FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XIV
ISSN: *1695-6613*

UNA CARACTERIZACIÓN DEL SENTIDO NUMÉRICO ACERCA DE LOS NÚMEROS REALES: CÓMO NOTAR SU USO

Virginia Garrido-Adame
Olimpia Figueras
Minerva Martínez-Ortega

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), México

Resumen

Definir el sentido numérico no ha sido una tarea sencilla y mucho menos el que los profesores tengan claro cómo identificar su uso al examinar la forma en la cual sus estudiantes resuelven tareas numéricas, o bien cómo diseñar actividades que promueven aspectos vinculados con ese constructo. En este artículo se proporciona una caracterización del sentido numérico acerca de los números reales y ejemplos de su uso para reconocer cómo estudiantes de primer año de bachillerato –jóvenes de 15 y 16 años de edad– lo emplean al resolver problemas y hacer cálculos. Los resultados muestran que a través de las decisiones tomadas para estructurar la resolución de una tarea numérica se puede valorar el uso del sentido numérico que no se limita a utilizar conocimientos sobre los números, sino que hay consideraciones que se sustentan en conexiones cognitivas de las experiencias del empleo de los números.

Palabras clave: *sentido numérico acerca de números reales, estudiantes de bachillerato.*

Abstract

Defining number sense has not been an easy task, much less for teachers to be clear about how to identify its use when examining the way in which their students solve numerical tasks, or how to design activities that promote aspects related to this construct. This article provides a characterization of number sense about real numbers and examples of its use to recognize how high school freshmen –15 and

16 years old– use it when solving problems and doing calculations. The results show that through the decisions made to structure the resolution of a numerical task, the use of number sense can be assessed, which is not limited to using knowledge about numbers, but there are considerations that are based on cognitive connections of experiences of the use of numbers.

Keywords: *real numbers' number sense, high school students.*

Introducción

De acuerdo con documentos oficiales, por ejemplo, NCTM (2000), SEP (2020), BOE (2007) el sentido numérico es un rasgo deseable que los estudiantes deben desarrollar durante su formación básica e intermedia, es decir, hasta el nivel medio superior –alumnos de 15 a 18 años de edad–. Sin embargo, la realidad es diferente a lo esperado en los documentos oficiales, la mayoría de los jóvenes que ingresan al nivel medio superior, incluso de los que egresan, carecen de una buena comprensión de los números reales y la habilidad para usarlos (Scaglia, 2000; Castañeda, 2011; Vega-Castro, Molina y Castro, 2012). Esto puede estar relacionado con el hecho de que la reflexión sobre los objetos matemáticos que se están usando conforme se avanza en los grados académicos disminuye. Es decir, en primaria se dedican los seis años para aprender a usar los números naturales, tres a emplear decimales y fracciones; luego en secundaria, tres años al estudio de números enteros y supuestamente a ampliar conocimientos sobre decimales y fracciones. Pero al ingresar al bachillerato se espera que los estudiantes sepan usar números reales, introducidos con timidez en la educación anterior, sin una previa consideración de semejanzas y diferencias de las propiedades de este sistema numérico con respecto a los otros.

Aunado a esta situación, se tiene el hecho de que no es fácil identificar el uso del sentido numérico en las tareas que hacen los alumnos, por ello plantear actividades para desarrollarlo es un reto para los profesores.

La investigación descrita en este documento forma parte de un estudio más amplio, en el cual se pretende desarrollar el sentido numérico de estudiantes del nivel medio superior acerca de los números reales y fortalecer aquel relacionado con los elementos de los otros sistemas numéricos. En este artículo, se exponen los avances logrados hasta el momento para responder la pregunta ¿Cómo caracterizar el sentido numérico acerca de los números reales? El propósito principal es mostrar cómo se puede usar la caracterización propuesta para notar el uso que los estudiantes hacen del sentido numérico acerca de los números reales. Dicha caracterización se describe en la siguiente sección y en el resto de la indagación se toma como marco de referencia.

