FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA X
ISSN: 1695-6613

LA CONCEPCIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD[1]

Matías Camacho Machín
Josefa Perdomo Díaz

Universidad de La Laguna

Manuel Santos Trigo

Cinvestav- IPN

Resumen

El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales requiere del dominio de otros conceptos matemáticos como el de función, derivada de una función o integral. En este trabajo se presenta el análisis de un cuestionario sobre el concepto de derivada, utilizado como instrumento para establecer el nivel de conocimientos de los estudiantes de primer curso de la Licenciatura en Químicas de la Universidad de La Laguna. Este cuestionario se suministró a los estudiantes previamente al desarrollo de una secuencia de enseñanza basada en la Resolución de Problemas, elaborada para introducir el concepto de ecuación diferencial ordinaria. Para realizar el análisis nos hemos centrado en los diferentes usos del concepto (Thurston, 1994) y en los elementos heurísticos y las estrategias cognitivas que muestran los estudiantes al resolver las actividades.

Abstract

The learning of differential equations requires the mastery of some other mathematical concepts such as function, derivative of a function or integral. This paper presents the analysis of a questionnaire on the concept of derivative, used as a tool to establish the level of knowledge of first year students of the Degree in Chemistry from the University of La Laguna. This questionnaire was provided to students before the development of a teaching sequence based on Problem Solving, that had been elaborated to introduce the concept of ordinary differential equation. The analysis is focusing on the different uses of the concept (Thurston, 1994) and on the heuristic element and cognitive strategies that the students use when solving the questionnaire tasks.

[1] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional I+D+i del Ministerio de Ciencia e Innovación número EDU2008-05254.

Introducción

¿De qué conocimientos matemáticos disponen los estudiantes para enfrentarse por primera vez al estudio de un concepto matemático? ¿Serán suficientes para abordar este concepto matemático y conectarlo con las ideas matemáticas que ya tienen? Estas son algunas de las cuestiones que todo profesor se hace (o debería hacerse) antes de comenzar un curso en el que se presenta un nuevo concepto matemático a los estudiantes.

En todos los planes de estudio aparecen el cálculo en una y varias variables antes de la introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y, por tanto, se supone que los alumnos han adquirido los conocimientos y destrezas necesarios para tratar este nuevo concepto, relacionados con la derivación y la integración. Sin embargo, en una investigación realizada con estudiantes universitarios que ya habían recibido formación sobre las EDO de primer orden, pudimos detectar ciertas dificultades en el aprendizaje del concepto de ecuación diferencial ordinaria, relacionadas con el hecho de que los alumnos no establecían conexiones entre este concepto y el de derivada de una función, o tenían una comprensión limitada del concepto de derivada que no les permitía establecer dichas conexiones de manera efectiva (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2007). Fruto de dicha investigación, también pudo observarse el escaso desarrollo, por parte de los estudiantes, de procesos cognitivos y estrategias efectivas relacionadas con la resolución de problemas (Camacho, Perdomo, Santos-Trigo, 2009).

Esto nos hizo plantearnos la necesidad de analizar los conocimientos matemáticos que los estudiantes tienen en relación con el concepto de derivada justo antes de introducir el concepto de EDO, puesto que el aprendizaje de este último depende, como ya hemos señalado, de las construcciones mentales que se hayan hecho en torno al concepto de derivada de una función. Este es el problema en que se centra esta investigación. Por tanto, la pregunta a la que tratamos de dar respuesta es: ¿qué características tiene la red de significados que los estudiantes de primer curso de universidad se han formado en torno al concepto de derivada de una función justo antes de comenzar con el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias?

Según García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2010), la habilidad de los estudiantes para resolver problemas que involucran, en particular, el concepto de derivada, depende de las conexiones que los alumnos hagan entre los elementos matemáticos involucrados en la formación del concepto.

Por otra parte, Thurston (1994) señala que se pueden asignar distintos significados al concepto de derivada de una función, y menciona los siguientes ejemplos:

> (1) Infinitesimal: la relación entre el cambio infinitesimal en el valor de una función y el cambio infinitesimal en la función.
> (2) Simbólico: la derivada de x^n es nx^{n-1}, la derivada de $sen\, x$ es $cos\, x$...
> (3) Lógica: $f'(x) = d$ sí y sólo si para todo ε hay un δ tal que cuando $0 < |\Delta x| < \delta$, $\left|\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$.
> (4) Geométrico: la derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, si la gráfica tiene tangente.
> (5) Velocidad: la velocidad instantánea de f(t), cuando t es el tiempo.
> (6) Aproximación: la derivada de una función es la mejor aproximación lineal a la función, cerca de un punto.
> (7) Microscópico: la derivada de una función es el límite de lo que se observa mirando con un microscopio cada vez más potente. (p. 3)

