ISSN: 1695-6613

EL MODELO DE COMPETENCIA MATEMÁTICA FORMAL (CMF): UNA ORGANIZACIÓN FENOMENOLÓGICA DE LAS MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA

Martín M. Socas Robayna
Universidad de La Laguna

Con reconocimiento y afecto a Mercedes, Inés, Celia y Juan Antonio, por su colaboración al desarrollo de este apasionante mundo de la Didáctica de la Matemática.

Resumen

En este trabajo se considera el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), componente fundamental del análisis del contenido matemático, desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2010 y 2012), como una organización fenomenológica de las Matemáticas escolares. El estudio se realiza teniendo en cuenta los tres referentes fundamentales de los objetos de la Cultura Matemática: Epistemológico, Semiótico y Fenomenológico, que se organizan y relacionan mediante el modelo denominado CMF. Se aplica esta organización fenomenológica, a modo de ejemplo, al análisis de un contenido curricular (Fracciones y Decimales, 1.º de ESO) y a un problema verbal de estructura numérica-algebraica en un entorno geométrico.

Palabras clave: Cultura Matemática; Epistemología; Semiótica; Fenomenología; Análisis del contenido matemático**.**

Abstract

This paper considers the model of Formal Mathematical Competence (FMC) as a key component of the analysis of the mathematical content from the perspective of Semiotic Logical Approach (SLA) (Socas, 2010 and 2012) as a phenomenological organization of school mathematics.

The study is performed taking into account the three fundamental references of the objects of Mathematics Culture: Epistemology, Semiotics and Phenomenology, which are organized and related by means of the model referred to here as FMC.

This phenomenological organization is applied, for example, to the analysis of: a curriculum content (Fractions and Decimals, 1st year of secondary education) and to a verbal problem of a numerically algebraic structure in a geometric setting.

Introducción

La Modelización y la Generalización son procedimientos básicos en la producción del conocimiento matemático. Estos dos procedimientos, junto con la Sustitución Formal, determinan los tres procesos fundamentales que se dan en las diferentes formas de la cultura matemática: numérica, algebraica, analítica, geométrica…

La Competencia Matemática Formal (CMF) ha sido desarrollada en Socas (2010 y 2012) a partir de la organización de los objetos de las Matemáticas en campos conceptuales, considerando los diferentes estadios de desarrollo de los objetos en los mismos. Se analiza la cultura matemática como un proceso de "culturización matemática", es decir, de producción del conocimiento en esta cultura. Se distinguen y analizan los tres aspectos esenciales que caracterizan la producción de este conocimiento y que tienen que ser necesariamente considerados en el proceso de matematización de la cultura en el Sistema Educativo: el Epistemológico, considerado desde la perspectiva de los objetos y de los métodos del campo conceptual tratado; el Semiótico, que supone la denotación de los objetos matemáticos a través de las representaciones en las que el lenguaje natural y las representaciones analógicas, digitales y virtuales, desempeñan un papel relevante en la significación y funcionalidad de los objetos matemáticos; y el Fenomenológico, como lo que puede percibirse en una situación problemática de los objetos, los métodos y las representaciones matemáticas.

Las múltiples formas de la cultura matemática, organizadas desde la naturaleza de sus objetos y sus métodos (Epistemología), desde la significación y funcionalidad de sus objetos mediante las representaciones (Semiótica) y desde las diferentes situaciones problemáticas en la que están implicados estos objetos, sus métodos y sus representaciones explícitas o implícitas (Fenomenología), se caracterizan en el Enfoque Lógico

Semiótico (ELOS) en Campos Conceptuales: numéricos, algebraicos, analíticos, geométricos…

La noción de campo conceptual ha sido utilizada, especialmente, por Vergnaud (1990), en su conocida *Teoría de los Campos Conceptuales*, obviamente, con un sentido diferentes al de la propuesta fenomenológica que se hace en ELOS.

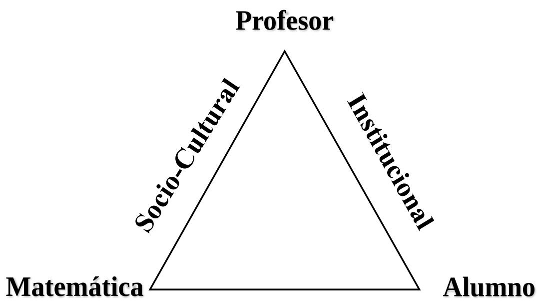
En resumen, el estudio se realiza tomando en consideración los campos conceptuales: numérico, algebraico y analítico, que son analizados mediante los tres referentes del objeto matemático: el Semiótico, el Epistemológico y el Fenomenológico, mutuamente relacionados, que se organizan y relacionan en la Cultura Matemática y que se propone en ELOS mediante el modelo denominado Competencia Matemática Formal (CMF), al que consideramos como una organización fenomenológica del contenido matemático.

El documento se desarrolla en los siguientes apartados: Breves referencias al Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), Complejidad de los objetos y especificidades de los procesos de Pensamiento Matemático, Competencia Matemática Formal (CMF), Mapa competencial de un contenido matemático curricular, Mapa competencial de los conocimientos matemáticos implicados en una situación problemática y Consideraciones finales.

Breves referencias al Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) se describe como una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiosis).

Se sitúa en el Sistema Educativo y describe, en los términos anteriores, el Microsistema Educativo, como el ámbito en el que tienen lugar las enseñanzas regladas del conocimiento matemático. Esquemáticamente se representa mediante la Semiosis siguiente:



Semiosis Microsistema Educativo

Está organizada mediante tres referentes: Materia (Matemática), Alumnos y Profesores, en el que se dan tres relaciones esenciales, que son comunes en toda semiosis o modelo de competencia. En el caso del Microsistema Educativo se describen como:

Relación 1: Entre el conocimiento matemático y el alumno, que se denomina: “Aprendizaje de la Matemática escolar como cambio conceptual”.

Relación 2: Entre el conocimiento matemático y el profesor, que se denomina: “Adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar”.

Relación 3: Entre el conocimiento matemático y el profesor a través del alumno, que se denomina: “Interacciones”.

Estas relaciones tienen lugar en un contexto determinado, en este caso, caracterizado por las tres componentes: Social, Cultural e Institucional.

De esta forma, los tres referentes y las tres relaciones esenciales, contextualizadas en las componentes del contexto, determinan para ELOS, la naturaleza y los fenómenos que se dan en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas en los sistemas reglados.