Una caracterización del sentido numérico acerca de los números reales

Varios investigadores han propuesto definiciones que fueron modificadas por otros con la intención de esclarecer qué se debe entender por sentido numérico. Greeno (1991) lo definió como una 'expertez' cognitiva, es decir, como el conocimiento que resulta de una actividad extensa a través de la cual las personas aprenden a interactuar exitosamente en diversos dominios conceptuales. Sowder (1992a) define el sentido numérico como una red conceptual bien organizada que le permite a uno relacionar las propiedades de los números y las operaciones, así como resolver problemas numéricos de formas flexibles y creativas. Para Marshall (1989) el sentido numérico es la riqueza de conexiones del conocimiento matemático.

Las tres definiciones anteriores en su momento tuvieron gran aceptación por parte de la comunidad científica, empero son muy generales. Un investigador puede imaginar la 'expertez', la red conceptual o la riqueza de conexiones; pero observar ese tipo de cosas en el aula no es tarea fácil, por ello, para este estudio se decidió caracterizar el sentido numérico acerca de los números reales de forma más operativa. Después de analizar otras definiciones planteadas en investigaciones previas (ver por ejemplo Almeida et al., 2014; Reys, 1994; Löwenhielm et al., 2017) se llegó a la conclusión de que lo más conveniente era formular una definición que explícitamente hiciera referencia a los números reales, la propuesta fue la siguiente: *El sentido numérico es el conjunto de conocimientos y habilidades acerca de los números reales que usa una persona para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias numéricas al resolver problemas que involucren esos números.*

Los conocimientos están relacionados con las propiedades de los números reales, así como las de aquellos subconjuntos numéricos que contienen: naturales, enteros y racionales. Las habilidades son sobre su uso, las diferentes formas de representarlos y la capacidad de pasar de una forma a otra según las demandas de las situaciones en las que aparecen.

Las habilidades propuestas para la investigación que se desarrolla son 15 y se describen en los siguientes párrafos. Las primeras diez tienen como base los comportamientos que demuestran la presencia del sentido numérico sugeridos por Sowder (1992b). En el trabajo de Sowder, enfocado en actividades de educación primaria y secundaria, generalmente se da prioridad a los números naturales, enteros y racionales; como el foco de interés de esta investigación es el sentido numérico acerca de los números reales, se hicieron modificaciones y adaptaciones a esos comportamientos para que fueran más apegados al tipo de tareas que hacen los estudiantes del nivel medio superior, así como a las características de los números reales.

1. Habilidad para componer, descomponer y recomponer números. Esta habilidad se refiere a escribir los números de diferentes formas, en el caso de números reales por ejemplo: $\sqrt{40} = \sqrt{4(10)} = \sqrt{4(2)(5)} = \sqrt{8(5)} = \sqrt{8}\sqrt{5}$ y también $2\sqrt{10} = \sqrt{2^2}\sqrt{10} = \sqrt{4}\sqrt{10} = \sqrt{4(10)} = \sqrt{40}$.

2. Habilidad para identificar cuál representación de un número es más conveniente que otra. Reconocer cuál representación de un número es más útil en una tarea, quiere decir que el estudiante puede determinar que representación de un número le facilitaría la tarea que desea hacer. Por ejemplo, en el caso de los números reales para hacer la adición $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$ es útil escribir el primer sumando como $\frac{\sqrt{2}}{2}$ para hacer el cálculo con más eficacia.

Las habilidades 3 y 4 que se describen a continuación están relacionadas con el tamaño relativo de los números.

3. Habilidad para comparar números. La comparación de números generalmente se lleva a cabo por pares, ejemplo: ¿qué número es mayor $\sqrt{6}$ o 2?

4. Habilidad para ordenar números. La habilidad anterior se requiere para ordenar números, empero hay otras acciones involucradas en este proceso, por ejemplo, en el orden $-\sqrt{20} < -3.9 < -\frac{\sqrt{40}}{3} < -2 < 0 < \frac{2}{8}$ se involucraron más de dos comparaciones y el uso de diversas representaciones de los números.

5. Habilidad para lidiar con el orden de magnitud de un número en situaciones concretas. Esta habilidad está conectada, entre otros aspectos, con determinar qué cantidades pueden ser despreciables o no, según la situación en la que se usen los números. En otro ejemplo, usando notación científica, el orden de magnitud de 5×10^2 es muy diferente al de 5×10^6, una situación similar concierne a números muy pequeños que aparecen por ejemplo en unidades asociadas con magnitudes físicas, o medidas de microorganismos.