Sin embargo, aunque un grupo de estudiantes haya recibido idéntica formación en relación con determinado concepto matemático, la comprensión de cada individuo puede presentar características diferentes. En el caso particular del concepto de derivada de una función, Zandieh (2000) analiza la comprensión del concepto en nueve estudiantes que han compartido ambiente de aprendizaje y muestra las diferencias entre ellos (p. 120). De las cinco interpretaciones del concepto consideradas por Zandieh, las que con mayor frecuencia utilizaron los alumnos fueron la geométrica (como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto), seguida por la razón de cambio, que se corresponde con lo que Thurston (1994) denomina "infinitesimal".

Al terminar el análisis propuesto en esta investigación, dispondremos de una descripción de cada uno de los veinticinco estudiantes que respondieron al cuestionario en relación con los diferentes significados que asocian con el concepto de derivada de una función y cómo los utilizan para resolver problemas; ello, en un futuro, nos permitirá analizar el tratamiento que dan al concepto de EDO.

Marco conceptual

La idea principal de esta investigación es que la comprensión de los conceptos matemáticos es algo complejo. No se puede decir simplemente que un estudiante comprende o no comprende el concepto; en particular, aquellos que engloban otros conceptos matemáticos o que admiten diversas interpretaciones o usos, como es el caso de la derivada de una función. En estos casos resulta útil describir la comprensión de los estudiantes en términos de los aspectos relacionados con un concepto matemático que el estudiante conoce y las relaciones que establece entre dichos aspectos (Zandieh, 2000).

En los últimos años, el aprendizaje de las Matemáticas ha pasado a ser caracterizado por el desarrollo de ciertas habilidades, capacidades y competencias (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; Niss, 2002). Kilpatrick et al. (2001) proponen cinco elementos para caracterizar los aspectos que los estudiantes deben desarrollar como parte del aprendizaje de las Matemáticas: c*omprensión conceptual* (comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y las relaciones); *fluidez con los procedimientos* (habilidad en la ejecución de procedimientos de forma flexible, precisa, eficiente y correcta); c*ompetencia estratégica* (habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos); r*azonamiento flexible* (capacidad para pensar de forma lógica, reflexionar, explicar y justificar); y p*redisposición productiva* (inclinación habitual para ver las Matemáticas como prácticas, útiles y valiosas, acompañada de confianza en la propia eficacia y diligencia). Por otra parte, Niss (2002) distingue entre dos grupos de competencias: las relacionadas con la habilidad de preguntar y responder cuestiones de Matemáticas y utilizar Matemáticas (*pensar matemáticamente, proponer y resolver problemas matemáticos, modelizar matemáticamente y razonar matemáticamente*) y aquellas referidas al tratamiento y el dominio del lenguaje y las herramientas matemáticas (*representar objetos y situaciones matemáticas, manipular símbolos matemáticos, comunicarse en términos matemáticos y sobre las Matemáticas y hacer uso de las herramientas matemáticas*).

Estas dos perspectivas nos llevan a la conclusión de que, entre los aspectos esenciales que todo estudiante debe desarrollar en torno al aprendizaje de un determinado concepto matemático se encuentran: (i) una comprensión del concepto, las operaciones y las relaciones, de una manera integrada, entendiendo el tipo de contexto en el que resulta útil, permitiendo así el aprendizaje de nuevas ideas y favoreciendo la conexión con las que ya se poseen; (ii) habilidad en la ejecución de procedimientos matemáticos relacionados con dicho concepto, pero también para utilizarlos de manera eficiente y flexible, distinguiendo entre las situaciones en que se puedan utilizar; (iii) y la habilidad para utilizar dicho concepto y los procedimientos asociados en la formulación y resolución de problemas planteados tanto en contextos matemáticos como no matemáticos.

Consideraremos estos tres elementos para analizar la concepción que los estudiantes tienen de la derivada de una función, antes de proceder al estudio de las EDO. Así, determinaremos los distintos significados que los estudiantes asocian al concepto de derivada y cómo resuelven problemas relacionados con dicho concepto.

En relación con las diferentes interpretaciones que se pueden utilizar del concepto de derivada, tomaremos como referencia la propuesta de Thurston (1994), presentada en la introducción de este artículo, en la que se especifica un conjunto de significados que se pueden asociar al concepto de derivada, que no pretenden ser únicos, sino que son planteados como ejemplo de las diferentes formas en que se puede interpretar este concepto matemático.

