FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
ISSN: 1695-6613

EL USO DE LA INVESTIGACIÓN EN LA PRÁCTICA DOCENTE. UN DISEÑO PARA LA TRANSICIÓN DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO AL ALGEBRAICO

José Alonso del Río Ramírez y Nancy Janeth Calvillo Guevara
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
Martín M. Socas Robayna y María Mercedes Palarea Medina
Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se hace un análisis de investigaciones que buscan la transición del pensamiento numérico al algebraico, y otras, que clasifican las dificultades que regularmente tienen los estudiantes para apropiarse de los conceptos del Álgebra escolar, a efecto de identificar recursos matemáticos que desarrollan el pensamiento algebraico.

Con el mismo propósito se diseñó una secuencia didáctica que toma en consideración las conclusiones de estas investigaciones, y se aplicó en una escuela Secundaria de México. Los resultados ponen de manifiesto que en la transición del pensamiento numérico al algebraico, surgen junto a los aspectos relacionados con la complejidad de los objetos y de los métodos del Álgebra, otros, como las formas de enseñanza, las situaciones de aprendizaje y el contrato didáctico que se desarrollan en las clases. Se analiza, finalmente la propuesta desde el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), como un modelo fenomenológico, que permite caracterizar con mejor precisión la introducción de los estudiantes a la adquisición del pensamiento algebraico.

Abstract

This article analyses research works on the transition from numerical to algebraic thinking, and others, which classified the difficulties pupils regularly find when appropriating school algebra concepts, in order to identify mathematical resources that develop algebraic thinking.

With the same aim, a teaching sequence was designed taking into account the findings of this research work and it was applied in a secondary school in Mexico. The results show that in the transition from numeric to algebraic thinking, not only do aspects related to the complexity of the algebraic objects and methods appear, but others, such as the teaching contract, the teaching methods, and the learning situations developed in class also appear. Finally, we analysed of the proposal from the model of Formal Mathematical Competence (FMC) as a phenomenological model that allows a more accurate characterization of how the pupils are introduced to the acquisition of algebraic thinking.

Introducción

La literatura relativa a la investigación en Didáctica de la Matemática muestra que existen dificultades en la transición entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Por la complejidad del Álgebra, cuando los aprendices comienzan a trabajar con esta parte de la Matemática muchos de ellos pierden la ilación que debe tener la Matemática, de modo que se les crea un conflicto al relacionar la Aritmética con el Álgebra. Papini (2003) menciona que cambian las estructuras del pensamiento y lo que antes funcionaba ahora ya no. Socas (2011) nos hace ver que los estudiantes tienen "problemas" para aprender nociones o procesos algebraicos y esto constituye un obstáculo para continuar formándose matemáticamente.

Los problemas que causa el Álgebra repercuten en la forma de "percibir las Matemáticas", no todos los estudiantes pueden evolucionar fácilmente desde el enfoque aritmético que tienen, *"para muchos alumnos, el Álgebra resulta difícil e incluso irrelevante y algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso que impregna el conjunto de su actitud hacia las matemáticas*" (Palarea, 1998, p.6).

De ideas similares a las anteriores, que expresan complejidad cuando se está trabajando Álgebra, surge la duda ¿la problemática que muestran los estudiantes hacia el Álgebra escolar, recae solamente en su complejidad o existe algo más que impida una buena comprensión? Se buscó evidencia sobre esos aspectos para intentar una respuesta y se encontraron varias investigaciones que tratan acerca de las dificultades, errores y problemática que tienen los alumnos para aprender Álgebra (Ruano, Socas y Palarea, 2003; Sessa, 2005, Butto y Rojano, 2010; Radford, 2010; Socas, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhemi, 2012) y otras que dan propuestas para comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Billings, Tiedt y Slater, 2007; Cañadas, 2007; Molina, 2009; Rojas, 2010).

Los resultados de las investigaciones consideradas han permitido elaborar el diseño de una secuencia didáctica que busca apoyar el paso del pensamiento numérico al algebraico. Ésta se aplicó en una escuela Secundaria[1] de Jerez, Zacatecas (México). Se obtuvieron resultados que facilitan continuar con la investigación acerca de esta temática. La incorporación de ciertos aspectos del enfoque ELOS[2] (Socas, 2001 y 2007), y la organización de los errores comunes que cometen los estudiantes, clasificándolos según su origen, y causas y (Palarea, 1998; Socas, 1997, 2011; Ruano, Socas y Palarea, 2003), proporcionan herramientas para mejorar las actividades correspondientes al pensamiento algebraico en próximos diseños de secuencias didácticas.

La experiencia docente nos ha permitido detectar que muchas de las veces, cuando se comienza a trabajar Álgebra con alumnos de Educación Secundaria, ellos tienen el referente de que una fórmula sirve para cualquier situación problemática del mismo estilo y suelen obtener el resultado a través de algún tipo de mecanización; por ejemplo, cuando conocen las fórmulas geométricas de áreas y perímetros, una misma fórmula funciona para cualquier área o perímetro del mismo tipo de polígono, aunque, como indica (Ursini et al, 2005, p. 11, cuando se trabaja con áreas y fórmulas "*no suele darse a las letras una representación algebraica".* En Primaria a las letras se les da una representación como de etiquetas que se refieren a cantidades específicas o a la inicial de una

[1] La escuela secundaria forma parte de la educación obligatoria en México, su equivalente en España son los primeros tres ciclos de ESO, a la que regularmente asisten alumnos de 12 – 15 años de edad.