6. Habilidad para usar puntos de referencia. Los puntos de referencia (*benchmarks,* en inglés) son valores que se toman como punto de partida para localizar un número en la recta real, hacer cálculos, estimaciones o juicios e inferencias cuantitativas. Por ejemplo, si tomamos en cuenta que $\frac{1}{2} = 0.5$ entonces se puede asegurar que $\frac{9}{16}$ es mayor que 0.5, también se tiene que $\sqrt{170} + \sqrt{180} > 26$ porque $\sqrt{169} = 13$.

7. Habilidad para vincular símbolos de operación y relación de manera significativa. En este estudio, esta habilidad se va a asociar con hacer operaciones y reconocer su jerarquización. Además de poder escribir desigualdades entre los números de manera correcta, pues algunos estudiantes son conscientes de que 3 es mayor que -2 pero escriben $3 < -2$ porque confunden el signo de *mayor que* con el de *menor que*.

8. Habilidad para reconocer los efectos de las operaciones en los números. Esta habilidad abarca una variedad amplia de situaciones, tales como: notar que la división no en todos los casos reduce al número que se dividió, que la multiplicación de dos números negativos es mayor que cero, que si multiplicas por una expresión numérica conveniente igual a 1, por ejemplo $1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, se conserva el número que se tenía, pero con una representación que te permite hacer operaciones con mayor facilidad.

9. Habilidad para hacer cálculos mentales mediante estrategias propias. Esta habilidad tiene su origen en el cálculo flexible; existen ocasiones en las que se requiere conocer el resultado exacto de una operación, pero eso no significa que forzosamente debe provenir de un proceso formal o riguroso.

10. Habilidad para hacer estimaciones. Al hacer estimaciones intervienen varios conocimientos sobre los números; pero también hay que incorporar aquellos acerca de la medición, para considerar ambos tipos de estimación, en cálculo y en medida. Estimar una longitud, área, volumen o número de elementos en un conjunto está relacionado con el uso de los números.

Las habilidades 11, 12, 13 y 14 fueron propuestas considerando las principales dificultades que enfrentan los estudiantes de nivel medio superior al usar los números reales, estos escollos fueron observados en la práctica docente de una de las autoras.

11. Habilidad para valorar la razonabilidad de los resultados obtenidos al resolver problemas, o bien al hacer cálculos. Esta habilidad se refiere a reflexionar sobre la idoneidad de la respuesta según el contexto; por ejemplo, si se está resolviendo un problema relacionado con edades, la solución no puede ser un número negativo, o si se desea saber cuántas personas caben en un autobús, el resultado no puede ser un número decimal o una fracción.

12. Habilidad para ubicar números en la recta numérica. Ubicar números en la recta es indispensable para graficar funciones o lugares geométricos en el plano cartesiano. Requiere saber, por lo menos, que a la derecha del cero los números aumentan a medida que se alejan de ese punto y a la izquierda disminuyen conforme se alejan de ese número.

Sowder (1992a) definió un 'hecho dado' como aquella información que es necesario memorizar o tener presente aun cuando no se tenga una explicación formal al respecto o no se haya comprendido su significado. Por ejemplo, $1! = 0$ o $10^0 = 1$, aunque se tenga una demostración matemática de estas igualdades es suficiente que los alumnos y las alumnas las acepten como ciertas. La habilidad 13 no fue propuesta por la autora, sin embargo, la definición de 'hecho dado' contribuyó a su propuesta.

13. Habilidad para reconocer hechos dados. Algunos estudiantes de nivel medio superior no identifican a π o e como números cuando están incluidas en una expresión algebraica y los llegan a confundir con otra incógnita o variable. Por otro lado, expresiones como $sen(60)$ o $\ln(5)$ son interpretadas como productos e incluso hay quienes creen que se pueden separar. Por eso es importante que los estudiantes reconozcan 'hechos dados', como el que π y e son números conocidos, aunque estén representados por una letra o que $\tan(45)$, así tal y como está, es la representación de un número y no solo lo que está dentro del paréntesis.