Uno de los grandes problemas de la Educación Matemática es, sin lugar a dudas, el conocimiento sobre dificultades, obstáculos y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas y el hecho de que éstos no se deben al azar, y tienen procedencias diversas (Socas, 1997).

En Socas (1997) se establecen, también, cinco procedencias diferentes de las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático y éstas están relacionadas con*: la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.*

Para el estudio del problema didáctico sobre las dificultades, obstáculos y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas escolares, ELOS toma en consideración y organiza los cinco ámbitos anteriores en los que emergen las dificultades y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas, en especial, en los campos numérico, algebraico y analítico.

Para este fin, ELOS organiza tres modelos de competencia (semiosis): Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (CC) y Competencia de Enseñanza (CE), que conforman los referentes que describe la Semiosis General que planifica y gestiona la investigación en el microsistema educativo. Esquemáticamente:

En resumen, ELOS planifica y gestiona la investigación de los problemas didáctico-matemáticos que se dan en el microsistema educativo mediante el uso de la semiosis general anterior, que se describe mediante los tres Modelos: Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (MCC) y Competencia de Enseñanza (MCE) y de las tres relaciones didácticas esenciales de toda semiosis, contextualizadas en el microsistema educativo, que tienen como puntos de referencia las tres componentes: Social, Cultural e Institucional.

En este trabajo, tomamos en consideración la organización de la CMF, que está relacionada con la complejidad de los objetos de las Matemáticas y con las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, y es considerada como una de las componentes que caracteriza el Análisis del Contenido Matemático.

Complejidad de los objetos y especificidades de los procesos de Pensamiento Matemático

El estudio de la complejidad de los objetos matemáticos y las especificidades de los procesos de pensamiento en Matemáticas, requiere tomar en consideración la Cultura Matemática y analizarla como un proceso de "culturización", es decir, de producción del conocimiento en esta Cultura. Debemos, en consecuencia, distinguir y analizar los tres aspectos esenciales que caracterizan la producción de este conocimiento: el Epistemológico, el Semiótico, y el Fenomenológico.

Consideramos, en primer lugar, el elemento epistemológico, de forma que en este proceso de caracterización de los objetos matemáticos, nos referimos a su naturaleza, diferenciando el objeto de las formas de representarlo. Por ello, señalamos diferentes cuestiones relevantes sobre la naturaleza del conocimiento matemático, para analizar después el papel que atribuimos a los objetos matemáticos y a los sistemas de signos matemáticos.

En la actualidad, las características más sobresalientes de las Matemáticas pueden ser abordadas, desde dos grandes posiciones que han caracterizado la naturaleza del conocimiento matemático durante las distintas épocas: la prescriptiva (o normativa) y la descriptiva (o naturalista). La primera procede de una posición absolutista de la Matemática y, la segunda, de una posición relativista, que analiza el conocimiento matemático desde la práctica matemática y sus aspectos sociales. Del análisis de los aspectos de racionalidad que subyacen en la actividad matemática en las dos grandes perspectivas adoptadas, se pueden distinguir: en la primera, la racionalidad matemática como una propiedad de los sistemas formales, y en la segunda, como una propiedad de la empresa humana, que abre el horizonte de una racionalidad fuera de los ámbitos de la lógica formal y sustentada en la actividad de los matemáticos, en la historia y en el contexto socio-cultural. De ellas, no obstante, se pueden extraer tres aspectos esenciales que caracterizan la Matemática y que deben ser tenidos en cuenta en su enseñanza/aprendizaje:

- La Matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado (campos conceptuales) y socialmente compartido. Esta organización lógica de los conceptos, propiedades, teoremas..., explica un gran número de dificultades y obstáculos en el aprendizaje.

- La Matemática es una actividad de resolución de problemas, socialmente compartida. Estos problemas pueden tener relación con el mundo natural o social o ser problemas internos de la propia disciplina. La respuesta a estos dos tipos de problemas explica la evolución y desarrollo progresivo de los objetos matemáticos (conceptos, teorías...). La actividad de resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que ocasiona dificultades en el aprendizaje de la Matemática.

- La Matemática es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema de signos propios en el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje, tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento que dificultan el aprendizaje.

En relación con el referente semiótico, tenemos que considerar que la comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza por medio de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Por ejemplo, el lenguaje de las Matemáticas opera en dos niveles: el nivel semántico -los signos son dados con un significado claro y preciso del objeto matemático-, y el nivel sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas del sistema de representación sin referencia directa a ningún significado del objeto-. Por tanto, los objetos de las Matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional (procedimental), de carácter dinámico, en el que los objetos son vistos como un procedimiento, y el estatus conceptual, de carácter estático, en el que los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos *estatus* constituyen, obviamente, dos aspectos integrantes de los objetos de la Matemática que le confieren un enorme grado de complejidad.

Encontramos que, en el análisis de la naturaleza de los objetos de la Matemática, es inevitable considerarlos en relación con los sistemas de signos de la Matemática, es decir, hay necesidad de relacionar, necesariamente, los aspectos epistemológicos con los semióticos del objeto matemático.

En resumen, los objetos matemáticos y los sistemas de signos matemáticos, constituyen, junto con la actividad de resolución de problemas, los tres aspectos esenciales del proceso de culturización matemática que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura, es decir, en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la misma en los sistemas escolares. Esta perspectiva de la Matemática nos obliga, desde el punto de vista del aprendizaje, a considerar de manera general, la naturaleza de los entes matemáticos, diferenciando el "objeto" y las formas de "representarlos". Por ello, es necesario describir el papel que atribuimos a los "objetos matemáticos" y a los "sistemas de signos matemáticos" y establecer las relaciones entre el objeto matemático y sus representaciones.

Es común hablar del lenguaje matemático como un sistema de signos matemáticos (SSM) en el que se distinguen dos subconjuntos de signos: "signos artificiales" (propios de la Matemática), y "signos naturales" o de la lengua usual. El lenguaje vernáculo es el instrumento práctico que permite indicar cómo han de utilizarse los signos del lenguaje artificial (De Lorenzo, 1971).

Otros autores, como Kieran y Filloy (1989), sugieren sustituir la noción de Sistema de Signos matemáticos por la de Sistema Matemático de Signos (SMS), con su código correspondiente. Esta noción de Sistema Matemático de Signos es lo suficientemente amplia que permite analizar no sólo los textos matemáticos históricos sino, también, las producciones de los alumnos en clase de Matemáticas. Este punto de vista supone situarse en una semiótica de las Matemáticas centrada en los sistemas de significación y en los procesos de producción de sentido antes que en el estudio de los signos.