[2] El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica-matemática, que tienen lugar en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiosis) (Socas, 2012, p. 2).

palabra, *"se suele usar la b para referirse a 'base'; la A para 'área'; h para 'altura', etc."* (Ursini et al., 2005, p. 11).

A causa de la dificultad que tienen los estudiantes para aprender Álgebra cuando están acostumbrados a resolver problemas por métodos aritméticos, se indagó en investigaciones hechas sobre la transición entre Aritmética y Álgebra (Kieran, 1992; Ruano et al., 2003; Butto y Rojano, 2004; Sessa, 2005; Trujillo, 2008; Socas, 2011), entre otros.

El pensamiento algebraico como saber que hay que enseñar

Consideraremos a continuación el pensamiento algebraico como saber que hay que enseñar, distinguiéndolo del pensamiento numérico y del Álgebra, con el fin de conocer a qué se refiere cada término y comprender cómo forman parte del proceso de transición de la Aritmética al Álgebra (de los números a las letras), La información obtenida se relacionará con los planes y programas de Educación Secundaria en México. El énfasis en los currículos ya no es enseñar Álgebra de manera formal y rígida, sino propiciar elementos para que los estudiantes sepan trabajar con tres usos que se le asignan a las literales a través de un eje temático que se denomina "*Sentido numérico y pensamiento algebraico",* el cual establece que: Los alumnos profundizan en el estudio del Álgebra con los tres usos de las letras conceptualmente distintos: como número general, como incógnita y relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.

La insistencia en ver lo general en lo particular se concreta, por ejemplo, en la obtención de la expresión algebraica para calcular un término de una sucesión regida por un patrón; en la modelación y resolución de problemas por medio de ecuaciones con una o dos incógnitas; en el empleo de expresiones algebraicas que representan la relación entre dos variables; esta última relación puede ser lineal (en la que la proporcionalidad directa es un caso particular), cuadrática o exponencial (Secretaría de Educación Pública, 2006, p. 9).

Para tener el lenguaje similar al utilizado por la Secretaría de Educación Pública (SEP), institución que coordina y regula la educación en México, se tomarán como similares el pensamiento numérico y el sentido numérico. Consideraremos este último como: La comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones (McIntosh, Reys y Reys, 1992, p. 2).

Este pensamiento comienza antes de la escolaridad de una persona. Obando y Vázquez (2008) expresan que casi siempre se genera de la interacción con adultos, los niños desarrollan intuiciones sobre lo numérico y desde que adquieren las nociones de número comenzarán a utilizarlos para distintas tareas: secuenciar verbalmente, etiquetar, contar, medir y ordenar.

En conclusión, el pensamiento numérico permite, a quienes lo hemos desarrollado, que observemos las magnitudes, el orden y las características que podemos tener acerca de los números y las relaciones que pueden tener con la vida cotidiana. Podemos observar a varias personas que no tienen alguna formación escolar y la necesidad hace que comprendan el valor y la relación que tienen los números entre sí.

Al hablar de pensamiento algebraico se debe tener en cuenta que es distinto al Álgebra formal. Butto y Rojano (2004) establecen que el pensamiento algebraico desarrolla algunas ideas del Álgebra y, al compararlo con la formalización algebraica resultan ser actividades de niveles cognitivos distintos.

El pensamiento algebraico es una forma de ver la Aritmética un poco "más allá"… los docentes deben tener, por tanto, bien definidos los propósitos de los ejercicios que se deben plantear a los aprendices de este tipo de pensamiento para lograr que lleguen al propósito deseado, regularmente una generalización. Billings et al. (2007) establecen que, definiendo correctamente la forma de trabajo, se involucra positivamente a los estudiantes para comenzar a tener ideas sobre generalización de patrones y formulación de conclusiones.

El término Álgebra tiene en la actualidad connotaciones diversas; en nuestro caso tomaremos como referencia del término la definición de la Real Academia Española (RAE): "Parte de las Matemáticas en la cual las operaciones Aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita" (Real Academia Española, 2001).

El Álgebra será tomada en cuenta como un proceso de generalización de la Aritmética, porque con base en ello se comienza a trabajarla con alumnos de primer grado de Secundaria (11-12 años). Trujillo (2008) expresa que tradicionalmente la generalización de la Aritmética se aprovecha para comenzar el trabajo del Álgebra en el ámbito escolar.

El pensamiento algebraico servirá de apoyo para llegar a la formalización del Álgebra dentro del currículo escolar, porque el pensamiento algebraico desarrolla en los alumnos un primer acercamiento al proceso de generalización de patrones que se representan en un pensamiento numérico.

Pregunta de investigación

La pregunta de investigación que se pretende contestar en este trabajo es: ¿Cómo comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico con alumnos de primero de Secundaria, para que tal pensamiento los oriente a un buen desempeño al trabajar Álgebra?