14. Distinguir semejanzas y diferencias entre las propiedades y características de los distintos sistemas numéricos. Esta habilidad se refiere a que se sea consciente del tipo de números que se usan y que algunas propiedades no se comparten con números de otros sistemas, por ejemplo, la densidad es una propiedad que comparten los números racionales y reales, pero no la comparten los naturales y enteros; sin embargo, estos últimos sí tienen antecesor y sucesor.

15. Habilidad para autorregularse. Esta habilidad fue propuesta por Resnick (1989). Autorregularse se refiere a que una persona debe reconocer cuando en un procedimiento es mejor detenerse e iniciar otro camino para encontrar la solución. Esta habilidad se puede relacionar con el sentido numérico, porque si se espera que los alumnos hagan cálculos flexibles o estimaciones, es necesario que noten las ventajas o desventajas de lo que están haciendo para decidir si requieren un procedimiento formal o pueden continuar en la dirección que han tomado para resolver un problema.

Cómo notar el uso del sentido numérico acerca de los números reales

Las habilidades descritas en la sección anterior se pueden considerar indicadores que permiten valorar el uso por parte de los estudiantes del sentido numérico. En Garrido, Figueras y Martínez (2022), se describió la puesta a prueba de la pertinencia de las habilidades propuestas, en este documento se dará un ejemplo de cómo emplear estos indicadores. La investigación sobre el desarrollo del sentido numérico acerca de los números reales se está llevando con el marco referencial de la investigación de diseño (*design research*, en inglés); de acuerdo con Akker, Gravemeijer, McKenney y Nieveen (2006) esta metodología permite realizar estudios más flexibles, característica indispensable para poder hacer ajustes de acuerdo con las observaciones que se van haciendo. En un primer ciclo del experimento de diseño se planteó, con adecuaciones, la actividad Cinco pasos para llegar a cero (*Five steps to zero*) propuesta por Wieman (2016).

Participantes. En esta actividad participaron 56 estudiantes mexicanos inscritos en el 2do semestre de bachillerato; su edad oscilaba entre 15 y 16 años.

Recolección de datos. Los alumnos estaban separados en dos grupos de 28 y cada grupo se dividió en equipos de cuatro integrantes. La actividad se hizo de forma presencial. Todos los equipos grabaron un video de su discusión para la resolución de la tarea y posteriormente se concentraron las grabaciones en una plataforma digital. Para provocar la discusión entre los estudiantes se les entregaron hojas de trabajo por equipo, ver Figura 1. Lo único que cambiaba era el número del cual partían para llegar a cero.

Instrucciones:

1. Se empieza con un número dado.
2. Deben usar exactamente 5 pasos para llegar del número dado a 0.
3. Un paso se refiere a hacer una operación (suma, resta, multiplicación, división, elevar un número a una potencia o sacar raíz cuadrada de un número).
4. Cada paso debe incluir un número mayor a cero y menor a 9, pueden ser enteros, decimales, fracciones.
5. En caso de usar números decimales se deben considerar cuatro cifras después del punto decimal.
6. No pueden usar el número 0.
7. Pueden usar su calculadora.

Segunda ronda – trabajo en equipo

	Número -425	Justificación
Primer paso		
Segundo paso		
Tercer paso		
Cuarto paso		
Quinto paso		
	0	

Considerando las operaciones que propusieron ¿cómo pueden escribir el 0?

Figura 1. Hoja de trabajo para la recolección de datos. Elaboración propia.

Análisis de los datos. En la actividad Cinco pasos para llegar a cero los alumnos pueden usar varias de las habilidades relacionadas con el sentido numérico propuestas en la sección anterior, sin embargo, habilidades como ubicar números en la recta numérica o reconocer ‘hechos dados’ parecen no estar vinculadas con esta tarea. Hacer una reflexión, por parte de los profesores, sobre los indicadores que podrían observarse, o no, en cada una de las actividades que se plantean a los estudiantes puede funcionar como una guía para notar cómo los alumnos usan su sentido numérico. En esta dirección, el análisis de los datos versa sobre identificar evidencia de que los jóvenes emplearon alguna de las habilidades propuestas.

