LA RAZONABILIDAD CONTEXTUAL EN PROBLEMAS DE ÁREAS FORMULADOS POR FUTURAS MAESTRAS Y MAESTROS

Josefa Perdomo-Díaz
Diana Sosa-Martín
Rut Almeida
Paula Pérez
Universidad de La Laguna

Resumen

La incorporación de la formulación de problemas en la formación inicial docente permite evaluar el conocimiento matemático de los futuros maestros y maestras e identificar errores conceptuales que sean necesarios atender (Cai y Hwang, 2020). En este trabajo se presenta parte de un estudio exploratorio, realizado con estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria, cuyos objetivos son, por un lado, analizar la razonabilidad contextual, en términos de lo realista y práctica que sea en la vida real la información dada en el enunciado de los problemas formulados y en la respuesta esperada (Cankoy, 2014) y, por otro lado, explorar los diferentes usos que hacen los estudiantes del valor numérico a partir del cual debían formular los problemas. Se analizaron un total de 575 problemas formulados por 193 estudiantes del Grado. Los resultados muestran un alto porcentaje de problemas razonables y que aquellos que no son razonables desde el punto de vista del contexto, guardan relación con el desarrollo del sentido numérico y el sentido de la medida.

Abstract

The incorporation of posing problems in the initial teacher training allows evaluating the mathematical knowledge of future teachers and identifying conceptual errors that need to be addressed (Cai and Hwang, 2020). This paper presents part of an exploratory study, carried out with students of the Teacher's Degree in Primary Education, whose objectives are, on the one hand, to analyze the contextual reasonableness, in terms of how realistic and practical the information is in real life given in the statement of the posed problems and in the expected response (Cankoy, 2014) and, on the other hand, to explore the different uses that students make of the numerical value from which they had to pose problems. A total of 575 problems posed by 193 undergraduate students were analyzed. The results show a high percentage of reasonable problems and those that are not reasonable from the point of view of the context, are related to the development of number sense and the sense of measurement.

Introducción

En los últimos años ha aumentado considerablemente el interés en torno a la formulación de problemas, lo que ha supuesto un incremento de investigaciones que contribuyen a ampliar y profundizar en el conocimiento de este tópico desde diferentes perspectivas (Cai y Hwang, 2020; Singer et al., 2015). La formulación de problemas, entendida como la actividad mediante la cual una persona diseña, crea o inventa problemas matemáticos, lo que incluye tanto la generación de problemas completamente nuevos como la reformulación de problemas dados (Silver, 1994), presenta algunas características comunes a la resolución de problemas. No obstante, la formulación de problemas posee también algunas características propias que en los últimos años han comenzado a estudiarse y que aún se necesitan analizar en profundidad y comprender.

De forma análoga a lo que ocurre con la resolución de problemas, la formulación de problemas se ha mostrado como una actividad efectiva para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que promueve la conexión e integración de conceptos y estructuras matemáticas para construir nuevo conocimiento (Kiliç, 2015). Además, en el proceso de formulación de problemas intervienen niveles de reflexión complejos, relacionados con la selección de información que se quiere aportar, los datos a incluir o las preguntas a realizar, lo que resulta beneficioso para el desarrollo del pensamiento crítico, la curiosidad y la creatividad (Ayllón y Gómez, 2014).

En la literatura se distinguen dos líneas principales de investigación en torno a la formulación de problemas. Por un lado, están las investigaciones con foco en la formulación de problemas por parte del alumnado, en su actividad diaria en el aula, es decir, como una metodología de enseñanza; y, por otro lado, la formulación de problemas por parte del profesorado en ejercicio y en formación, es decir, como actividad profesional. Dentro de cada una de esas líneas, la variedad de estudios es amplia (Singer et al., 2015). La investigación que presentamos en este trabajo se sitúa en la segunda de las líneas, puesto que el objetivo general es analizar algunas características de un conjunto de problemas matemáticos formulados por futuras maestras y maestros.