Se diseñó, aplicó y validó una propuesta didáctica que facilita la transición entre la Aritmética y el Álgebra, basada en los resultados de investigaciones en Matemática Educativa; se intenta dar respuesta a la pregunta de investigación cuya hipótesis es que la aplicación y validación de la secuencia didáctica mencionada ayudará a que los estudiantes adquieran herramientas para evolucionar del pensamiento numérico al pensamiento algebraico, centrándose en sus formas de pensar.

Marco conceptual

En la formulación del marco conceptual de esta investigación se tomaron en consideración diferentes aspectos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986), de la transposición didáctica (De Faria, 2006) y del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001, 2007).

De esta manera el diseño de la secuencia didáctica se fundamenta en las situaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas, adecuándola en un medio que esté organizado para que los estudiantes adquieran nuevos conocimientos, utilizando la transposición didáctica.

En el análisis de resultados se caracterizarán algunas herramientas bajo el fundamento de seis etapas: operaciones, proceso, estructuras, situación problemática, razonamiento (argumentos) y representaciones; que marcan la fenomenología, el campo conceptual[3] y la funcionalidad de las Matemáticas, aspectos que caracterizan a la Matemática como disciplina científica (Socas, 2012).

Las categorías tienen la finalidad de mejorar la "matematización de la cultura", a la que hace alusión Socas (2010 y 2012) como parte del ELOS[4]

[3]Un espacio de problemas o de situaciones – problema en los que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión (Vergnaud, 1981, p. 7).

[4]El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el

(Enfoque Lógico Semiótico), y ayuda en la producción de actividades de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, caracterizando el dominio de la actividad matemática desde la Competencia Matemática Formal[5] (CMF), la cual tiene la intención de ayudar en la docencia y en la investigación de la Matemática Educativa. Socas (2010) menciona que la Competencia Matemática Formal enfatiza la diferencia del objeto matemático y forma de representarlo.

Por "Matematización de la Cultura" se entenderá el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que se genera al situarlas como un conocimiento cultural para todas las personas. En este trabajo se hará buscando la manera de transformar el "saber sabio" en "saber a enseñar" por medio del análisis de las categorías: operaciones, estructuras y procesos que caracterizan el campo conceptual.

Las tres categorías están relacionadas de la siguiente manera:

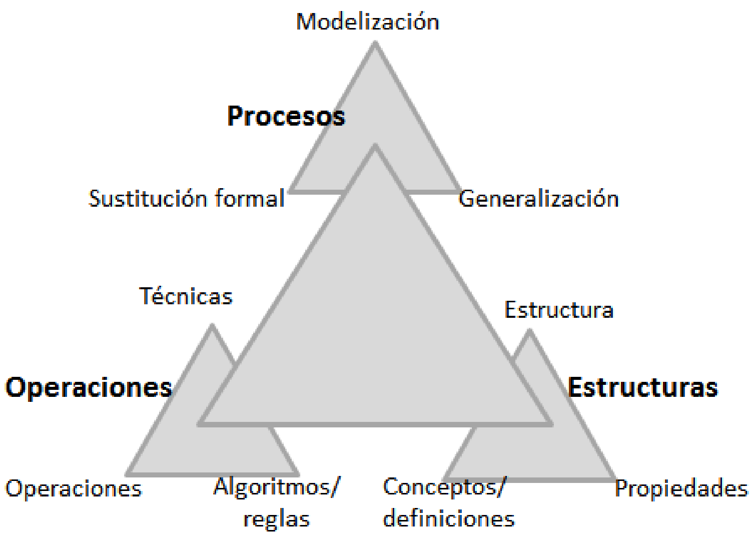

Imagen 1. Relación de las tres categorías que describen la Competencia Matemática Formal en relación el campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiósis) (Socas, 2012, p. 2).

[5]La Competencia Matemática Formal, es un modelo que considera a la Matemática como disciplina científica, desde la triple perspectiva del conocimiento matemático: Fenomenología, epistemología (campo conceptual) y semiótica (especialmente desde la funcionalidad de las representaciones de los objetos matemáticos).

Junto con las categorías que determinan el campo conceptual se describe también el contexto, en el que aparecen y se desarrollan los objetos matemáticos considerados. Las categorías que determinan el contexto son: situación problemática, representaciones y argumentos, y se representa de la siguiente manera:

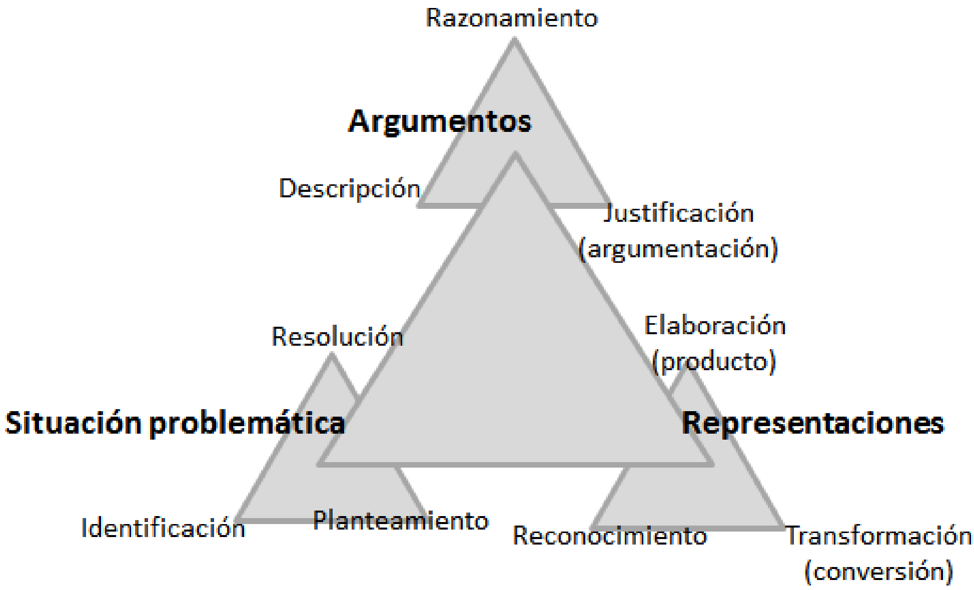

Imagen 2. Relación de las tres categorías que describen en la Competencia Matemática Formal contenidas en la Competencia Matemática Formal el contexto del campo conceptual de la Matemática, Socas (2012)

Estas categorías establecen diferentes conexiones que permiten relacionarlas entre sí y muestran que, por medio de la situación problemática, llegaremos a relacionar representaciones y a utilizar argumentos que sean válidos para el resultado requerido. Además de lo anterior, Socas (2012) plantea que las seis categorías que describen el campo conceptual y el contexto, respectivamente permiten establecer diferentes caminos (fenomenología) que facilitan el análisis de las características que debe tener el conocimiento matemático tratado.

Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se diseñó y aplicó una secuencia didáctica que utiliza los pasos de la Ingeniería Didáctica, con un grupo de 40 alumnos de primero de Secundaria en Jerez, Zacatecas (México), organizados en diez equipos de cuatro personas cada uno; se denominaron con el nombre del encargado de cada equipo: Jorge, Itzel, Toño, Arantza, Ricardo, Manuel, Alí, Karla, Paulina y Andrea. De dicha organización, en este artículo, se muestran los resultados de una actividad desarrollada en la secuencia de actividades.

Análisis preliminar

El diseño de la actividad tuvo en cuenta resultados de diferentes investigaciones; por ejemplo, Barallobres (2000) nos sugiere idear una estrategia en la que se haga ver a los alumnos que es necesario seguir cierto tipo de reglas y pasos para facilitar la resolución de ejercicios. Es importante tener en cuenta que los ejercicios pensados no se puedan resolver fácilmente por métodos aritméticos aunque los alumnos preferirán hacerlo por ese método porque es el que conocen. Carraher et al., (2006) y Radford, (2010) aconsejan que es mejor diseñar problemas en los que los estudiantes necesiten alguna herramienta matemática que pueda usarse dentro del pensamiento algebraico para indagar qué es lo que está ocurriendo o para generalizar información de una manera algebraica.

La actividad considera uno de los tres usos de la letra que considera Ursini et al., (2005), la literal como número generalizado. La secuencia didáctica pretende ayudar a los alumnos a comenzar con el Álgebra escolar, pero es indispensable comentar que no hay una fórmula específica para trabajar el Álgebra con los distintos estudiantes, ya que cada uno de ellos piensa y actúa de manera diferente a sus compañeros y a estudiantes de otras generaciones; como menciona Brousseau (1986) no es permisible que los profesores trabajen con las mismas actividades desde hace bastantes años.

En relación con las características del grupo con el que se trabajaron las actividades, debemos señalar que los alumnos están acostumbrados a contestar las tareas por medio de operaciones matemáticas y de forma mecánica. En este tipo de contrato didáctico el profesor es quien posee el saber y determina lo que está bien o mal. No existen momentos de discusión y razonamiento grupal por parte de los estudiantes, sólo pueden reflexionar individualmente cuando están explicándole al profesor en el pizarrón; además, éste señala explícitamente que no le gusta que trabajen en equipo porque pierden tiempo y generalmente alborotan.

Los estudiantes ya tienen conocimientos acerca de actividades en las que utilizan las letras (algebraicas), porque el nuevo currículo de Secundaria de México marca algunos temas referentes al uso de la variable con alumnos de primer grado de Secundaria.

Análisis a Priori

Tratamos a continuación el análisis *a priori* de la actividad en la que se considera el uso de la letra como número generalizado.

Actividad. Número Generalizado

Consideramos las siguientes situaciones: acción, formulación, validación e institucionalización.

. Situación de Acción

La pretensión de esta actividad es que los estudiantes detecten una relación entre figuras y expresiones numéricas con la intención de que, por medio de la búsqueda de la representación de las figuras en forma numérica, encuentren una regla que exprese la forma general del incremento que tienen las figuras que sirva para todos los casos y para uno en particular. Ursini et al. (2005) al considerar la variable como número generalizado propone utilizar regularmente símbolos que representan una situación general, una regla o un método. Al hacer uso de la literal de esta manera se busca desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos.