De las anteriores consideraciones emerge como esencial la noción de representación semiótica de un objeto matemático. Se considera, como punto de partida la posición de Duval (1993), quien caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: "un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1) La presencia de una representación identificable.

2) El tratamiento de una representación, que es la transformación dentro de la misma representación.

3) La conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Indicamos, ahora, la posición adoptada desde ELOS, para establecer la caracterización de la representación y su relación con el objeto matemático representado, es decir, las relaciones entre los objetos del campo conceptual, los signos que los representan y sus significados en las Matemáticas. Se expresa mediante la siguiente SEMIOSIS o Modelo de Competencia que describe la FENOMENOLOGÍA, asociada a los objetos matemáticos en relación con los signos y los significados, tal como se representa en la siguiente figura:

De esta manera, la noción de REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA queda determinada por los referentes: signo, objeto y significado, y caracterizada como un Signo que:

(1) Tiene ciertos caracteres que le son propios (contexto)

(2) Establece una relación diádica con el significado

(3) Establece una relación triádica con el significado a través del objeto; esta relación triádica es tal que determina al signo a una relación diádica con el objeto y al objeto a una relación diádica con el significado.

Esta caracterización de la Representación Semiótica tiene como punto de partida la posición de Peirce (1987), en la que el signo se presenta como una relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo está pues relacionado con tres instancias separables analíticamente: Representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que le conecta con el objeto), Objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento) e Interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta).

Análogamente, esta caracterización de la representación semiótica, requiere como en el caso de Duval, el reconocimiento (identificable), la transformación y la conversión.

Analizamos ahora, a modo de ejemplo, la dualidad procedimental (operacional)-conceptual de los objetos matemáticos, tomando como referencia las formas numéricas, algebraicas y analíticas.

Tratamos, en consecuencia, de caracterizar esta dualidad procedimental-conceptual y de relacionar los signos con los objetos y sus significados. Esta dualidad del objeto matemático ha sido utilizada e interpretada por distintos autores Hiebert y Lefevre (1986), Douady (1986), Sfard (1991), Socas (2001)…

Consideramos, a efecto de caracterizarla, los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), quienes en relación a las nociones de conocimiento conceptual y procedimental, señalan:

> *"Conocimiento conceptual se caracteriza claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento".*
>
> *"Conocimiento procedimental se construye en dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las matemáticas. La otra parte consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas...En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una clase de conocimiento procedimental consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos. La segunda clase de conocimiento procedimental consiste en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos".*

Es, ciertamente, una forma de explicitar la dualidad procedimental-conceptual, es decir, la convivencia de los tipos de conocimiento en Matemáticas. Los autores ponen de manifiesto características diferentes de cada uno de ellos. El conocimiento conceptual es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna; se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. Sin embargo, el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas; se trata de un conocimiento que puede generarse, según los autores, a partir de aprendizajes rutinarios.

Dichos autores determinan relaciones entre ambos conocimientos, de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan, b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas, y c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

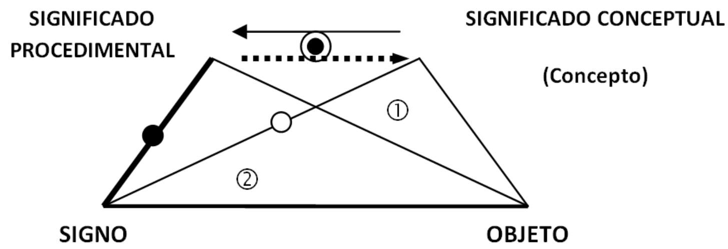
En Socas (2001) se estudia, también, la dualidad procedimental-conceptual, en el marco del enfoque Lógico Semiótico (ELOS), a partir del análisis de la función semiótica que deriva del plano denotativo y connotativo de la tríada signo-objeto-significado, que esquemáticamente se representa como sigue:

SIGNO			OBJETO	SIGNIFICADO (conceptual)	PLANO DENOTATIVO
SIGNO	OBJETO	SIGNIFICADO (procedimental)			PLANO CONNOTATIVO

Como hemos señalado anteriormente, el punto de partida es la tríada de Peirce, que se expresa, ahora, mediante la tríada signo-objeto-significado. Explicitar las relaciones que se dan en esta tríada en los dos planos de la función semiótica: el denotativo, que representa el significado referencial o del contenido y el connotativo, que representa el significado no referencial o de la expresión, constituye la primera aproximación para establecer el papel de los objetos y los signos en el lenguaje matemático y es una forma inicial de expresar la dualidad procedimental-conceptual.

En ELOS se analiza la dualidad procedimental-conceptual con el propósito de establecer una interpretación fenomenológica que integre los aspectos epistemológicos y semióticos de los objetos matemáticos.

Para ello se considera la función semiótica que deriva del plano denotativo y connotativo de la tríada: signo-objeto-significado, y se distinguen dos sentidos del término “significado”: el significado procedimental, referido a la relación diádica del signo con el significado, y el significado conceptual, a la relación triádica del signo con el significado por medio del objeto. Esta separación de los significados, nos permite representar las diferentes relaciones mediante un trapecio, en el que sus vértices representan: el signo, el objeto, y los significados procedimental y conceptual, como se recoge en el siguiente cuadro:



En este esquema se representan cuatro relaciones que describen en ELOS la dualidad procedimental/conceptual. La primera es la relación entre el signo y el significado conceptual por medio del objeto (1), que se caracteriza como "denotación" del signo, y se designa como "significación conceptual". La segunda es la relación entre el signo, y el significado procedimental, que constituye la significación dinámica (2) y está caracterizada por el conocimiento procedimental; se trata ahora de la "significación sintáctica". La tercera es la relación entre el significado conceptual y el procedimental, que se denomina "designación semántica" (flecha continua). La cuarta es la relación entre el significado procedimental y el conceptual, que se denomina "significación semántica" (flecha discontinua). Estas relaciones se describen en el trabajo de Hiebert y Lefevre (1986) aunque, muy someramente, las dos últimas.

En este trabajo trataremos de describir fenomenológicamente estas relaciones desde consideraciones epistemológicas y semióticas.