Marco conceptual

Tal y como hemos indicado, en esta investigación consideramos que la formulación de problemas es cualquier tarea mediante la cual una persona diseña, crea o inventa problemas matemáticos (Silver, 1994). En las tareas de formulación de problemas pueden distinguirse dos partes: la *situación* y el *prompt* (Cai et al., 2022). La *situación* se refiere a la información inicial a partir de la cual se pide formular los problemas. Por ejemplo, la *situación* puede ser un número, una imagen, un conjunto de datos, un contexto o incluso un problema. El *prompt* es el requerimiento que se hace, qué se pide en relación con la formulación de problemas. Por ejemplo, "formular tantos problemas como te sea posible" o "formular dos problemas de diferente dificultad". De esta forma, una misma *situación* puede presentarse con distintos *prompts*, y viceversa. Tanto la *situación* como el *prompt* son variables que pueden influir en las características de los problemas creados (Cai et al., 2022; Sosa-Martín et al., enviado).

En relación con los problemas formulados, estos podrían ser analizados desde diferentes perspectivas. Cankoy y Özder (2017) proponen cinco categorías de análisis: resolubilidad, razonabilidad, estructura matemática, contexto y lenguaje. La resolubilidad hace referencia a que el problema formulado pueda resolverse o no; esta característica está relacionada con el concepto de plausibilidad empleado por Grundmeier (2015) para quien un problema no plausible es aquel que contiene afirmaciones no válidas y, por tanto, sería no resoluble. A partir de este concepto, Grundmeier (2015) distingue entre cuatro tipos de problemas: a) *no plausible,* si contiene afirmaciones no válidas y no es resoluble aun cuando se añada más información; b) *plausible sin información suficiente,* si puede resolverse añadiendo cierta información que el enunciado sobreentiende o no hace explícita; c) *plausible con información suficiente de una tarea,* si para resolverlo se requiere un único paso; y d) *plausible con información suficiente de varias tareas matemáticas,* si requiere de la realización de más de una tarea matemática para ser resuelto.

Siguiendo con las categorías propuestas por Cankoy y Özder (2017), la razonabilidad hace referencia a si la información que se indica en el enunciado del problema, incluidos los datos, son realistas y tienen sentido en el contexto en el que se formula dicho problema. La estructura matemática se refiere a las características matemáticas de la actividad a realizar para la resolución del problema. En relación con esta categoría, Cankoy y Özder (2017) distinguen entre problemas aritméticos o algebraicos, según que la incógnita esté al final o al inicio del problema; otros autores distinguen entre problemas aditivos, multiplicativos o mixtos (García-Alonso et al., 2022; Sosa-Martín et al., enviado). En relación con las dos últimas categorías, en el contexto se distingue si corresponde a temas habituales en las tareas de aula y, por último, en el lenguaje se puede observar si este es claro y comprensible.

Nuestro interés en este trabajo se centra en una de las cinco características anteriores: la razonabilidad.

Objetivos

El estudio que aquí se presenta tiene dos objetivos. El primero de ellos es analizar la razonabilidad de los problemas de áreas formulados por los futuros maestros y maestras, ante una situación que les ofrece únicamente un valor numérico. Y, en segundo lugar, realizar un análisis exploratorio sobre las diferentes formas en las que los estudiantes utilizan dicho valor numérico en los problemas formulados.

Metodología

La investigación se llevó a cabo con 193 estudiantes de la asignatura Didáctica de la Medida y de la Geometría del tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. Estos estudiantes no habían recibido, en ningún momento previo a este estudio, formación específica sobre formulación de problemas.

Como instrumento de recogida de datos se utilizó un cuestionario con tres actividades de formulación de problemas de áreas. Cada actividad presentaba una *situación* inicial diferente: un valor numérico proporcionado de forma aislada (*24*), información contextualizada (*decorar una habitación*) y un problema a resolver. Las dos primeras actividades se plantearon con un mismo *prompt:* "formula tres problemas de diferente dificultad" mientras que en la tercera solo se solicitaban dos problemas puesto que debían resolver uno previamente y el tiempo era limitado. En este trabajo, se presenta el análisis de la razonabilidad contextual y las diferentes formas de utilizar el valor numérico dado de los problemas formulados en la primera actividad (Figura 1).

Figura 1
Enunciado de la actividad 1 de formulación de problemas

Actividad 1. Formula tres problemas sobre áreas, de diferente dificultad, donde aparezca el número 24. Este número puede ser un dato o una solución. Recuerda que puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto...).