La actividad es la siguiente:

Observen las siguientes figuras y contesten lo que se pide a continuación.

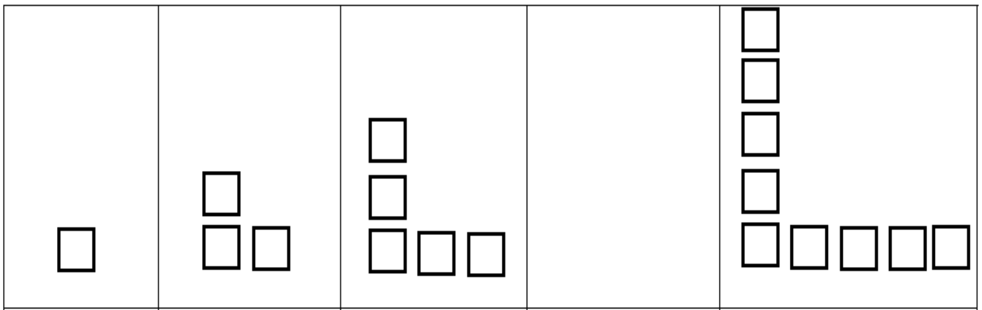

Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

Dibujen la Fig. 4

Describan cada figura, relacionándolas entre sí.

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 10?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 25?

¿Cuántos cuadros tendrá la figura 73?

¿Cómo hicieron para encontrar la figura 73?

¿Cómo pueden indicar y expresar matemáticamente lo que está sucediendo con ellas?

¿Existirá alguna regla o fórmula que indique el crecimiento de las figuras? si es así, intenten establecerla. Si no es posible, expliquen por qué no lo es.

Se esperaba que los estudiantes detectaran que, conforme avanza el número de figura, aumenta dos cuadrados, y que lo puedan representar mediante una expresión algebraica. Las variables didácticas consideradas en este ejercicio son: el acomodo de cuadros en cada figura, las preguntas que se hacen para que detecten que pueden representarlo mediante otro tipo de representación.

. Situación de Formulación

Las preguntas que se formularon tenían la intención de que los estudiantes comenzaran contestándolas por medio de respuestas gráficas, es decir, que dibujaran los cuadros que pedían los términos de la sucesión para que se diesen cuenta de cuál iba a ser la proporción en la que aumentaba; después se consideraba el aumento en mayor cantidad para que pensaran otra manera de hacerlo no gráfica, gráfica o aritmética, sino que desarrollaran un pensamiento más profundo.

. Situación de Validación

Se consideró que se llevaría a cabo cuando los estudiantes ya tuvieran las respuestas de las actividades y que éstos expondrían sus resultados ante sus compañeros y los discutirían en caso de que no fueran correctos.

. Situación de Institucionalización

El profesor debería reafirmar y mostrar el resultado correcto que tuvieran los estudiantes para que todos dispusieran de un resultado común y estuvieran convencidos que ése era el resultado. Se pretendía crear la visualización del resultado correcto a través de preguntas sin mostrarles el resultado, sino que ellos descubrieran si su resultado era correcto o no.

Análisis a posteriori

Se optó por llevar a los estudiantes a un buen desarrollo por medio de preguntas que ocasionaran la devolución de la actividad; en el momento de repartirla se observó que éstos se involucraron buscando las estrategias necesarias para resolverla, logrando una buena situación de acción. En seguida se pasó a la situación de formulación, mientras observábamos lo que contestaban los estudiantes, pasábamos por los lugares de los equipos, veíamos sus procesos de resolución y les formulábamos preguntas que ocasionaran reflexión acerca de la actividad.

A pesar de tener bien orientado el trabajo y que todos los equipos llegaron a tener una buena respuesta en la primer pregunta, hubo concepciones inadecuadas en las respuestas en que los alumnos intentaban encontrar la solución (imagen 3), pero no pudieron llegar a una expresión algebraica; el signo igual sirvió como apoyo para seguir con la sucesión, dando por resultado una respuesta errónea que para los alumnos, era válida.