Para analizar la forma en que los estudiantes utilizan el concepto de derivada de una función para resolver problemas, tomaremos en cuenta, en primer lugar, el contexto de las preguntas que resuelven y de las respuestas que proporcionan. De esta forma, distinguiremos entre preguntas/respuestas en términos puramente matemáticos y en contextos no matemáticos. Además tomaremos en cuenta los procedimientos heurísticos que los estudiantes muestren durante el proceso de resolución y si hacen uso de estrategias metacognitivas que les permitan controlar su propio proceso de resolución, elementos de los que, de acuerdo con Schoenfeld (1985), depende la manera en que los estudiantes resuelven problemas.

Metodología

Participantes

El análisis de la concepción de la derivada con que los alumnos se enfrentan al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias se realizó con los estudiantes de la asignatura *Matemáticas II,* del primer curso de la licenciatura en Química de la Universidad de La Laguna. El grupo estaba formado por 25 alumnos. Todos ellos habían cursado la asignatura *Matemáticas I,* cuyo currículo lo forman, principalmente, los contenidos relativos al Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable. Además, en el momento en que se realizó la investigación, ya se había impartido la práctica totalidad de los contenidos de la asignatura *Matemáticas II* (Funciones de varias variables, Diferenciación parcial y Extremos de funciones de dos y tres variables). Las últimas sesiones de clase correspondían al estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

El momento elegido para realizar este estudio fue precisamente la sesión anterior al comienzo del trabajo con las EDO, puesto que el objetivo era determinar los conocimientos relacionados con la derivada que los estudiantes mostraban como recursos para abordar el estudio de este tópico.

El cuestionario

Para indagar en la concepción que los estudiantes tenían del concepto de derivada de una función, se diseñó un cuestionario formado por once preguntas y problemas relacionados con dicho concepto. En éste se incluyen actividades cuyo enunciado se presenta en un contexto puramente matemático (preguntas D1, D4, D5, D6 y D9), problemas que presentan situaciones relacionadas con otras disciplinas científicas, como la Física o la Biología (preguntas D7, D8, D10 y D11), y dos cuestiones generales (preguntas D1 y D2) acerca del significado que la derivada tiene para los estudiantes y los problemas para los que este concepto matemático resulta de utilidad. El cuestionario, tal y como se presentó a los estudiantes, se puede encontrar en el Anexo de este artículo.

Para el diseño de las preguntas y problemas del cuestionario se tuvieron en cuenta, además del contexto en que se presentaba cada tarea, las diferentes interpretaciones del concepto de derivada, explicitadas por Thurston (1994). De esta manera, las preguntas D1 y D2 están relacionadas con lo que este autor denomina el uso simbólico de la derivada; las cuestiones D4, D5 y D6 con la interpretación geométrica del concepto; las preguntas D7, D8 y D9 con el uso infinitesimal de la derivada y los dos últimos problemas con la interpretación del concepto de derivada como velocidad instantánea. Las preguntas D2 y D3 son generales y abiertas y permitirán observar la coherencia entre los significados que los estudiantes asocian al concepto de derivada y la definición y aplicaciones que dan de éste.

Los alumnos dispusieron de una hora para responder al cuestionario y lo hicieron de forma individual, usando únicamente lápiz y papel.

Análisis de datos

A la hora de analizar las respuestas de los estudiantes a las preguntas del cuestionario, se consideraron dos aspectos principales: por un lado, los diferentes significados asociados al concepto de derivada que utilizan los estudiantes y, por otro, la manera en que resuelven distintos problemas relacionados con diferentes interpretaciones del concepto.

Red de significados asociada al concepto de derivada

Un análisis preliminar de las respuestas de los 25 estudiantes al cuestionario nos permitió observar que algunos alumnos no establecían relaciones entre distintas cuestiones que, a priori, se habían considerado correspondientes a un mismo uso del concepto de derivada. Por ejemplo, en el diseño del cuestionario se consideraron las preguntas D4, D5 y D6 asociadas al uso geométrico de la derivada, puesto que todas ellas pueden resolverse considerando la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función en ese punto. Sin embargo, como veremos más adelante, ningún estudiante utilizó esta relación para responder a la pregunta 6. Esto nos llevó a considerar en nuestro análisis, un quinto uso de la derivada, no contemplado en el diseño del cuestionario, que hemos denominado "descriptivo". Con esta etiqueta nos referimos al uso que hacen los estudiantes del criterio de la primera derivada para describir la monotonía de una función.

