el segundo apartado, estudian un cuadrado genérico calculan los ángulos MPA y MPM' (siendo A un vértice contiguo a P y M' el otro punto medio opuesto). Con esta información rotan los puntos M y M' para determinar un punto medio contiguo a P y luego realizar los pasos del apartado anterior. También hacen otra aproximación, sin justificarla, que nace de la exploración libre y se apoya en la mediatriz de PM, cuatro circunferencias auxiliares y las rotaciones de los puntos de corte entre los elementos.

Las reformulaciones del problema 1 del Equipo 4 han sido seis en total que integran conceptos de trigonometría y análisis de propiedades geométricas, tres de ellas se podrían considerar apartados de un mismo problema (RS3, RS4 y RS5). Los problemas se distinguen por la contextualización aportada como diseñados para estudiantes de secundaria.

- RP1$_4$-1 (C): Mismo problema, con un contexto de reforestación de pinos (Fig. 7).

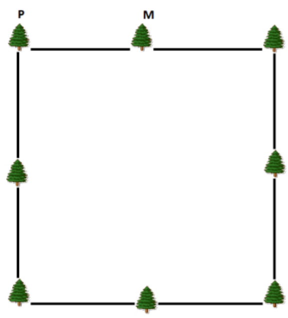

Figura 7. Equipo 4 - RS1.

- RP1$_4$-2 (C): Igual que la anterior, pero el segundo pino conocido, M, está al lado opuesto.
- RP1$_4$-3 (CM): construir un triángulo rectángulo isósceles del que se conoce uno de sus vértices (P) y el punto medio (M) de uno de los catetos.

- $RP1_4$-4 (CM): construir un triángulo rectángulo isósceles si el punto M está sobre la hipotenusa y P es el vértice opuesto a esta.
- $RP1_4$-5 (CM): construir un triángulo rectángulo isósceles si el punto M está sobre la hipotenusa y P es un vértice no opuesto a esta.
- $RP1_4$-6 (DN): construir un cuadrado del que se conocen dos vértices (P y Q) que no son adyacentes y el punto medio (M) de uno de los lados del extremo el vértice P. Se pide además construirlo si M es un punto de uno de los lados opuestos al punto P.

Para el problema 2, el Equipo 4, plantea dos propuestas añadiendo el lado negativo del eje de abscisas.

- $RP2_4$-1 (CM): determinar las coordenadas de un punto situado sobre el eje de abscisas y exterior a la circunferencia de modo que el triángulo formado por los puntos de tangencia y la intersección de la circunferencia con el eje de abscisas negativas tenga área máxima.
- $RP2_4$-2 (CM): determinar las coordenadas de dos puntos situados en el eje de abscisas y externos a la circunferencia de modo que el cuadrilátero formado por los puntos de tangencia tenga área máxima.

Equipo 5

El Equipo 5, al abordar el problema 1, presenta dos soluciones para cada apartado del problema, utilizando GeoGebra y métodos algebraicos. Para el primer apartado, emplean circunferencias y rectas para encontrar los vértices del cuadrado a partir de un punto P y el punto medio M de un lado. Y también usan la *Simetría Central* para reflejar P a través de M, obteniendo el vértice opuesto y completando el cuadrado con la herramienta de *Polígono Regular*.

En el segundo apartado, el equipo utiliza puntos medios y rotaciones para encontrar los vértices del cuadrado. En la segunda solución emplea simetrías y rectas perpendiculares, comenzando también con el punto medio de PM y usando rotaciones para completar la figura.

El Equipo 5 ha realizado nueve reformulaciones del problema 1, enfocándose en problemas prácticos y contextualizados para estudiantes de secundaria.