Los participantes dispusieron de 15 minutos como máximo para la realización de dicha actividad y debían utilizar, únicamente, lápiz y papel para su desarrollo.

El análisis de los datos se realizó mediante un proceso de codificación múltiple ciego, en el que participaron cuatro codificadores. Para cada uno de los problemas formulados se analizaron un conjunto de variables, entre ellas su razonabilidad contextual, que es la que nos interesa en este trabajo.

Como ya se ha indicado en el marco, se considera que un problema es razonable desde el punto de vista contextual si la información y los datos que proporciona son coherentes y realistas (Cankoy, 2014; Cankoy y Özder, 2017). Esta variable, por tanto, solo tiene sentido estudiarla en problemas planteados en un contexto no matemático, que permita valorar la información del problema en una situación real.

Los 193 participantes de esta investigación formularon un total de 575 problemas para la actividad 1, ya que algunos solo plantearon uno o dos, no los tres que les pedía el *prompt*. Solo en 150 de estos problemas pudo analizarse la razonabilidad numérica; el resto de los problemas formulados se descartaron de este análisis por no ser de áreas (15), no ser plausibles o contener errores matemáticos (63) o ser plausibles pero estar planteados en un contexto matemático (247).

Por otro lado, de dichos problemas se ha realizado un análisis preliminar de los diferentes papeles que juega el valor numérico dado en la *situación* de la actividad (24) en los problemas de áreas formulados.

Análisis de la razonabilidad

Al analizar los 150 problemas planteados por los participantes que cumplían con las condiciones de ser de áreas, plausibles y formulados en un contexto no matemático, un 86% (129 problemas) fueron clasificados como razonables desde el punto de vista contextual. Los problemas en esta categoría incluían datos y contextos que hacían referencia a situaciones factibles en una posible situación real, como se puede observar en los ejemplos de las figurasFigura 2 yFigura 3.

Figura 2
Problema razonable (1)

Problema 1.

Si tengo una piscina totalmente cuadrada, y cada uno de sus lados mide 24 dm, ¿cuántos m necesitaré de toldo para cubrir toda la piscina?

Figura 3
Problema razonable (2)

Problema 3. Tenemos unas baldosas en forma de cuadra- dos cuya área es de 576 cm². ¿Cuánto miden los baldosas de lado?

El resto de los problemas analizados (14%) fueron clasificados como no razonables (21 problemas). La principal razón por la que estos problemas dejaron de ser razonables es que presentaban dimensiones que no se ajustan a la realidad. Así, distinguimos dos categorías: problemas infradimensionados y sobredimensionados.

Se consideraron problemas no razonables infradimensionados, aquellos que presentaban medidas no realistas por hacer uso de cantidades muy por debajo de lo esperable en el contexto al que hacían referencia. De los 150 problemas a los que se les analizó la razonabilidad, 20 presentaban estas características, lo que supone un 13,3% del total de problemas analizados.

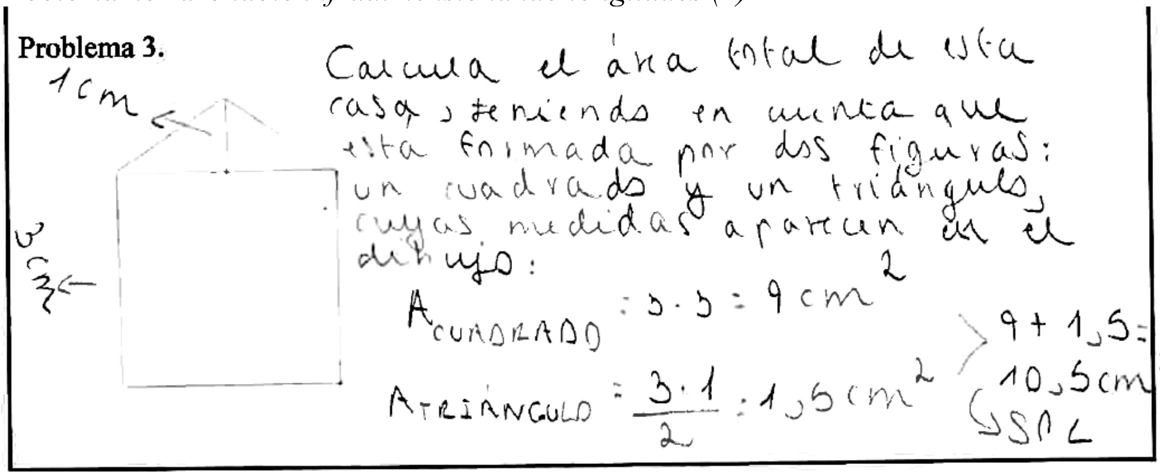
Los contextos que se incluían en estos problemas clasificados como no razonables infradimensionados, tienen que ver con situaciones que debieran ser cercanas a los estudiantes y, por tanto, fácilmente estimables. Por ejemplo, en la Figura 4 se muestra un problema donde se han indicado unas longitudes para los lados de una pizarra muy pequeñas, lo que podría indicar que la persona que formuló este problema no tiene una referencia mental de las cantidades de medida que ha indicado.