Esta dualidad procedimental-conceptual pertenece a lo que denominamos la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos, y debe ser entendida en el marco del desarrollo de éstos en diferentes etapas, que en el caso de ELOS se caracterizan como estadios de desarrollo y se denominan: semiótico, estructural y autónomo (Socas, 2010).

Son estos aspectos los que ponen de manifiesto la complejidad de los objetos matemáticos y la naturaleza abstracta de la Matemática que generan procesos de pensamiento matemático en los que se dan rupturas y que son especificidades propias de estos procesos.

En resumen, la organización de los objetos y las especificidades del pensamiento matemático caracterizan el Análisis del contenido Matemático en ELOS, y se articula mediante los dos referentes: la Competencia Matemática Formal (CMF), que se presenta como una organización fenomenológica de los objetos numéricos, algebraicos y analíticos, que expresa la epistemología de los objetos en relación con sus representaciones (Semiótica), y los Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM).

La Competencia Matemática Formal (CMF)

A efectos de establecer el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos numérico, algebraico y analítico, desde una perspectiva fenomenológica, es necesario determinar, la naturaleza de los objetos de la Matemática y su relación con los sistemas de signos de la Matemática, es decir, los aspectos relacionados con su epistemología y su semiótica.

Como hemos señalado anteriormente, los objetos matemáticos y los sistemas de signos matemáticos constituyen, junto con la actividad de resolución de problemas, los tres aspectos esenciales del proceso de culturización matemática, que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura, es decir, en el proceso de enseñanza/aprendizaje de dicha cultura en los sistemas escolares.

Descritos los aspectos relativos a la naturaleza de los objetos matemáticos y al papel del lenguaje matemático, se describe, finalmente, la posición adoptada desde ELOS, en relación con la Cultura Matemática. Ésta es considerada como una disciplina multiforme, que emerge y se desarrolla como una Actividad Humana de Resolución de Problemas. Los Problemas tienen una característica común "la búsqueda de regularidades o patrones" y el problema matemático por excelencia es "la modelización". La Cultura Matemática crea un Sistema de Signos propios para expresar los comportamientos regulares o patrones y este conjunto de regularidades o patrones se organiza en "campos conceptuales". Los elementos de estos campos conceptuales son los "objetos matemáticos". Estos objetos se "encarnan", es decir, se hacen observables y ostensibles, mediante el sistema de signos.

Las relaciones entre los objetos del campo conceptual, los signos que los representan y sus significados en la disciplina Matemática se expresan mediante la Semiosis: Signo, Objeto y Significado, descrita en el apartado anterior, y se considera como un Modelo de Competencia que describe la FENOMENOLOGÍA asociada a los objetos matemáticos en relación con los signos y los significados.

Desarrollamos ahora lo que denominamos Competencia Matemática Formal (CMF), una de las dos componentes del Análisis del Contenido Matemático, y lo haremos para los tres campos conceptuales: Números, Álgebra y Análisis, a partir de la naturaleza de los objetos matemáticos y su relación con los sistemas de signos, mediante una organización fenomenológica.

La Competencia Matemática Formal (CMF) considera los objetos de la Matemática como una Disciplina Científica y muestra la organización formal de estos objetos en su campo conceptual en relación con los conceptos, fenómenos y funciones implicados. Tiene como punto de partida la organización de los objetos matemáticos en su complejidad y para ello considera sus dimensiones conceptual, semiótica y fenomenológica y éstos se organizan desde la perspectiva lógica y semiótica que hemos considerado (Socas, 2001 y 2007).

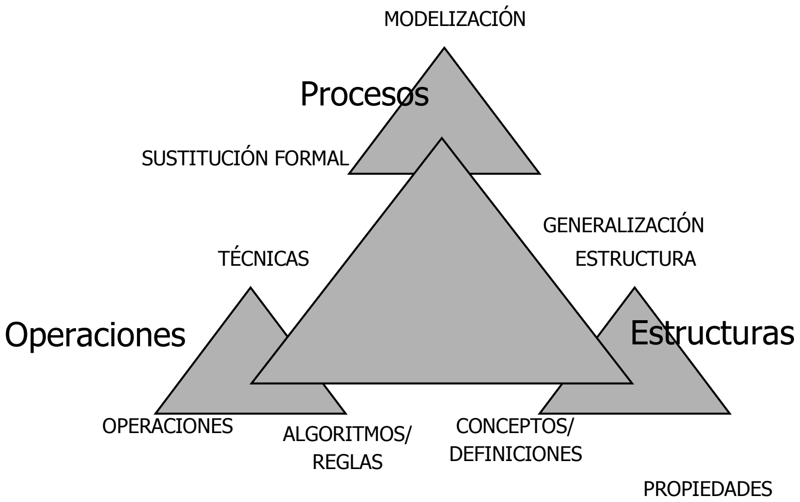
En esta presentación, tomaremos en consideración los campos conceptuales numérico y algebraico y nos situaremos en el nivel temático de ESO. En consecuencia, es necesario explicitar y relacionar los objetos de los campos conceptuales numérico y algebraico, la semiótica de los lenguajes numérico y algebraico y la fenomenología de estos conocimientos (Socas, 2010).

La caracterización de los campos conceptuales de los Números y el Álgebra supone, de una parte, organizar la complejidad de los objetos de estos dos campos y, de otra, tomar en consideración los diferentes procesos en los que están presentes los conocimientos numérico y algebraico. Los objetos de estos campos, como todos los objetos matemáticos, tienen un carácter dual: semántico y sintáctico, que se manifestan tanto en los fenómenos que organizan como en las funciones que desarrollan. Por ello, para poder relacionar los signos con los objetos numéricos y algebraicos y sus significados, hemos tenido que caracterizar la dualidad procedimental-conceptual.

Finalmente, tendremos en cuenta la fenomenología de los conocimientos numérico y algebraico, en el nivel temático de la Educación Secundaria, que se describen como las habilidades y destrezas para manipular (reconocer y transformar) números, letras y otros símbolos que pueden significar cosas equivalentes o diferentes y, también, como la construcción de operaciones, procesos, expresiones o entidades abstractas por medio de relaciones bien definidas.

La modelización de los diferentes aspectos de los Números y del Álgebra: conceptual, semiótico y fenomenológico, nos permite establecer la Competencia Matemática Formal (CMF), y como ésta se puede expresar como un modelo de competencia organizado en relación con los tres elementos: campo conceptual, resolución de problemas y lenguaje propio, descritos anteriormente como factores que caracterizan a la disciplina matemática.