- $RP1_5$-1 (C): construir las dimensiones de una cancha cuadrada delimitada por una canasta y el cono colocado por la profesora.
- $RP1_5$-2 (CM): construir un cuadrado del que se conocen dos vértices opuestos P y Q.
- $RP1_5$-3 (C-CM): un arquitecto contratado por el ayuntamiento de La Laguna debe construir un cuadrado donde se construirá una biblioteca teniendo en cuenta los cimientos ya construidos que marcan las esquinas opuestas de la edificación.
- $RP1_5$-4 (CM): construir un cuadrado del que se conocen dos puntos medios de lados opuestos M y M'.
- $RP1_5$-5 (C-CM): dimensiones de la fotografía cuadrada que debe tener para que se pueda colocar en un marco conociendo únicamente los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrado deseado.
- $RP1_5$-6 (CM): construir un triángulo rectángulo del que se conocen los dos vértices que determinan el lado de la hipotenusa
- $RP1_5$-7 (C-CM): hallar el punto que aumente las posibilidades de pesca conociendo dos lugares en orillas opuestas del río, P y Q, que forman un ángulo recto con respecto al río donde se quiere pescar.
- $RP1_5$-8 (CM): construir un cuadrado del que se conocen dos puntos medios de lados opuestos M y M'.
- $RP1_5$-9 (C-CM): construir un cuadrado en Minecraft sabiendo que hay dos puertas enfrentadas que corresponde al punto medio de cada pared opuesta.

Para el problema 2, el Equipo 5, plantea tres propuestas entre las que añaden triángulos y circunferencias.

- $RP2_5$-1 (CM): determinar las coordenadas del punto externo a la circunferencia sobre el eje de abscisas de modo que el triángulo formado por los puntos de tangencia y el origen de coordenadas sea equilátero.

- RP2$_5$-2 (CM): determinar las coordenadas del punto externo a la circunferencia y situado sobre el eje de abscisas, de modo que se pueda construir un cuadrado circunscrito en la circunferencia, tomando como vértices los puntos de tangencia. Aquí no sé si poner la pregunta que añaden al final y luego otro problema reformulado con la imagen del reloj de la facultad.
- RP2$_5$-3 (C-CM): se añade contexto a la propuesta anterior con el reloj de la fachada de la facultad de matemáticas de la Universidad de La Laguna, que se trata de una circunferencia dentro de un cuadrado.

Equipo 6

El Equipo 6 propone dos soluciones para la primera parte del problema 1 y una para la segunda. En la primera solución, usan simetrías y rotaciones para encontrar los vértices del cuadrado a partir del punto P y el punto medio M. Reflejan P a través de M y luego aplican rotaciones para hallar los otros vértices. En la segunda solución, emplean circunferencias y rectas perpendiculares, trazando una circunferencia centrada en M y que pasa por P, y utilizando las intersecciones para determinar los vértices restantes.

En cuanto a la segunda parte del problema, el equipo realiza una aproximación utilizando cálculos de ángulos. Representan el punto medio entre P y M, y calculan los ángulos necesarios para rotar este punto alrededor de P. Luego, trazan las rectas necesarias y utilizan simetrías y rotaciones para determinar los vértices faltantes del cuadrado.

Las propuestas del problema 1 del Equipo 6 han sido dos en total. Dirigidos a estudiantes de secundaria, los problemas buscan fomentar el uso de GeoGebra para resolver problemas geométricos y desarrollar habilidades en la visualización y manipulación de figuras.

- RP1$_6$-1 (CM): construir un cuadrado mediante una simetría central y una simetría axial conociendo un triángulo rectángulo, donde P y P' son dos de sus vértices y M es el punto medio del lado con vértice P'.
- RP1$_6$-2 (CM): construir un cuadrado, utilizando rotaciones, del que se conocen dos vértices P y P'.

Para el problema 2, el Equipo 6, planeta tres propuestas donde añaden triángulos y se centran en particularidades de las figuras geométricas.

- RP2$_6$-1 (CM): determinar en qué lugar estaría el punto exterior a la circunferencia para que el triángulo formado por los puntos de tangencia y dicho punto tenga área máxima.
- RP2$_6$-2 (CM): calcular las dimensiones de un triángulo inscrito en una circunferencia centrada en el origen de coordenadas de tal forma que su área sea máxima. ¿será equilátero?
- RP2$_6$-3 (CM): calcular las coordenadas de un punto para que el cuadrilátero inscrito en una circunferencia centrada en el origen tenga área máxima. Pregunta añadida: ¿qué particularidad tendrá dicha figura?