Para identificar los diferentes significados de la derivada que los estudiantes consideran, analizamos sus respuestas a cinco de las actividades del cuestionario relacionadas con dichos significados: D1 (simbólico), D5 (geométrico), D6 (descriptivo), D9 (infinitesimal), D10 (velocidad).

Con el fin de presentar de manera esquemática la información obtenida, hemos optado por el uso de un icono en forma de pentagrama o pentáculo, representando, cada uno de sus vértices, uno de los significados de la derivada considerados en esta investigación (Figura 1). De esta manera, si el estudiante ha utilizado correctamente un significado, el vértice correspondiente se marca con un círculo negro; si hay indicios de que el alumno reconoce un significado pero comete errores al utilizarlo, el vértice correspondiente se marca con un círculo blanco. Finalmente, no se marcan aquellos vértices relacionados con los significados que el estudiante no ha mostrado conocer.

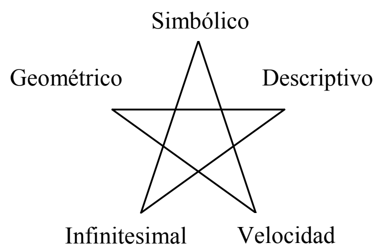


Figura 1: Pentagrama con diferentes usos de la derivada

Una vez analizadas las respuestas de los estudiantes a las actividades mencionadas anteriormente, éstos fueron clasificados en tres grupos, conforme a los significados de la derivada que mostraron conocer (Tablas 1, 2 y 3).

En un primer grupo se encuentran aquellos alumnos que muestran reconocer, a lo sumo, dos de las cinco interpretaciones de la derivada consideradas. Este grupo está formado por trece estudiantes (Tabla 1), lo que supone aproximadamente la mitad de los alumnos que respondieron al cuestionario.

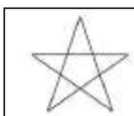
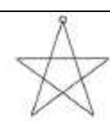
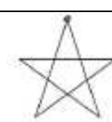
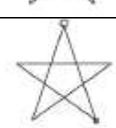
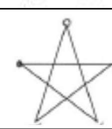
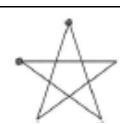
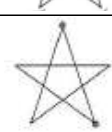
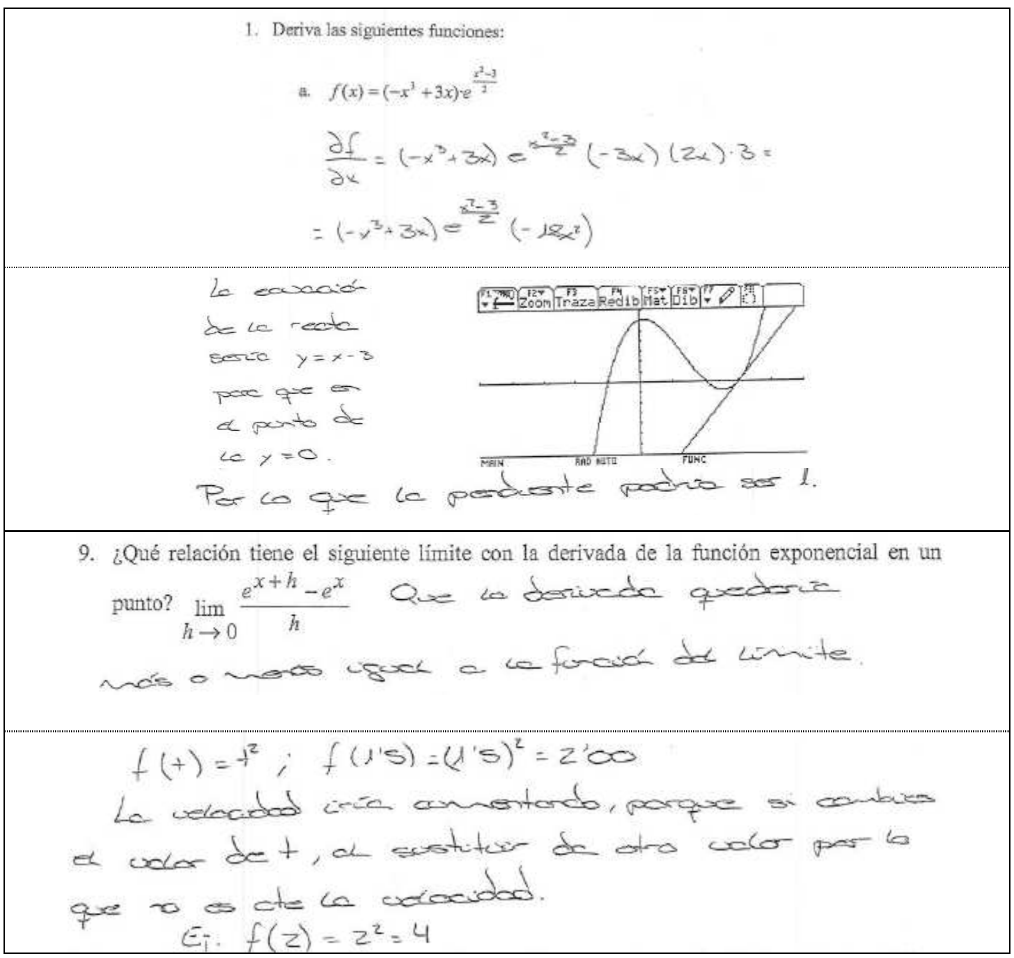
	*Simona Emilia*		*Amalia Aroa Nieves*		*Suri Silvia*
	*Ginés*		*Alberto Jota*		
	*Juan Sonia*		*Berta*		