Se caracteriza así la Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos anteriores, mediante la siguiente semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos y, como contexto, las situaciones problemáticas, las representaciones (lenguaje) y los argumentos. De forma esquemática:



En este esquema se expresan los diferentes dominios de la actividad matemática, en relación con el campo conceptual considerado, desde la perspectiva formal, así como sus diferentes relaciones. Cada relación triangular es considerada como una Semiosis en la que se dan, necesariamente, las tres relaciones descritas anteriormente. En este marco se interpreta y se describe la dualidad de los objetos matemáticos en relación con el conocimiento matemático conceptual/procedimental del campo tratado.

De manera concreta, si analizamos una actividad relacionada con los números o el Álgebra, ésta puede describirse teniendo en cuenta las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y sus relaciones. Cada componente, a su vez, está determinada por otras tres que describen una nueva semiosis. La componente "Operaciones" queda determinada por: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente "Estructuras" por: conceptos (definiciones), propiedades y estructura; y la componente "Procesos" por: sustitución formal, generalización y modelización.

A modo de ejemplo, describimos brevemente el referente "Procesos" del campo conceptual, determinado por la Semiosis: sustitución formal, generalización y modelización.

De las diferentes Semiosis que determinan la propuesta fenomenológica de los procesos, observamos que éstos están necesariamente relacionados con las operaciones, independientemente o a través de las estructuras.

La Sustitución Formal, está caracterizada por:

- Conversión entre Representaciones de un mismo objeto matemático
- Registros diferentes, en una misma representación, de un mismo objeto matemático.

En general, en una sustitución formal, las reglas operacionales específicas (relación entre cantidades) ya vienen explicitadas con cantidades variables con propiedad sustitutoria, es decir, la representación o el registro del objeto matemático, es explícita.

Supone, sin embargo, la realización de diferentes acciones: reconocimiento de la representación, conversión entre representaciones o entre registros, transformaciones entre representaciones o registros que generan la simplificación o la complicación estructural…

Por ejemplo, podemos describir la Generalización algebraica, desde el punto de vista fenomenológico, por sus elementos básicos, como un proceso esencial de este campo conceptual (algebraico), relacionado necesariamente con el proceso de Sustitución Formal, sin el cual es imposible comprender la Generalización y ésta se relaciona también, necesariamente, con el referente Operacional, es decir, las diferentes semiosis que describen fenomenológicamente la generalización algebraica, determinan que el recorrido mínimo es: Generalización-Sustitución formal-Operaciones.

Desde el punto de vista educativo, el planteamiento de una situación problemática que involucre el proceso de Generalización algebraica, se puede organizar a partir de situaciones diversas: numéricas, geométricas…, en las que la regla no viene explicitada, pero sí la descripción organizada de un comportamiento regular.

A partir de la Situación problemática, que supone su identificación o el reconocimiento, se puede describir mediante cuatro pasos o momentos que facilitan el planteamiento y la resolución y que la caracteriza matemáticamente: (1) Sistematización: mediante la construcción de tablas u otros tipos de representación; (2) Reconocimiento de la Regla o Patrón; (3) Explicitación de la regla en una expresión o fórmula; (4) Verificación de la expresión o fórmula mediante ejemplos.

Este proceso de establecer una relación entre letras y números, por ejemplo, debe ser desarrollado desde su doble vertiente, que explicita la reversibilidad del objeto: pasar de lo particular (partes) a lo general (todo) y ver lo general (todo) en lo particular (partes) (Ruano, Socas y Palarea, 2014a).

Podemos caracterizar fenomenológicamente la Modelización, proceso matemático por excelencia, por sus elementos básicos (objetos matemáticos) y por las relaciones que estos tienen entre sí.

Desde el punto de vista educativo, el planteamiento de una situación problemática que involucre el proceso de Modelización, se puede organizar a partir de situaciones diversas: físicas, económicas, numéricas, algebraicas, analíticas, geométricas…, en las que se parte de una descripción no organizada de un comportamiento regular en la que no está explicitada la regla.

A partir de la Situación problemática o de la formulación de la tarea, que supone su identificación o el reconocimiento, se puede describir mediante cinco fases, que facilitan el planteamiento y la resolución y que caracteriza matemáticamente la Modelización: (1) Sistematización, explicitación y reconocimiento de la regla; (2) Matematización o formulación en términos de la regla; (3) Resolución en términos de la regla, mediante la representación elegida, lo que comporta el Análisis del modelo construido; (4) Validación (verificación) de la regla; y (5) Interpretación (Ruano, Socas y Palarea, 2014b).

En resumen, la caracterización de los Procesos, desde la Disciplina Matemática, se realiza al considerar los aspectos epistemológicos, semióticos y fenomenológicos de los objetos matemáticos, es decir, al describir los procesos en el campo conceptual y el contexto, así como al determinar las relaciones existentes.

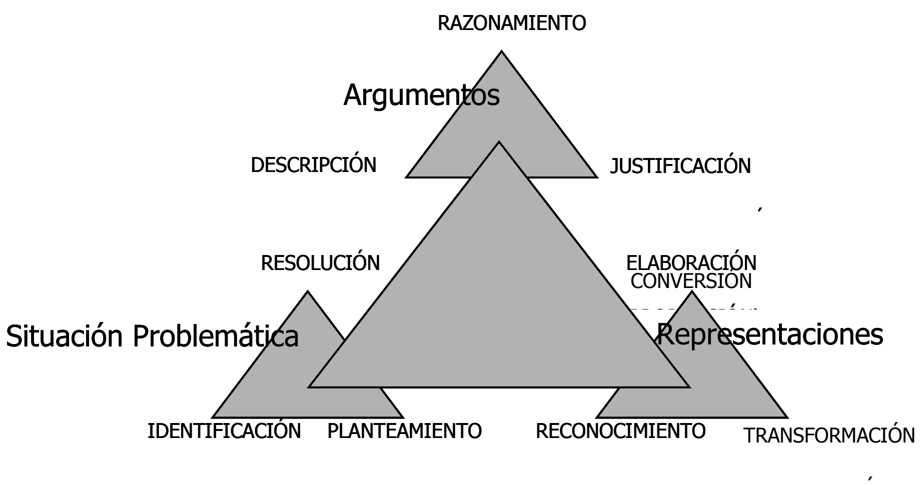
Estos procesos esenciales de la actividad matemática ocurren, como hemos señalado, en un contexto determinado por la Situación Problemática que el resolutor debe identificar, plantear y resolver; por las Representaciones que requieren su reconocimiento, su transformación y su conversión (elaboración); y por las Argumentaciones que implican descripción, justificación y razonamientos.