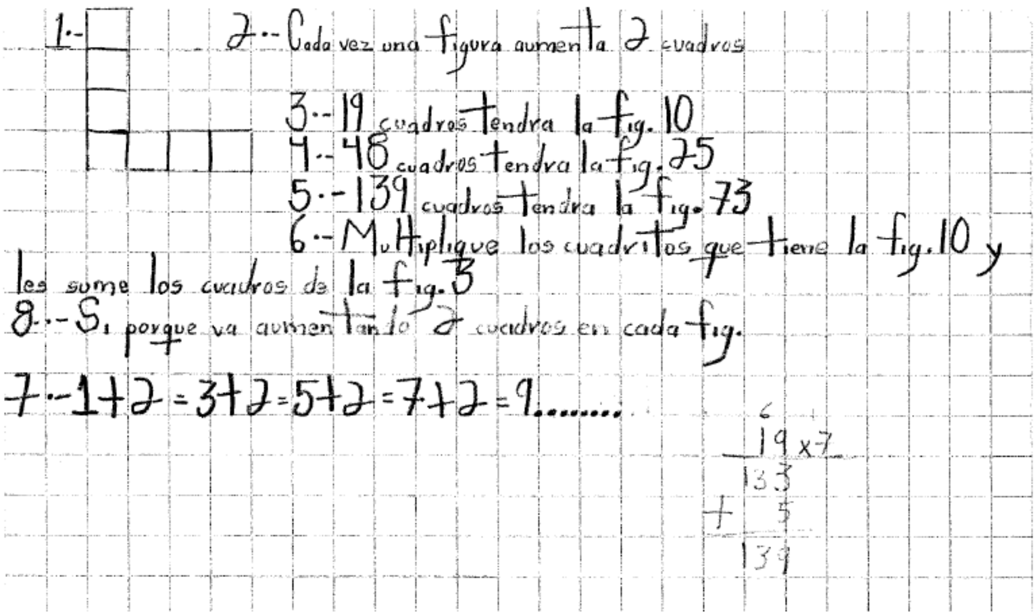

Imagen 3. Resultado del equipo de Arantza, una de las concepciones inadecuadas que se mostraron en la resolución de la actividad

El equipo de Andrea sí llegó a la formulación de una expresión algebraica, con la cual podían saber la cantidad de cuadrados en cada término que se les pidiera (Imagen 4), lo nombraron "Fórmula", ésa es la manera en que ellos conocen a las expresiones en las que intervienen las letras y los números, porque regularmente se han trabajado en contextos geométricos.

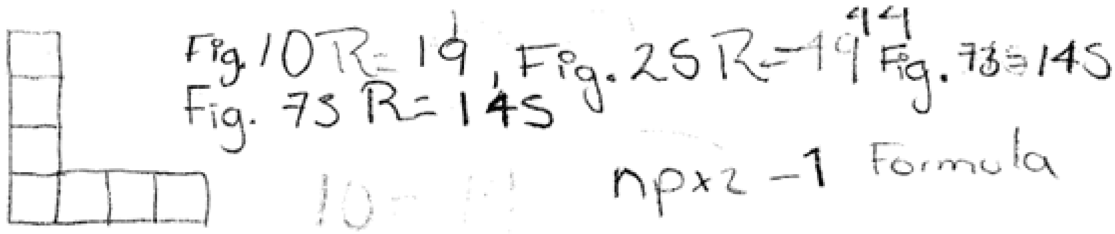

Imagen 4. Respuesta dada por el equipo de Andrea, en la que llegaron a la formulación de una expresión algebraica

En general los estudiantes tenían una buena idea sobre lo que pretendía esta actividad; sin embargo hubo quienes no llegaron a establecerse más allá de lo aritmético; es decir, sólo llegaron a concluir que se iba sumando de dos en dos para lograr formar todos los términos de la secuencia.

Para mostrar el error de los estudiantes se pueden hacer varias conjeturas, sin embargo vamos a suponer que no han cambiado su forma de pensar numéricamente y esto les impide pensar en la obtención de una letra para representar un número, Pierce (1931-1958, citado en Radford 2013) denomina "abducción" a ese proceso y establece que es la forma que utiliza un alumno para pasar de un término a otro, llegando a una generalización aritmética, sin pensar en una forma de representarlo en otro lenguaje.

La situación de validación se conjuntó con la institucionalización porque el investigador detectó que hacía falta un moderador que dirigiera la actividad para llegar a una conclusión correcta y como en todo el transcurso de la actividad, el investigador participó en la obtención de la conclusión que se derivaba de la respuesta de los alumnos, para lo que formuló preguntas que los condujeran hacia el buen establecimiento de la respuesta pedida.

A pesar de que los estudiantes habían contestado correctamente, sin embargo al revisar las hojas de trabajo se dedujo que no cambió su forma de pensar, seguían afirmando que añadiendo dos cuadrados, se llegaba a la respuesta deseada, sin relacionarla con la expresión algebraica a la que se había llegado.

Resultados y discusión

Con la resolución de esta actividad se puede comenzar a analizar los elementos que intervienen o deberían intervenir al comenzar a desarrollar un pensamiento algebraico. Por medio de la forma en que los alumnos realizaron la actividad se ha intentado detectar elementos a tener en cuenta para lograr que el desarrollo de este pensamiento sea adecuado para transitar al Álgebra.

Se llegó a la conclusión de que la mayoría de los alumnos pudo contestarla, gracias a la participación de "una figura de autoridad". Era necesario que existiera un moderador porque los alumnos, por sí solos no desarrollarían tales reflexiones. Lo habitual es tener que realizar actividades en las que el profesor proponga ejercicios para resolver de forma mecánica, sin darle significado a lo que están haciendo, es una metodología en la cual los estudiantes sólo contestan como respuesta al contrato didáctico que se ha establecido en el aula.