Tabla 1: Alumnos que reconocen, a lo sumo, dos significados de la derivada

Estos estudiantes tienen en común que ninguno de ellos mostró indicios de reconocer los usos infinitesimal o descriptivo y muchos de ellos utilizaron de forma incorrecta alguna de las reglas de derivación. Este es el caso de Aroa (Figura 2). Esta alumna sólo utiliza la derivada como un conjunto de reglas algebraicas, y comete errores en la aplicación del procedimiento para la derivación de un producto; para responder a D5 no utiliza el hecho de que la recta cuya pendiente hay que calcular es tangente a la gráfica de la función representada y su respuesta a la actividad D9 refleja el desconocimiento del uso infinitesimal de la derivada y, en D10, el del uso de este concepto para calcular la velocidad instantánea.


1. Deriva las siguientes funciones:

a. $f(x) = (-x^3 + 3x) \cdot e^{\frac{x^2-3}{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = (-x^3+3x)\, e^{\frac{x^2-3}{2}} (-3x)(2x) \cdot 3 =$

$= (-x^3+3x)\, e^{\frac{x^2-3}{2}} (-18x^2)$

La ecuación de la recta sería $y = x - 3$ para que en el punto de la $y = 0$.

Por lo que la pendiente podría ser 1.

9. ¿Qué relación tiene el siguiente límite con la derivada de la función exponencial en un punto? $\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$ Que la derivada quedaría más o menos igual a la función del límite.

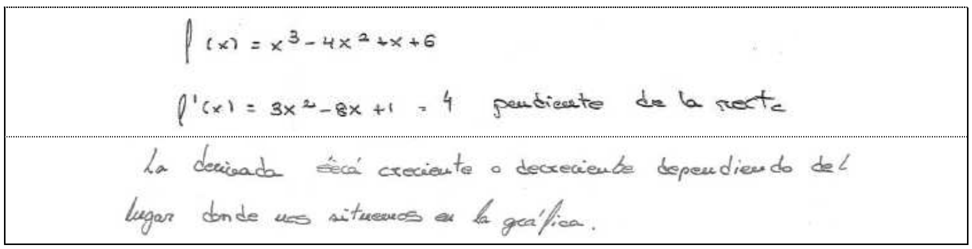
$f(t) = t^2$; $f(1'5) = (1'5)^2 = 2'00$

La velocidad iría aumentando, porque si cambias el valor de t, al sustituir de otro valor por lo que no es cte la velocidad.

Ej. $f(2) = 2^2 = 4$

Figura 2: Respuesta de Aroa a D1, D5, D9 y D10

Sonia utiliza correctamente todas las reglas de derivación necesarias para resolver la actividad D1, mostrando así fluidez en el uso de la derivada como procedimiento matemático, y resuelve correctamente la pregunta D5, dado que reconoce la derivada de la función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto (Figura 3). Sin embargo no utiliza esta relación para responder a D6, sino que se muestra muy ambigua en su respuesta a esta pregunta, y no contesta ni a D9 ni a D10, que están relacionadas respectivamente con los usos infinitesimal y de velocidad instantánea.


$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 = 4$ pendiente de la recta

La derivada será creciente o decreciente dependiendo del lugar donde nos situemos en la gráfica.