Figura 4
Problema no razonable infradimensionando longitudes (1)

Problema 1. María quiere calcular el área de la pizarra de su clase que presenta unas dimensiones 3 dm de alto y 8 dm de ancho. ¿Cuál es el área de la pizarra?

La siguiente figura (Figura 5) muestra otro ejemplo de problema no razonable infradimensionado. En este caso, los datos del problema incluyen algunas dimensiones de una casa que están muy por debajo de lo que podría darse en una situación real, a menos que se trate de un plano a escala, algo que no se indica en el enunciado.

Figura 5
Problema no razonable infradimensionando longitudes (2)



Los ejemplos anteriores están relacionados con longitudes. También se han encontrado problemas donde la magnitud infradimensionada es el área (Figura 6 y Figura 7). En estos casos, el contexto podría ser algo más lejano para la persona que lo formula, quizás porque no haya tenido la oportunidad de experimentar medir esos lugares; en cualquier caso, muestran una falta de referencia o capacidad de comparación de medidas para estimar la superficie, por ejemplo, de un campo de fútbol (Figura 6) o de un hipermercado (Figura 7).

Figura 6
Problema no razonable infradimensionando superficies (1)

Problema 2. El campo de fútbol de Las Delicias mide 12 m^2 y el Santiago Bernabéu mide 48 m^2. ¿Cuántos m^2 mide el campo de fútbol del Cardonal si mide el doble que el campo de Las Delicias y la mitad que el campo Santiago Bernabéu?

Figura 7

Problema no razonable infradimensionando superficies (2)

Problema 3. Alcampo tiene una superficie de 34 m², mientras que Hiperdino tiene una superficie de 10 m². ¿Cuántos m² de diferencia hay entre ambos centros comerciales?

En otra categoría encontramos aquellos problemas no razonables clasificados como sobredimensionados, es decir, por hacer uso de cantidades muy superiores a las esperables en el contexto en el que se desarrollaba el problema. En el análisis realizado, solo uno de los problemas presenta esta característica, lo que supone un 0,7% de los problemas analizados. Se trata de una situación donde se sobredimensionan las longitudes de los lados de una parcela (Figura 8).

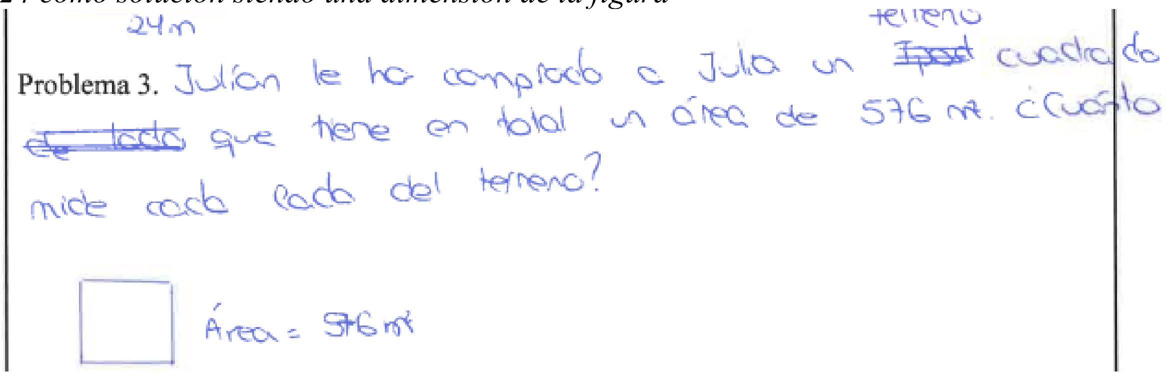
Figura 8
Problema no razonable sobredimensionado