A pesar de que los estudiantes disponían de nociones correctas acerca de lo que iban a contestar, es necesario señalar que se les hacía difícil comprender cómo una letra podría representar a algún número porque, en las actividades se observó que algunos equipos pudieron llegar a la formulación de una expresión algebraica que aunque no fuera de manera formal, sí aparecían expresiones en las que una letra representaba el número que variaba o por lo menos un símbolo que representaba un número desconocido, pero la mayoría sólo lo hicieron de manera numérica, estableciendo que iba a ir aumentando de dos en dos cada término y afirmando lo que han indicado las investigaciones y es el hecho de que a los estudiantes se les hace difícil el cambio de pensamiento.

Haciendo uso de la teoría que asegura la existencia de dificultades, errores y obstáculos, pueden relacionarse algunos pensamientos inadecuados de los estudiantes en esta secuencia con los que aparecen como generales en el momento de iniciar el trabajo con el Álgebra escolar, por ejemplo, no pueden cambiar la idea de que una letra puede representar cualquier número. Palarea (1998) menciona que, en general, cuando iniciamos el tratamiento del Álgebra escolar no damos significado al uso de la letra, sino que utilizamos símbolos para representar un valor desconocido, de forma que puede concluirse que los estudiantes terminan haciendo "*una 'no interpretación' de la letra… y, en este proceso los estudiantes ignoran la letra, o la reconocen pero no tiene significado*" (p. 62).

Los estudiantes tienden a la *necesidad de clausura*, esto se observó cuando un equipo supo establecer una "fórmula" que satisfacía lo pedido y en el momento de expresarlo tenían que igualar la expresión con algún término, haciendo notar que necesitan que esa "fórmula" fuera igual a un número concreto para dar un valor indicado. Ruano et al. (2003) atribuyen a este tipo de procesos un error común que tienen los alumnos cuando comienzan a desarrollar el pensamiento algebraico, que denominan *necesidad de clausura*, esto es los estudiantes no pueden asimilar una expresión numérica o algebraica "abierta" porque no aceptan que esas expresiones no puedan cerrarse y no generen expresiones numéricas o algebraicas "cerradas", como resultado.

También se observó que hubo casos en que los estudiantes utilizaban de manera errónea el signo igual, de modo que establecían un signo de igualdad para separar cada término de la secuencia, independientemente de que fuesen expresiones equivalentes o no; en realidad, al hacer esta acción, el resultado es incorrecto, porque al separar con signos que denotan una igualdad, se está asegurando que 1 = 3 = 5 = 7 =…, que no es cierto. Se puede atribuir una explicación y es que los alumnos siguen buscando una forma de encontrarle sentido a la expresión buscada, que sea equivalente para cada término y lo hacen a través de signos incorrectos; así observamos que hacen un “cierre” de las operaciones por medio de errores en la Aritmética. Socas (2011) establece que los errores en la Aritmética que se basan en la limitada interpretación del signo igual ya ha sido estudiado y caracterizado como un error frecuente en los alumnos con el Álgebra escolar.

Finalmente, se encuentra que existen errores en los que los estudiantes muestran una ausencia de sentido a lo que se les pregunta, que caracterizan Matz (1980), Palarea (1998), Ruano et al., (2003) y Socas (2011), e informan que solamente saben razonar matemáticamente sin poder llegar a la expresión de algún resultado, ni siquiera en términos aritméticos.

La detección de errores y aciertos por parte de los estudiantes se pudo observar en las respuestas ya que aún no pueden significar la letra como un número cualquiera. Se llegó a la conclusión que se necesita un mejor análisis de las actividades, aparte del que se ha hecho de las respuestas de los estudiantes para poder caracterizar dónde están las deficiencias que muestran al contestarlas; las que se hicieron no constituyeron una muestra suficiente para llegar a esa caracterización, debido a que no buscaban fines matemáticos específicos, sino que la intención era que llevaran a los estudiantes a pensar algebraicamente. Precisa señalar que no se consideró ninguna propuesta para hacerlo; por ello, se utiliza el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF) para rescatar los elementos que deben afinarse en la fenomenología matemática que debe contener la secuencia y, de esta manera, conseguir que los estudiantes adquieran un mejor pensamiento algebraico.

Si la secuencia didáctica hubiera considerado aspectos pertenecientes a las etapas de la Competencia Matemática Formal, el resultado de este diseño aportaría mejores actividades y herramientas para desarrollar el comienzo del pensamiento algebraico, las cuales servirían para centrarnos solamente en las respuestas de los estudiantes. Aunque al hacerlo de esta manera se ha concluido que es necesario diseñar las actividades de una manera congruente con los conocimientos que los estudiantes poseen, con la fenomenología matemática para el desarrollo de un pensamiento algebraico, que potencien lo que intentan establecer y que lleven un incremento de dificultad que vaya guiando a los estudiantes "paso a paso" en la construcción de términos algebraicos.

Enfatizando los elementos que debe contener la secuencia didáctica correspondientes a la CMF, la actividad necesita una mejora. Se han caracterizado algunos elementos que se deben considerar para potencializar el conocimiento que deben adquirir los estudiantes, con la finalidad de que ahora no quede sólo en una secuencia aritmética, sino que se compruebe que la secuencia resultante sea algebraica, como lo menciona Radford (2013).