En la Figura 2, se presenta la solución de un equipo. En la justificación del primer paso se pueden notar evidencias de las habilidades 2, 6 y 14; los estudiantes aproximan la raíz o sea que recurren a una representación del número que les permite hacer operaciones más fácilmente, al restar la parte decimal parece que se dan cuenta de que trabajar con un número entero es más sencillo y al mencionar que obtendrán un número entero más divisible quiere decir que toman al 6 como un punto de referencia. En el segundo paso quieren obtener un número mayor a

6, y lo multiplican por sí mismo, esto es un indicio de que reconocen el efecto de la multiplicación para los números naturales, es decir se usa la habilidad 8.

En la hoja de trabajo no se pueden apreciar aspectos relacionados con la habilidad 15, pero en la grabación se puede identificar evidencia de esa habilidad. A continuación, se muestra un fragmento de la transcripción hecha sobre la discusión que tuvieron los integrantes del equipo para resolver el problema:

E1: ¿Lo redondeamos a siete o a seis?
E2: A siete.
E1: Mejor a seis porque se puede dividir más fácil ...
E3: Ya nos equivocamos, faltan muchos pasos ...
E1: Hay que hacerlo más grande.
E4: Multiplícalo por algo ...

6 3245

	Número $2\sqrt{10}$	Justificación
Primer paso	$-.3245$	$2\sqrt{10} = 6.3295$, si este número le restamos 0.3295 y da un número entero y más divisible, el 6.
Segundo paso	6^2	6 si hacemos, para hacer el número más grande, al 6 lo multiplicamos por sí mismo.
Tercer paso	$2\sqrt{36}$	Para alargar el proceso, obtenemos 6, porque $(6)(6) = 36$ $\sqrt{36} = 6$
Cuarto paso	$(\frac{1}{4})$	Multiplicamos 6 por $\frac{1}{4}$ que da $\frac{3}{2}$
Quinto paso	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$, y con eso, llegamos a 0
	0	

Considerando las operaciones que propusieron ¿cómo pueden escribir el 0?

eso no

$$\sqrt{\left[\left\{2\sqrt{10}(-.3245)\right\}^2\right] \times \left(\frac{1}{4}\right)} + \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$2\sqrt{10} = 6.3295$

$2(3.16) = 6.32$

Figura 2. Manuscrito de estudiantes de segundo semestre de bachillerato.

Para escribir como obtener cero a partir de las operaciones propuestas, sin duda se ponen de manifiesto elementos vinculados a la habilidad 7, sin embargo, no con éxito, ya que en lugar de una resta ellos escriben un producto y simbólicamente no expresan con claridad la jerarquía de las operaciones; por otro lado, el símbolo de raíz cuadrada abarca hasta la multiplicación por un cuarto cuando solo se aplicó al resultado de restar y elevar al cuadrado.

Otro número dado a partir del cual los estudiantes deberían llegar a cero fue el -425. En la Figura 3 se muestra la solución de otro equipo. En este caso, parece que los jóvenes no identifican que el número -425 es un número entero o quizás consideren que los números enteros deben terminar en cero. Para escribir el número cero a partir de las operaciones hechas, los alumnos tratan de usar la habilidad 7 pero sin éxito, porque al no establecer donde inicia y donde termina la operación delimitada por los paréntesis genera una confusión. Existe evidencia contradictoria sobre el hecho de que los estudiantes reconozcan el efecto de las operaciones, pues en el segundo y tercer paso asocian la división con 'hacer el número más pequeño', pero en el cuarto paso al dividir -21 entre 7 aseguran que el resultado será positivo.

	Número −425	Justificación
Primer paso	$-425 + 5$	Para que quede en un número entero.
Segundo paso	$4\overline{)-420}$	Para obtener un número más pequeño.
Tercer paso	$5\overline{)-105}$	Para seguir obteniendo un número pequeño.
Cuarto paso	$7\overline{)-21}$	Para convertirlo en número positivo.
Quinto paso	$-3 + 3$	Por que signos contrarios se restan y obtenemos el 0
	0	$0 = (-425 + 5) \div 4) \div 5) \div 7) - 3)$

Considerando las operaciones que propusieron ¿cómo pueden escribir el 0?

Figura 3. Manuscrito de estudiantes de segundo semestre de bachillerato.