Figura 3: Respuestas de Sonia a D5 y D6

En un segundo grupo, hemos englobado a los estudiantes que utilizan tres de los cinco significados de la derivada considerados en la investigación. En este grupo hay cinco alumnos que representan una quinta parte de los participantes en la investigación (Tabla 2).

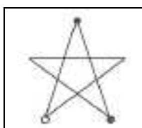
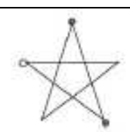
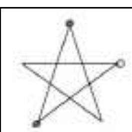
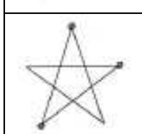
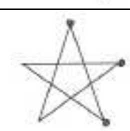
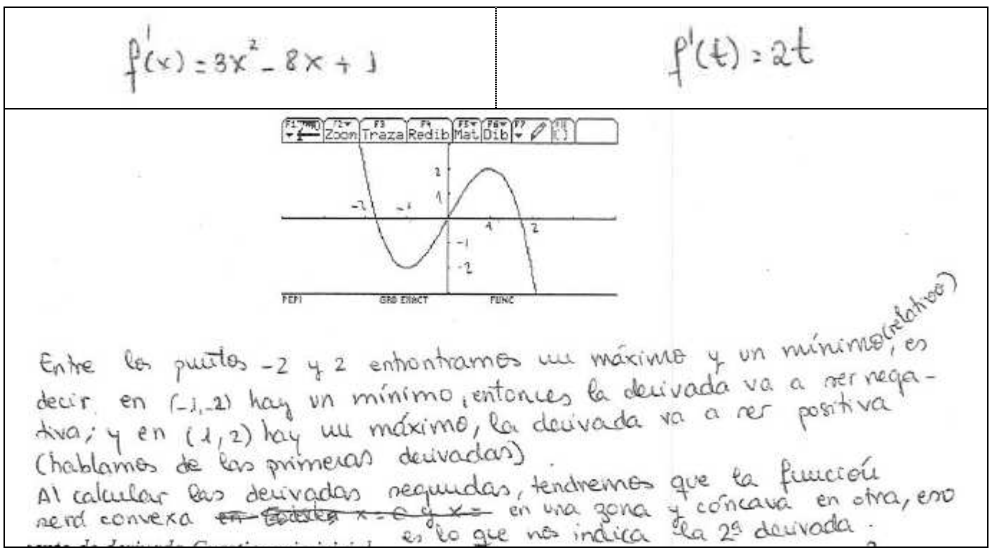
	*Lisa*		*Zoraida*		*Virginia*
	*Carmen*		*Antonio*		

Tabla 2: Alumnos que reconocen tres significados de la derivada

Todos estos estudiantes utilizan de forma correcta las reglas de derivación, pero ninguno de ellos usa correctamente la derivada para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (significado geométrico). Por ejemplo, Virginia calcula la función derivada para resolver D5, pero no sabe qué hacer a continuación; lo mismo le ocurre al tratar de resolver D10 (la derivada como velocidad instantánea). En la actividad D6 muestra que sabe de la existencia de un criterio en el que se utiliza la derivada para describir la monotonía de una función, pero no lo recuerda de forma correcta (indica que, en los puntos críticos, la derivada primera es negativa, en el caso de un mínimo, y positiva, en el caso de un máximo). Tampoco deduce dicho criterio a partir del significado geométrico de la derivada (Figura 4).

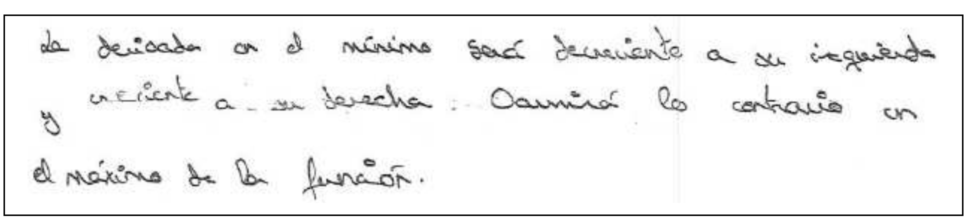


$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$	$f'(t) = 2t$

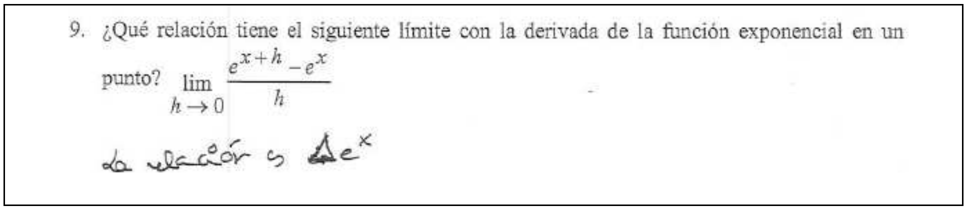
Entre los puntos -2 y 2 encontramos un máximo y un mínimo (relativos), es decir en (-1,-2) hay un mínimo, entonces la derivada va a ser negativa; y en (1,2) hay un máximo, la derivada va a ser positiva (hablamos de las primeras derivadas). Al calcular las derivadas segundas, tendremos que la función será convexa en una zona y cóncava en otra, eso es lo que nos indica la 2ª derivada.