Observamos que los diferentes procesos matemáticos requieren por parte de los resolutores, el uso de determinadas competencias como el reconocimiento, la formulación y la validación del proceso, y que éstas, necesitan el análisis de las situaciones problemáticas, la sistematización, la manipulación, la interpretación, la verificación.… Todas ellas son acciones cognitivas implícitas, como hemos observado en estos procesos.

También hemos constatado de la Semiosis que describe los tres procesos, que la Sustitución Formal, es el único proceso que está presente siempre en cualquier situación problemática, y en consecuencia en los procesos de Generalización y Modelización.

En relación con la dualidad de los objetos: procedimental/conceptual, la organización del campo conceptual deriva del análisis anterior, en el que se explicitan las diferentes relaciones que se dan en la triada: signo-objeto-significado. De esta manera, se caracterizan: lo operacional, por la semiosis que describe el significado procedimental; las estructuras, por la semiosis que describe el significado conceptual; y los procesos, que nos facilitan el análisis de las relaciones que tienen lugar entre el significado procedimental y conceptual. No en vano, la sustitución formal emerge como el proceso que está siempre presente en la actividad matemática.

La organización fenomenológica de los Campos Conceptuales numérico y algebraico tienen sentido en la actividad matemática cuando los objetos implícitos en la actividad están contextualizados; los referentes de esta contextualización son: las situaciones problemáticas, las representaciones (lenguajes) y los argumentos (razonamientos), que están implicados en el desarrollo de la situación problemática. De forma esquemática:



Análogamente, las tres componentes del contexto, quedan determinadas por sus respectivas semiosis. En el caso de Situaciones problemáticas por la identificación, el planteamiento y la resolución; en Representaciones (lenguaje): por el reconocimiento, la transformación y la elaboración (conversión), y en Argumentos, por la descripción, la justificación y los razonamientos.

Mapa competencial de un contenido matemático curricular

A modo de ejemplo, en este apartado analizamos el uso de la Competencia Matemática Formal (CMF) como un instrumento técnico para el Desarrollo Curricular en Matemáticas, que facilita el análisis del Contenido Matemático y su organización en contenido matemático para enseñar.

En este ejemplo, consideraremos los contenidos curriculares del primer curso de la ESO, relativos a números racionales y decimales del Bloque II. Números, descritos en los apartados 3 y 6, BOC (2007), que son los siguientes:

3. Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. Fracción generatriz de un decimal exacto. Ordenación de fracciones y decimales exactos.

6. Porcentajes. Cálculo mental y escrito de porcentajes habituales. Aplicaciones a la resolución de problemas de la relación de porcentajes muy sencillos con la fracción y el decimal exacto correspondiente.

La Competencia Matemática Formal (CMF), facilita el análisis de este contenido curricular desde la perspectiva competencial; en primer lugar, lo relativo al campo conceptual, y posteriormente, la especificación del contexto en el que se desarrollan los objetos. Esta organización fenomenológica del campo conceptual y la especificación del contexto en el que se desarrolla se denomina “Mapa Competencial de los Contenidos Curriculares”, en este caso, los seleccionados tratan sobre “Fracciones y números decimales”, en el primer curso de la ESO.

En relación con el Campo Conceptual se consideran: Operaciones, Estructuras y Procesos.

En los Procesos se tratan:

- La Sustitución Formal (Cambio de representación decimal a fraccionaria y viceversa; Representación en la recta numérica y

Representaciones discretas y continuas).

- La Generalización (Fracción generatriz de una expresión decimal exacta y periódica; Fracción decimal; y El sistema de numeración decimal ampliado).

- La Modelización (Situaciones problemáticas que involucran números fraccionarios y decimales, como los porcentajes).

En estructuras, tenemos: Fracción como parte de la unidad (parte-todo); Numerador y denominador; Fracción como medida, cociente, razón, y operador; Fracciones equivalentes; Fracciones irreducibles; Fracción y número racional; Fracción decimal y no decimal; Fracción decimal y número decimal; Expresión decimal periódica de las fracciones no decimales; Fracción generatriz; Operaciones con fracciones y decimales. Propiedades; Sistema de numeración decimal ampliado; y Porcentajes.

En Operaciones, consideramos: Operaciones (aditivas y multiplicativas y Ordenación de fracciones y decimales); Algoritmos (Reducir fracciones a común denominador, Sumar y restar números decimales y fracciones con distinto denominador y Multiplicar y dividir decimales y fracciones); y Técnicas (Redondeo de un número racional en escritura decimal periódica, Representación en la recta de los números racionales en escritura fraccionaria y decimal, Equivalencias entre expresiones con fracciones, Cálculo mental y estimación y Cálculo de porcentajes).

Como hemos señalado, el Mapa Competencial de los contenidos se elabora explicitando el contexto en que se desarrollarán los objetos matemáticos del campo conceptual numérico en el nivel temático considerado, es decir, en primero de la ESO.

En relación con el Contexto se consideran: Situaciones problemáticas, Representaciones y Argumentos (Razonamientos).

En las Situaciones problemáticas, se tratan (Situaciones de parte-todo, de unión de partes, de transformación (operador), de comparación, de partición de un todo; Situaciones de partición y reparto; Situaciones de medida; Situaciones de representaciones y cambios; y Situaciones de porcentajes de cantidades discretas y continuas).

En las representaciones, se consideran (Escritura fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta; Representación digital (fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta); y Representaciones analógicas discretas y continuas (colecciones, recta numérica y áreas).

En las Argumentaciones (Razonamientos) se consideran (Esquemas: partes-todo, operativos (+, x) y (- , /), y semánticos; Usos de la fracción: parte-todo, cociente, razón, medida, operador y porcentaje; Sentido numérico (estimación: fraccionaria, decimal y porcentajes); Agrupar y desagrupar en el sistema de numeración decimal ampliado; Heurísticos; Deductivos: Esquemas e Inclusión numérica; e Inductivos (relaciones de igualdad).

El Mapa Competencial del Contenido Matemático permite, en consecuencia, caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la competencia matemática formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan a los alumnos, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, si estamos trabajando en la Educación Obligatoria.