Equipo 7

El Equipo 7, al abordar el problema 1, presenta dos soluciones para la primera parte y una solución para la segunda parte. Las propuestas se centran en aplicar conceptos de simetría y ángulos para construir el cuadrado. En la primera solución, el equipo utiliza simetrías para determinar los vértices del cuadrado a partir de un punto conocido P y el punto medio M de uno de los lados. En la segunda solución, emplean rotaciones de 90º para definir los vértices del cuadrado.

En la segunda parte del problema, el equipo realiza cálculos de ángulos para resolver la construcción del cuadrado cuando el punto M es el punto medio de un lado opuesto al vértice conocido P.

Las reformulaciones del problema 1 del Equipo 7 han sido tres en total. Este equipo se ha dedicado a diseñar problemas que permitan a los estudiantes de secundaria explorar diferentes métodos geométricos.

- RP1$_7$-1 (Sin Cambios): el alumnado detalla en apartados preguntas necesarias para comprender y resolver el problema, por ejemplo "¿Qué propiedades o características tiene un cuadrado?".

- $RP1_7$-2 (Sin Cambios): construir el problema original utilizando el menor número de pasos posibles con GeoGebra.
- $RP1_7$-3 (Sin cambios): el equipo ha propuesto una resolución del problema original utilizando GeoGebra, ya que en el apartado de resoluciones solo presentan una aproximación sin usar herramientas digitales.

Para el problema 2, el Equipo 7, plantea una propuesta similar a la original.

- $RP2_7$-1 (DN): sucede lo mismo si la circunferencia no está centrada en el origen

Conclusiones

La investigación presentada ofrece una visión detallada sobre cómo el uso de GeoGebra, una herramienta tecnológica, influye en el proceso de resolución y formulación de problemas matemáticos por parte de estudiantes para profesores de secundaria. Se presentan ahora algunos hallazgos o conclusiones que se puede considerar que tienen implicaciones directas para la formación docente en matemáticas.

En relación con el primer objetivo, análisis del uso de GeoGebra en la aproximación dinámica durante la resolución de problemas, se revela que esta herramienta es fundamental para enriquecer la experiencia de aprendizaje. GeoGebra permitió a los participantes manipular y visualizar objetos matemáticos de manera interactiva (Tabla 2), facilitando la generación de conjeturas y la exploración de diferentes estrategias de resolución. Esta capacidad de experimentar con diversas aproximaciones en tiempo real no solo mejora la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también potencia la creatividad en la formulación de nuevos problemas. Estos hallazgos subrayan la necesidad de integrar tecnologías como GeoGebra en la formación de profesores, pues su uso no solo enriquece el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también prepara a los docentes para abordar la enseñanza de las matemáticas de manera más dinámica y efectiva.

Si analizamos la Tabla 2, podemos observar que el tipo de problemas propuestos genera cambios en las herramientas que utilizan los estudiantes, tanto en su cantidad como en su tipo. Por ejemplo, para el problema 1, los equipos utilizan muchas más herramientas distintas siendo

Tabla 2. Características presentes en las resoluciones de los equipos para los problemas

Problema 1. Construcción de un cuadrado. Primer apartado.						
	Simetría Central	Rotación	Traslación	Circunferencia e Intersección	Rectas y Simetría Axial	Ángulo
Equipos	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 4, 6, 7	1	1, 3, 4, 5, 6	2, 3, 4, 5, 7	3
Problema 1. Construcción de un cuadrado. Segundo apartado.						
	Simetría Central	Rotación	Circunferencia e Intersección	Ángulo		
Equipos	1, 4, 6	1, 3, 4, 5, 6, 7	2, 3, 5	3, 7		
Problema 2. Búsqueda del triángulo de área máxima						
	Visualizar Valor	Rastro	Lugar Geométrico			
Equipos	5, 7	7	1, 2, 3, 4, 5, 6			

la más frecuente la *Simetría Central* y *Rotación,* para el primer y segundo apartado respectivamente. Mientras que para el problema 2, la herramienta principal para acercarse a la solución es *Lugar Geométrico*.