Figura 4: Respuesta de Virginia a D5, D10 y D6

Otro ejemplo de la falta de relación entre el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de la función y su significado geométrico lo podemos ver en la respuesta de Zoraida a D6 (Figura 5). Esta alumna confunde el comportamiento de la función con el de su derivada. Tampoco reconoce la definición de la derivada como el límite de un cociente incremental, tal y como se observa en su respuesta a D9 (Figura 5).



La derivada en el mínimo será decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Ocurrirá lo contrario en el máximo de la función.


9. ¿Qué relación tiene el siguiente límite con la derivada de la función exponencial en un punto? $\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^{x}}{h}$

la relación es Δe^{x}

Figura 5: Respuesta de Zoraida a D6 y D9

El último grupo, formado por siete estudiantes, está compuesto por los alumnos que han utilizado más de tres significados diferentes del concepto de derivada (Tabla 3).

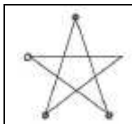
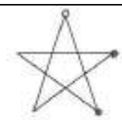
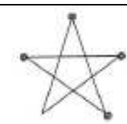
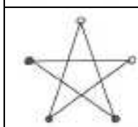
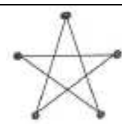
	*Maria Alexis*		*Manuel*		*Naomi*
	*Mar*		*Nicanor Milagros*		

Tabla 3: Alumnos que utilizan más de tres significados de la derivada

Se puede observar que sólo tres estudiantes (Mar, Nicanor y Milagros), de los veinticinco que contestaron al cuestionario, reconocen las cinco interpretaciones del concepto consideradas en esta investigación y sólo dos de ellos las utilizan sin cometer errores. Mar deriva de forma incorrecta en el primer apartado de D1 y comete un error en la expresión de la aplicación del criterio de la primera derivada para la descripción de la monotonía de una función, al indicar que es "la pendiente de la derivada" la que cambia de signo, según la función sea decreciente o creciente, cuando lo correcto es que cambia el signo de "la derivada" (Figura 6).

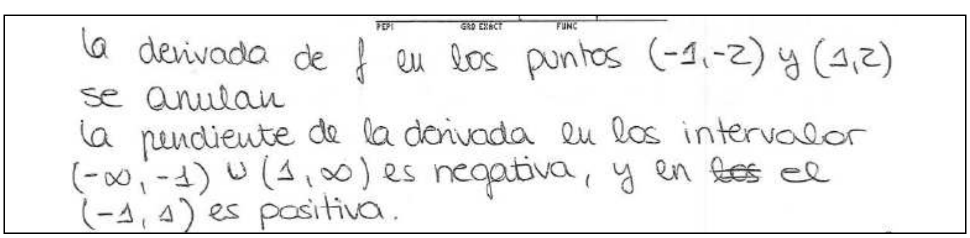
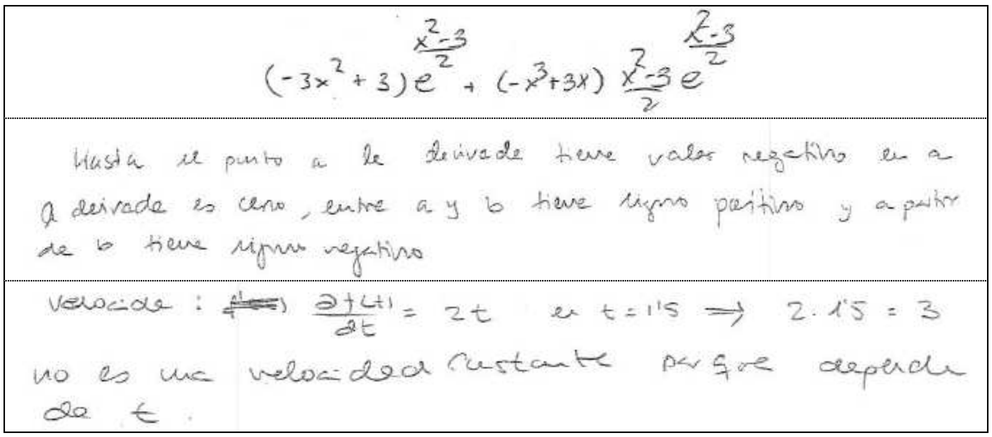

la derivada de f en los puntos (-1,-2) y (1,2)
se anulan
la pendiente de la derivada en los intervalor
(-∞,-1) ∪ (1,∞) es negativa, y en ~~los~~ el
(-1,1) es positiva.