PEDRO HA COMPRADO UNA FINCA DE LAS SIGUIENTES DIMENSIONES SI QUIERE PLANTAR EN TODA LA SUPERFICIE DE ESTA, ¿CUÁNTOS KM TENDRÁ DE CULTIVO?

Análisis de los usos del 24

Dado que el *prompt* solicitaba problemas de áreas, los datos que aparecen en estos problemas proporcionan medidas de una determinada figura u objeto. En estos problemas se observa que el número 24 (dato facilitado en la situación) fue utilizado de diferentes formas. En algunos casos se utilizó como dato y en otros como la solución que se obtendría una vez resuelto el problema. En estos últimos, el 24 no aparecía explícitamente en el enunciado del problema formulado, sino que sería la solución que se obtendría una vez resuelto el problema (Figura 9).

Figura 9
24 como solución siendo una dimensión de la figura

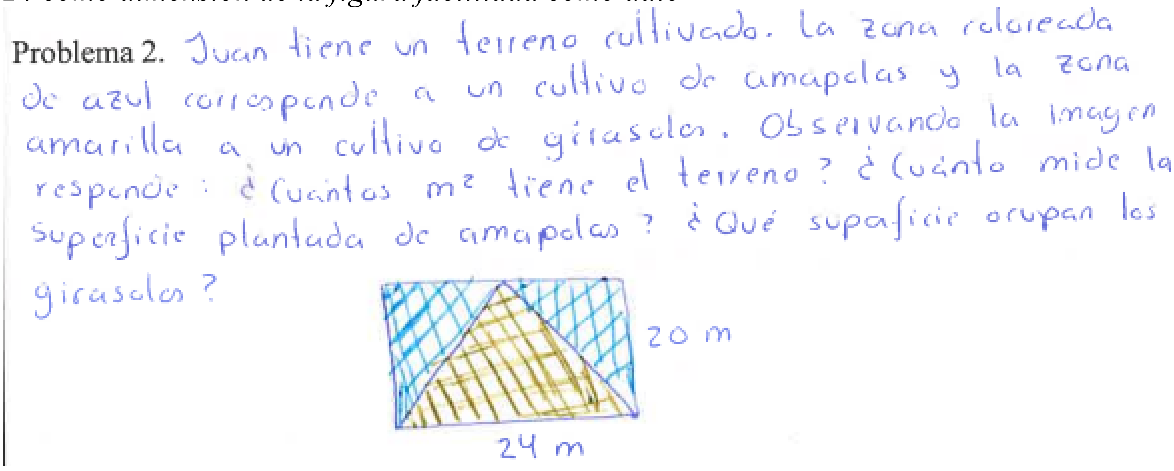

24 m

Problema 3. Julián le ha comprado a Julia un ~~Tras~~ terreno cuadrado ~~de lado~~ que tiene en total un área de 576 m². ¿Cuánto mide cada lado del terreno?

Área = 576 m²

En los casos donde el 24 se utilizó como dato, de forma explícita en el enunciado, se pudieron identificar diferentes usos. En algunos problemas el dato numérico dado en la situación se utilizó para indicar una de las dimensiones de una figura de la que se pedía calcular el área (Figura 10).

Figura 10
24 como dimensión de la figura facilitada como dato


Problema 2. Juan tiene un terreno cultivado. La zona coloreada de azul corresponde a un cultivo de amapolas y la zona amarilla a un cultivo de girasoles. Observando la imagen responde: ¿Cuántos m² tiene el terreno? ¿Cuánto mide la superficie plantada de amapolas? ¿Qué superficie ocupan los girasoles?