En relación con el segundo objetivo propuesto y a partir del análisis de las características de los problemas presentados por los equipos, tras resolverlos, se observa que los participantes evidencian una gran comprensión y creatividad matemática. Mediante el planteamiento de nuevos problemas, se observa que introducen cambios significativos en los problemas originales, tales como la modificación de condiciones iniciales y la incorporación de nuevos datos numéricos, además de contextualizar los problemas en situaciones realistas (Tabla 3). Esto refleja un esfuerzo consciente por adaptar las matemáticas a lo que ellos consideran como intereses y necesidades de los estudiantes de secundaria, haciendo los problemas más accesibles y relevantes. Este enfoque adaptativo demuestra que los futuros profesores están desarrollando habilidades cruciales para la enseñanza, como la capacidad de diseñar problemas que no solo sean matemáticamente correctos, sino también pedagógicamente eficaces.

Observando el conjunto de las clasificaciones de las formulaciones (Tabla 3), se puede ver que para el problema 1 se presentan más propuestas que para el problema 2 (31 versus 15,

Tabla 3. Clasificación de las reformulaciones realizadas por los equipos para el problema 1.

Problema 1. Construcción de un cuadrado.

	Contexto (C)	Cambios Matemáticos (CM)	Datos Nuevos (DN)
N.º de Propuestas	14	17	6
Equipos	1, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 3, 4

Problema 2. Búsqueda del triángulo de área máxima

	Contexto	Cambios Matemáticos	Datos Nuevos
N.º de Propuestas	4	11	4
Equipos	1, 3, 5	1, 2, 4, 5, 6	1, 3, 7

respectivamente). Además, hubo propuestas con más de una variación, como $RP2_1$-1 o $RP1_3$-2, y otras sin ningún cambio como las del equipo 7 para el problema 1. Es interesante observar que, para ambos problemas, el mayor número de variaciones se produce por Cambios Matemáticos. Concretamente, para el problema 2, de las 15 formulaciones propuestas, 11 incluyeron Cambios Matemáticos.

Finalmente, la identificación de relaciones entre la manera en que los participantes resuelven problemas y las características de los problemas formulados destaca una correlación significativa entre ambas actividades. Las estrategias utilizadas en la resolución, aplicación de simetrías, rotaciones y traslaciones, influyen directamente en la formulación de nuevos problemas. Esto sugiere que las experiencias previas en la resolución de problemas, junto con el uso de herramientas tecnológicas, son fundamentales para el desarrollo de competencias avanzadas en la formulación de problemas matemáticos. En este sentido, el estudio reafirma la importancia de una formación integral en resolución de problemas que incluya tanto el dominio de estrategias matemáticas como la competencia en el uso de tecnologías innovadoras. Al fortalecer estas habilidades, los futuros docentes estarán mejor equipados para enfrentar los desafíos de la enseñanza con soluciones creativas y pedagógicamente sólidas.

En conjunto, estos resultados subrayan la necesidad de un enfoque formativo que combine el uso de tecnologías avanzadas como GeoGebra con estrategias pedagógicas efectivas, preparando a los futuros profesores para desempeñarse con éxito en el aula y contribuir significativamente al aprendizaje de las matemáticas.

Agradecimientos

Este artículo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el Ministerio de Ciencia e Innovación MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Referencias bibliográficas

Ball D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baumanns, L. (2022). *Mathematical problem posing. Conceptual considerations and empirical investigations for understanding the process of problem posing*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-39917-7

Baumanns, L. & Rott, B. (2021). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 251-269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Cai, J., & Rott, B. (2023). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM Mathematics Education* (2024) 56:61–71. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M. A. & Climent, N. (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino.* Dykinson

Hernández, A., Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J. & Santos-Trigo, M. (2023). Formulación de problemas matemáticos con GeoGebra. Un estudio inicial. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, XV, 117-136.

Koehler, M. J., Mishra, P., Kereluik, K., Shin, T. S. & Graham, C. R. (2014). *The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework*. In Spector, J. M. Merrill, M. D. Elen, J. & Bishop, M. J. (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology (pp. 101-111)*. Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3185-5_9

Pólya, G. (1945). *How to solve it? a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Reyes-Rodríguez, A., Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2017). The construction of a square through multiple approaches to foster learners' mathematical thinking, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, Vol 36, 3, 167–181, https://doi.org/10.1093/teamat/hrw022

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013) Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast.* Vol. 10(1-2), 279-302. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M. & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM Mathematics Education* (2024), 56,1287–1301. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01607-6