Análogamente, permite realizar la "adaptación del contenido matemático curricular como materia para enseñar", que es como hemos señalado con anterioridad, la segunda de las relaciones esenciales que emergen en ELOS, al describir el microsistema educativo (Socas, 2001 y 2007).

Esta organización del contenido matemático para ser enseñado es una competencia profesional que se requiere para abordar el problema de la planificación de la enseñanza de la Matemática. Ahora bien, el contenido matemático, es un espacio de conocimiento o entorno que tiene diferentes ámbitos. Si tomamos como referencia la teoría de la Transposición Didáctica, éstos son: “contenido matemático de la investigación”, “contenido matemático disciplinar”, “contenido matemático curricular deseado”, “contenido matemático curricular enseñado” y “contenido matemático curricular aprendido”. Desde la perspectiva del profesor de Matemáticas, los tres últimos son ámbitos específicos del contenido matemático que el profesorado necesita identificar, analizar, comprender y planificar.

El primer ámbito que el profesor necesita organizar es el del contenido matemático curricular (cmc), contenido matemático deseado que es definible en el dominio del contenido matemático disciplinar, aunque no es organizado desde esa lógica. Mediante mecanismos y organizaciones precisas, se extraen del contenido disciplinar y se sitúan en el currículo. Realizadas estas acciones por diferentes elementos del Sistema Educativo, el contenido matemático curricular es intrínsecamente diferente del saber disciplinar, al menos en su aspecto epistemológico, y admite interpretaciones desde diferentes perspectivas, por ejemplo, la funcional, como parte de una cultura básica común (Rico y Lupiáñez, 2008).

El segundo ámbito es el que deriva de la propia disciplina (el saber matemático erudito) que podemos denominar contenido matemático disciplinar (cmd) o formal (Socas, 2010).

Por último, el tercer ámbito, es el contenido matemático para la enseñanza (cme), que comprende tanto el contenido matemático enseñado como el evaluado (Hernández y otros, 2010).

Mapa competencial de los conocimientos matemáticos implicados en una situación problemática

En este apartado se analiza una situación de aprendizaje desde la perspectiva competencial en Matemáticas. En concreto, se propone un problema verbal de estructura numérica-algebraica en un entorno geométrico.

> SITUACIÓN PROBLEMÁTICA: *Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio. ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?*
>
> (Ruano, Socas y Palarea, 2014b).

Como vemos, se propone una situación problemática que se sitúa en el conocimiento procesual, en la que se pueden involucrar, según la propuesta fenomenológica, los procesos de: Sustitución Formal; Sustitución Formal y Generalización; Sustitución Formal y Modelización o Sustitución Formal, Generalización y Modelización.

Se trata de una situación problemática en la que figuran enunciados verbales, dados en lenguaje natural, dentro de un contexto geométrico. Podemos distinguir cuatro situaciones:

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una situación operatoria de naturaleza multiplicativa en la que conoce el resultado y uno de los factores del producto, previa conversión de la situación problemática verbal al lenguaje numérico, teniendo en consideración las estructuras geométricas y de medida implícitas en el enunciado del problema.

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una modelización geométrica-numérica en la que, realizando una sustitución formal (conversión de registro al lenguaje gráfico o numérico), y considerando las estructuras geométricas implícitas en el enunciado de la tarea (área, longitud,…), utilizan una técnica para determinar el resultado mediante operaciones.

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una generalización algebraica, para lo cual deben ser capaces de identificar los datos, las incógnitas y las relaciones existentes entre ellos, y plantear de todos los rectángulos de área 8·x, la ecuación adecuada para el que tiene 64 m^2 de superficie, esto es: 160 = 8·x, siendo x la longitud del frente del nuevo terreno. En este caso, atenderemos a las estrategias utilizadas para la resolución de la ecuación (tanteo, procedimientos aritméticos, algebraicos o la combinación de varios) y a la comprobación (validación) de que el resultado satisface las condiciones del problema.

- Los resolutores pueden dar un paso más allá e interpretar la situación planteada como una modelización funcional en la que realizan una generalización, entendiendo que la situación planteada es una particularización del caso general f(x) = 8x, que relaciona el área de todos los rectángulos de ancho 8 metros y largo desconocido.

Se trata de una situación problemática en la que los conocimientos lingüísticos no presentan, en principio, ninguna dificultad. No así los conocimientos semánticos, es decir, el significado de los términos: rectangular, superficie, área, lados, dimensiones, largo, ancho…Sin embargo, sí pueden presentar dificultades, la comprensión global del texto y de la estructura del problema: numérico, geométrico, algebraico…

Las representaciones son diversas: lenguaje habitual, aritmético, geométrico, algebraico, presentes en la situación problemática y en la conversión a la nueva representación, para que esta sea operacional, como hemos señalado en las cuatro situaciones descritas anteriormente

Los argumentos o razonamientos considerados están relacionados con los esquemas partes – todo, las inducciones o las deducciones realizadas. Los resolutores tienen que construir una totalidad a partir de dos partes conocidas y relacionarla con una totalidad desconocida, para construir la igualdad numérica, algebraica o analítica. En estas relaciones se pueden generar razonamientos inductivos y deductivos.

En resumen, se trata de una situación problemática que puede presentar dificultades para los alumnos ya que su resolución exige el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo, en un contexto geométrico que requiere el dominio de conceptos asociados a la Geometría: superficie, área, dimensiones, longitud, largo, ancho y, por lo tanto, el reconocimiento de la estructura geométrica implícita en el problema, además de las estructuras numéricas, algebraicas o analíticas, dependiendo de la conversión de la situación problemática a otra representación operacional.

El análisis anterior de los Conocimientos implicados en un Problema, mediante el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), es lo que se denomina Mapa Competencial del Problema (MCP), que resulta de utilidad tanto para desarrollar el proceso de enseñanza como para analizar el aprendizaje del alumno.

Por ejemplo, desde la perspectiva del alumno se pueden analizar los recursos matemáticos que éstos ponen en juego, así como las diferentes “habilidades heurísticas” para representar en el lenguaje numérico, algebraico o analítico de los datos que figuran como un enunciado verbal en un entorno geométrico. En este análisis debemos diferenciar y relacionar las tres fases: Reconocimiento, formulación (conversión) y manipulación (resolución).

En la conversión, por ejemplo, se puede observar si los alumnos son capaces de identificar los datos, las incógnitas y las relaciones existentes entre ellos, si entienden la pregunta formulada y plantean la ecuación adecuada.