20 m

24 m

En otros problemas, el 24 se utilizó para indicar la cantidad de superficie de la figura propuesta y se pedía obtener otras medidas. Por ejemplo, en el problema de la Figura 11, el 24 se usa para indicar la cantidad de área que tiene un jardín, del que se pide obtener la medida de uno de los lados.

Figura 11
24 como área de la figura facilitada como dato

Problema 3. Teniendo en cuenta que el área del jardín de Juan es de $24m^2$ y que tiene una forma cuadrada, calcula cúanto mide uno de los lados del jardín.

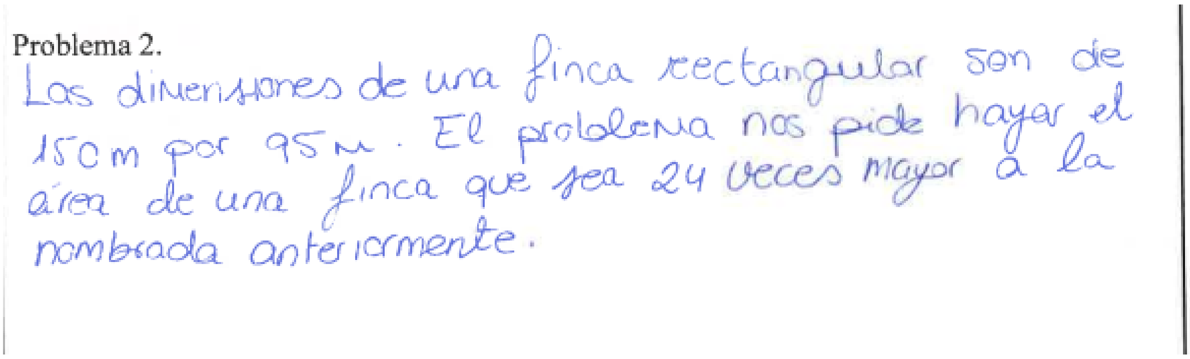
También se encontraron problemas donde el dato numérico indicado en la situación se utilizó para representar cantidades de medida asociadas a otras características de las figuras u objetos como, por ejemplo, el perímetro (Figura 12).

Figura 12
24 como perímetro de la figura facilitada como dato

Problema 1. Carlos quiere cerrar su granja con 24 metros de valla. Si el resultado es que el terreno mide $20 m^2$, ¿cuánto miden ~~sus lados?~~ los lados del rectángulo?

El resto de los casos, que representaron a una minoría, se clasificaron como "otro" e incluían usos no vinculados con medidas de las figuras geométricas. Por ejemplo, como relación de proporcionalidad con el problema expuesto en la Figura 13 donde el 24 es la relación que se pide que exista entre el área de una finca dada y el de la finca que se quiere obtener.

Figura 13
24 como factor de relación entre áreas


Problema 2.
Las dimensiones de una finca rectangular son de 150 m por 95 m. El problema nos pide hayar el área de una finca que sea 24 veces mayor a la nombrada anteriormente.

En todos los ejemplos anteriores, aunque la *situación* (inclusión del 24) es usada desde distintas perspectivas, los datos proporcionados en los problemas formulados son coherentes y realistas con los contextos no matemáticos en los que sitúan, siendo todos razonables.

Discusión final

Una de las principales tareas que todo docente debe realizar es decidir el tipo de actividades de aprendizaje que propondrá a sus estudiantes. A partir de ahí, dichas actividades pueden ser seleccionadas de entre la amplitud de actividades existentes, por ejemplo, en libros de texto o en páginas o aplicaciones web, o creadas por los propios docentes, a partir de actividades ya conocidas o no.

En el caso de las matemáticas, las actividades que se utilizan pueden presentar un contexto puramente matemático o un contexto no matemático. En este último caso, es importante que dicho contexto tenga sentido, que la situación que se plantee muestre una situación realista, tratando de evitar el uso de lo que Alsina (2007) denomina "falsas realidades en el aula" (p. 85).

Este estudio nos ha permitido observar que los participantes, futuros maestros de Educación Primaria, tienen una fuerte tendencia a la formulación de situaciones en un contexto puramente matemático, puesto que únicamente un 26% de los problemas que plantearon incluían un contexto no matemático.