Como puede verse en los ejemplos, las habilidades propuestas en la caracterización del sentido numérico acerca de los números reales permiten notar su uso.

Reflexiones y conclusiones

La solución que se muestra en la Figura 2 pertenece al único equipo que usó fracciones; esta circunstancia pudo haberse generado por las dificultades que enfrentan la mayoría de los estudiantes al hacer operaciones con fracciones o quizás porque los sistemas numéricos predominantes en su pensamiento son los números naturales y enteros (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

Identificar comportamientos relacionados con el uso de la habilidad 15, sólo fue posible en los videos grabados mientras los jóvenes hacían la actividad en equipo. Un componente importante de la valoración del uso del sentido numérico es observar y escuchar a los alumnos cuando resuelven problemas en grupos pequeños, describen en voz alta sus procedimientos, escriben cómo pensaron, y hacen preguntas; tal y como lo mencionó Howden (1989).

Resulta conveniente tener indicadores de las actuaciones para poner de manifiesto diversos componentes del uso del sentido numérico. Las habilidades son esos indicadores y cada una tiene varios aspectos a considerar respecto a los distintos sistemas numéricos, los cuales se deben complementar o interrelacionar; algo parecido a lo que Sowder (1992) describió como red conceptual. Cabe aclarar que el uso de una habilidad para un caso específico, no quiere decir que quien la haya usado ha desarrollado esa habilidad plenamente; simplemente está haciendo conexiones como lo mencionó Marshall (1989).

Al analizar las actuaciones de los alumnos, fue posible notar debilidades en el uso de ciertos elementos tanto de las propiedades, como de la simbolización de las estrategias que se relaciona con la comunicación en matemáticas. Greeno (1991) hacía referencia a una actividad extensiva para adquirir esa 'expertez' que él definía como sentido numérico. Ciertamente, superar esas debilidades no se logra con un puñado de tareas; desarrollar el sentido numérico de los estudiantes debe ser un propósito de la enseñanza de las matemáticas a cualquier nivel, porque de acuerdo con Reys y Barger (1991) es un proceso largo, gradual y constante.

Referencias bibliográficas

Akker J., Gravemeijer K., McKenney S. y Nieveen N. (Ed.). (2006). *Educational Design Research.* Londres, Reino Unido. Tylor & Francis Ltd.

Almeida R., Bruno A. y Perdomo J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes de Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *32*(2), 9-34.

BOE (2007). *Real Decreto 1631/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria* (BOE nº. 5, 5 de enero de 2007).

Castañeda, Y. (2011). *Introducción de prerrequisitos de Cálculo en un curso de Geometría Analítica de Bachillerato* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Garrido, Figueras y Martínez (2022). Sentido numérico acerca de los números reales: un estudio inicial con alumnos de 15-16 años, *Proceedings of the 44th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (en prensa).

Greeno, J. (1991). Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22* (3), 170-218.

Howden H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 6-11.

Löwenhielm, A., Marschall, G., Sayers, J. & Andrews, P. (2017). Opportunities to acquire foundational number sense: A quantitative comparison of popular English and Swedish textbooks. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 371-378) Dublin, Ireland.

Marshall, S. P. (1989). Retrospective paper: Number sense conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 40-42). San Diego, USA.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* Madrid, España.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA. NCTM.

Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). San Diego: San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Reys, B. (1994). Promoting Number Sense in the Middle Grades. *National Council of Teachers of Mathematics, 1*(2), 114-120.

Reys, B. y Barger, R. (1991). *Developing number sense in the middle grades*. USA. National Council of Teachers of Mathematics.

Scaglia, S. B. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada. España.

Secretaría de Educación Pública (2020). *Aprendizajes clave para la educación integral.* Ciudad de México, México. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx

Sowder, J. T. (1992a). Estimation and number sense. In Grouws D. (National Council of Teachers of Mathematics). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 371-395). San Diego, USA.

Sowder, J. T. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. In Leinhardt G., Putnam R. y Hattrup R.A. (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. (pp. 1-51). New Jersey, USA.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209.

Vega-Castro, Molina M. y Castro E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(2), 233–258.

Wieman (2016). Five steps to zero: A game form number sense and reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *21*(7), 432- 435.