En la resolución, se pueden observar las estrategias utilizadas (ensayo y error, procedimientos aritméticos, algebraicos, analíticos o la combinación de varios), y si realizan la comprobación de que el resultado satisface las condiciones del problema.

Consideraciones finales

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias: Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (CC) y Competencia de Enseñanza (CE).

La Organización del Contenido Matemático, se debe realizar mediante dos componentes que el citado Enfoque denomina: Competencia Matemática Formal (CMF) y Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM). Estas componentes se determinan a partir del análisis de la naturaleza de los objetos matemáticos y sus representaciones. Estos objetos se organizan en campos conceptuales y tienen una necesaria relación con sus representaciones. Objetos y Representaciones están explícitos o implícitos en las diferentes situaciones problemáticas, matemática o extramatemática, y organizan diferentes fenómenos que, para los campos numérico, algebraico y analítico, se concretan en la CMF.

El modelo de Competencia Cognitivo (CC)**,** es el segundo referente, y organiza las funciones cognitivas específicas de los objetos matemáticos tratados y los aspectos estructurales del aprendizaje, a partir de los objetos de la CMF, es decir, simula los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual considerado. Por último, el tercer referente, es decir, el modelo de Competencia de Enseñanza (CE) describe las acciones de los sujetos implicados, los procesos de comunicación, los mediadores, las situaciones, los contextos…, que se dan en la enseñanza, tomando en consideración, los objetos y relaciones de la CMF y CC.

En este trabajo hemos analizado la CMF como una propuesta de organización Fenomenológica del conocimiento matemático: numérico, algebraico y analítico, que integra las perspectivas: Epistemológica y Semiótica.

Esta Organización Fenomenológica, debe ser considerada como un Conocimiento Técnico, que se desarrolla en la práctica educativa con dos finalidades: La Enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y La Investigación en Educación Matemática.

En relación con la primera finalidad, facilita la reconstrucción del conocimiento matemático desde la perspectiva global de la Cultura Matemática, es decir, desde la Competencia Matemática; la Organización del contenido matemático para la enseñanza, desde la Competencia Matemática Básica y desde los fines de la Matemática en el Currículo, como hemos mostrado en la realización del Mapa Competencial para el contenido curricular del primer curso de la ESO relativo a números racionales y decimales; y la caracterización de las situaciones de aprendizaje (actividades) matemáticas desde la perspectiva competencial de las mismas, como hemos mostrado en la realización del Mapa Competencial de los conocimientos implicados en una situación problemática.

La investigación en Educación Matemática, por su parte facilita también el Estudio de las dificultades, obstáculos y errores en su enseñanza y aprendizaje.

En resumen, el modelo CMF es considerado en ELOS, como una organización fenomenológica de los objetos de la “Matemática” que integra las dimensiones epistemológica y semiótica, y que es utilizado en la

Educación Matemática como un Sistema de Posicionamiento general y específico, constituido por las tres categorías universales del conocimiento: Epistemología, Semiótica y Fenomenología, que utiliza la triangulación (Semiosis) para determinar las posiciones de los objetos matemáticos en la Cultura Matemática y en la Matematización de la cultura con precisión.

Como señaló René Thom (1923-2002), "El verdadero problema al que se enfrenta la Enseñanza de las Matemáticas no es el rigor, sino el problema del desarrollo del Significado y de la Existencia de los Objetos matemáticos". (Howson, 1973, p. 202). En este sentido, en relación con los contenidos matemáticos curriculares, el modelo MCF ayuda a caracterizar el significado y la naturaleza de los objetos matemáticos en los campos numérico, algebraico y analítico, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En relación con las actividades de aprendizaje, debemos señalar que el dominio de la actividad matemática de cada una de las tareas nos permite situarlas, como punto de partida, en uno de los ámbitos del campo conceptual estudiado: operacional, estructural y procesual, contextualizadas como situaciones problemáticas que los alumnos deben identificar y resolver, que implican diferentes escrituras y razonamientos, es decir, tareas que están diseñadas para provocar, inicialmente una posible respuesta operacional, estructural o procesual, aunque ello no garantiza que ésta sea la respuesta inicial del alumnado. Sin embargo, el modelo de competencia que describe el análisis del contenido, permite observar los diferentes itinerarios que siguen los alumnos.

Como señala Radford (2013), el propósito de la tarea que se propone no debe estar totalmente claro para el alumno, sí para el profesor. Es esta asimetría una característica esencial de las tareas propuestas en un proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Emerge en este contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y, obviamente, en las investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de éstas, la necesidad de un control epistemológico, semiótico y fenomenológico, de los conocimientos matemáticos y didácticos implícitos en las tareas de enseñanza y aprendizaje propuestas.

AGRADECIMIENTOS: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación mediante el Proyecto: "Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, de Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación" (EDU2011-29324).

Referencias bibliográficas

BOC (2007) (Boletín Oficial de Canarias núm. 113, jueves 7 de junio de 2007). *Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias.*

De Lorenzo, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

Douady, R. (1986). Approaches des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11,* 77-110.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México, 1997).

Hernández, J.; Muñoz, M.; Palarea, Mª. M.; Ruano, R. y Socas, M. M. (2010). La programación por competencias en la clase de Matemáticas. Una actividad profesional básica. En M.T. González, Mª. M. Palarea y A. Maz, (Eds.), *Seminario de los grupos de investigación del pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática* (pp. 26-49). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in

Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Howson, G. (ed), (1973). *Developments in Mathematical Education.* Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge U. Press: Cambridge.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias. 7(3),* 229-240.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

Radford, L. (2013). "En torno a tres problemas de generalización" en Rico, L.; Cañadas, M.; Gutiérrez, J.; Molina, M. y Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática (Homenaje a Encarnación Castro, pp*. 3-12. Granada. España: Comares.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, Mª. M. (2014a). El proceso de Generalización en alumnos de Secundaria. *Uno*, 68, 18-29.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, Mª. M. (2014b). La Modelización Matemática en el Modelo de Competencia Matemática Formal. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 11. (To appear)

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22(1),* 1-36.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación En Educación Matemática Xi*, pp. 19-52.

Socas, M. M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, pp. 9-43.

Socas, M. M. (2012). El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular. En Arnau, D., Lupiáñez, J.L. y Maz, A. (Eds), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de* *la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de Universitat de Valencia y SEIEM.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10 (23)*, 133-170.