En el análisis de los problemas, se muestra una amplia variedad en el uso del dato dado como situación (24), que se exigía como condición en el enunciado, combinando su uso como una longitud o superficie y como un dato o solución del problema, principalmente. Además, en términos de razonabilidad de dichos problemas, se mostró que una amplia mayoría eran razonables desde el punto de vista del contexto (86%), mostrando situaciones realistas.

Ahora bien, a pesar de encontrarse un porcentaje mucho mayor de problemas razonables, llaman la atención los casos en los que los futuros maestros plantean situaciones incoherentes muy alejadas de la realidad en contextos muy familiares (14%, 21 problemas).

Los no razonables tenían que ver con infradimensionar o sobredimensionar longitudes y áreas de objetos que deberían ser familiares a los estudiantes, mostrando una falta de sentido numérico, asociado también a un sentido de la medida, en cuanto a la estimación de magnitudes, probablemente debido a una falta de puntos de referencias personales, componentes que forman parte del marco que describe las características de este (Almeida y Bruno, 2017).

Los resultados obtenidos coinciden con los expuestos en investigaciones previas en las que se perseguía analizar el tipo de error cometido por alumnado de secundaria en la estimación de magnitudes de longitud y superficie (Castillo-Mateo et. al, 2012). Sin embargo, la normativa actual de la Educación Primaria en España pone el foco en analizar la razonabilidad de los resultados como parte del sentido numérico, pero no sobre las propias situaciones planteadas:

> *En el Bloque I, "Sentido numérico",* se desarrollan habilidades y modos de pensar basados en la comprensión*, (...) para realizar cálculos y resolver problemas (...) y evaluar si los resultados son razonables. (...) Se pretende que el alumnado no solo calcule con fluidez sino que haga estimaciones razonables (BOC, 2022, p.* 45798).

Esto muestra la necesidad de incorporar en la formación más instancias de análisis de lo razonable de las situaciones que planteamos en el aula, lo que puede incluir un análisis crítico de las características de las actividades presentes en los libros de texto y en la web.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos: "Herramientas digitales y formulación de problemas matemáticos. Diseño de una instrucción para docentes de Educación Primaria" (ProID2021010018), concedido por el Gobierno de Canarias en las áreas prioritarias de la Estrategia de Especialización inteligente de Canarias RIS-3, cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020, y el proyecto "Formulación de problemas matemáticos con herramientas digitales en la formación inicial de profesorado" (PID2022-139007NB-I00), correspondiente a la convocatoria de Proyectos de Generación de Conocimiento y Formación de Investigadores Predoctorales, 2022, del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias bibliográficas

Almeida, R. y Bruno, A. (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *REDIMAT*, 6(1), 56-84. doi:10.4471/redimat.2017.1910

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en Educación Matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación, 43,* 85-101.

Ayllón, M. F. y Gómez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela Abierta*, *17*, 29-40.

Boletín Oficial de Canarias [BOC] (2022). *DECRETO 211/2022, de 10 de noviembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias*.

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102.

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes and products. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 1, pp. 119-145.

Cankoy, O. (2014). Interlocked problem posing and children's problem posing performance in free structured situations, *International Journal of Science and Mathematics Education,* vol. 12, 219-238.

Cankoy, O. y Özder, H. (2017). Generalizability Theory Research on Developing a Scoring Rubric to Assess Primary School Students' Problem Posing Skills. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 2423-2439.

Castillo-Mateo, J. J., Segovia, I., Castro, E. & Molina, M. (2012). *Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie*. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática (pp. 63-74). SEIEM.

García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J. (2022). *Problemas de fracciones formulados por futuros profesores: algunas características*. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXV (pp. 295-304). SEIEM.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer et al. (Eds.), *Mathematical problem posing,* (pp. 411-431). Springer.

Kiliç, Ç. (2015). Analyzing Pre-Service Primary Teachers' Fraction Knowledge Structures through Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1603-1619.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.) (2015). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice.* Springer.

Sosa-Martín, D., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., Almeida, R. y García-Alonso, I. (enviado). Situations and plausibility when prospective teachers pose problems.