Dentro del campo conceptual se tiene que considerar lo siguiente:

Operaciones	Estructura	Proceso
• Por medio de operaciones, conocer el patrón que rige la secuencia. • Operar aritméticamente para cumplir la secuencia. • Representación formal de las operaciones. • Manipulación de elementos mediante el cambio de registro para ayudar a visualizar el crecimiento de las figuras.	• Variable como número generalizado. • Definir las reglas de la sucesión en cualquier registro. • El aumento proporcional de elementos en los términos generales de una sucesión. • Distributiva, asociativa, conmutativa, factor común.	• Cambiar la representación de registro común-gráfico a registro aritmético. • Encontrar el patrón mediante el tratamiento en el registro aritmético. • Llegar a una representación algebraica.

La creación de una situación problemática que considere los conocimientos anteriores se tiene que desarrollar bajo los siguientes aspectos:

Situación Problemática	Representación	Razonamiento (argumentos)
• Leer una actividad y observar que, prosiguiendo con lo que indica, se puede encontrar una secuencia numérica que aumenta constantemente (la progresión que debe llevar la actividad). • Llegar al cambio de representación mediante el razonamiento de un tratamiento de valores.	• Descripción de la regla en cada representación (registro). • Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla deducida. • Representación mental. • Representación aritmética y algebraica.	• Saber que se necesita cambiar el registro para resolver la situación problematica. • Saber considerar la variable como número generalizado con el que es posible operar. • El aumento proporcional de una sucesión puede ser representado por una regla.

Conclusiones

La intención de elaborar la secuencia didáctica, basándonos en estos elementos para el comienzo del pensamiento en estudiantes de primer grado de Secundaria, pretende llegar a entender cómo podemos comenzar a desarrollar esta forma de razonar, esperando obtener conclusiones que nos doten de herramientas para que exista una mejora al trabajar Álgebra.

En la actualidad se está trabajando en el rediseño de la secuencia de actividades con la intención de considerar la mayoría de elementos posibles que intervienen en el momento de su experimentación, así como en la espera de errores que se pueden cometer al realizar este tipo de actividades, los cuales ya estaban caracterizados por algunos autores y que se constatan en las soluciones aportadas por algunos estudiantes; esperamos que la nueva secuencia didáctica permita comenzar a caracterizar los elementos que se deben considerar para fomentar el pensamiento algebraico.

Queremos señalar que encontramos diferentes maneras de desarrollar el pensamiento algebraico, ya que cada alumno piensa de una manera distinta, y cada grupo de estudiantes tiene diferentes formas de interpretar la información. Ahora bien, en nuestro trabajo se propone llegar a concretar qué elementos matemáticos es posible considerar para la elaboración de la secuencia didáctica; después se tendrá que conocer a los grupos en los que se trabajará dicha secuencia para adecuarla a su contexto.

Referencias bibliográficas

Barallobres, G. (2000). Algunos elementos de la didáctica del Álgebra. *"Álgebra: enseñanza, aprendizaje y evaluación",* organizado por el departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. UNLP entre junio y noviembre de 2004.

Billings, E.; Tiedt, T. y Slater, L. (2007). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, *14* (5), 302–308.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 7 (2), 33-115.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1) 113-148. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516105.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3) 55-86. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516678004.

Cañadas M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas, *Tesis doctoral, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática*, Granada, España.

Carraher, D.; Schliemann, A. D.; Brizuela, B. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

De Faria, E. (2006). Transposición didáctica: definición, epistemología, objeto de estudio. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1 (2).

Godino, J.; Castro, W.; Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental Boletim de Educação Matemática, *Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho*, 26 (42B) abril, 483-511.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Matz, M. (1980). Towards a Computational. Theory of Algebraic Competence. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, 3, 1, 93-166.

Mcintosh, A.; Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-44.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación Primaria. *PNA*, *3* (3), 135-156.

Obando, G. y Vázquez, N. (2008). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica*. Curso dictado en el 9.º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de octubre de 2008). Valledupar.

Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años. *Tesis doctoral, Universidad de La Laguna, Departamento de Análisis Matemático*. Tenerife.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del Álgebra, *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *6* (1), 41-72.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, 3-12. Granada, España: Editorial Comares.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (23ª ed.). Consultado en http://lema.rae.es/drae/?val=%C3%Algebra.

Rojas, P. (2010). Iniciación al Álgebra escolar: Elementos para el trabajo en el aula, *Universidad Distrital Francisco José De Caldas, Memoria 11.º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Colombia,* 115-131.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de Secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 312-322.

Secretaría de Educación Pública (2006). Educación Básica. *Secundaria, Matemáticas*. *Programa de Estudio*. México, D. F.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria (Cap. V). En Rico, L. y otros (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* 125-154. Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), I*nvestigación en Educación Matemática XI*, 19-52. La Laguna: SEIEM.

Socas, M. M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. En M.M. Socas, M. Camacho, A. Morales y A. Noda (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, 9-42.

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34.

Socas, M. M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* 1-22. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Trujillo, P. (2008). Procesos de generalización que realizan futuros maestros (Tesis de maestría inédita*). Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada*. Granada, España.

Ursini, S.; Escareño, F.; Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. En *Proceedings of the 5th PME Conference,* vol. 2, pp. 7-17.