Figura 6: Respuesta de Mar a D6

Manuel y Naomi no contestan a ninguna de las preguntas relacionadas con el uso infinitesimal de la derivada (D7, D8 y D9), pero sí utilizan correctamente los significados geométrico (D5), descriptivo (D6) y de velocidad (D10), así como el simbólico (D1) en el que Manuel comete el mismo error de derivación que Mar (Figura 7).



$$(-3x^2+3)e^{\frac{x^2-3}{2}} + (-x^3+3x)\frac{x^2-3}{2}e^{\frac{x^2-3}{2}}$$

Hasta el punto a la derivada tiene valor negativo en a la derivada es cero, entre a y b tiene signo positivo y a partir de b tiene signo negativo

Velocidad : $\frac{\partial f(t)}{\partial t} = 2t$ en $t = 1'5 \Rightarrow 2 \cdot 1'5 = 3$
no es una velocidad constante porque depende de t.

Figura 7: Respuesta de Manuel a D1, D6 y D10

En resumen: de este análisis se desprende que la red de significados que los estudiantes han construido en torno al concepto de derivada dista mucho de ser homogénea para todo el grupo, de manera análoga a lo que sucedió en la investigación de Zandieh (2000). Aproximadamente la mitad de los estudiantes reconocen sólo uno o dos de los cinco significados asociados al concepto de derivada que hemos contemplado en esta investigación, no relacionan el criterio de la primera derivada que se utiliza normalmente para describir la monotonía de una función con el hecho de que la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función en ese punto, ni reconocen la definición formal de la derivada, como el límite de un cociente incremental. La interpretación que más estudiantes han utilizado con éxito ha sido la de considerar la función derivada para expresar la velocidad instantánea (D10), seguida de su uso geométrico, en la pregunta D5. Únicamente dos estudiantes (Nicanor y Milagros) reconocen las cinco interpretaciones de la derivada que hemos considerado, sin cometer ningún error.

Uso del concepto de derivada en la resolución de problemas

En esta sección mostraremos algunas características del comportamiento de los estudiantes frente a la resolución de los problemas planteados en el cuestionario, para concluir clasificando a los 25 alumnos atendiendo al número de significados que mostraron reconocer en relación con el concepto de derivada de una función y su forma de abordar la resolución de los problemas planteados.

Por un lado analizaremos el contexto de trabajo en el que se sienten más cómodos. Consideramos que el contexto de trabajo de un estudiante es "matemático" si los ejemplos que presenta en las actividades D2 y D3 (preguntas generales) son propios de esta disciplina y no contestan a las actividades relacionadas con otros contextos (D7, D8, D10 y D11) o lo hacen exclusivamente en términos matemáticos y diremos que un estudiante "reconoce el uso de las Matemáticas en otros contextos" si responde a D2 y/o D3 con ejemplos de disciplinas científicas diferentes a la Matemática y utiliza razonamientos y terminología matemática en preguntas formuladas en un contexto no matemático (por ejemplo D10 o D11) o viceversa.

En las respuestas de los estudiantes a este cuestionario tratamos además de identificar elementos que indicaran si controlaban su propio proceso de resolución, comprobando, por ejemplo, si sus respuestas eran correctas, y si se apoyaban en el hecho de que varias actividades estaban relacionadas entre sí para conseguir resolver aquellas cuestiones que inicialmente no sabían cómo abordar.

Mostraremos, a continuación, algunos ejemplos de cómo se ha realizado la clasificación de los estudiantes, tomando como referencia algunas respuestas mostradas por tres de los alumnos (Alexis, Silvia y Emilia).

Consideramos que Alexis evalúa su propio proceso de resolución ya que, por ejemplo, en la pregunta D5, comienza calculando los puntos críticos de la función $f(x)$ y luego rectifica calculando la ecuación de la recta tangente a la gráfica de dicha función (Figura 8). Por otra parte, este alumno muestra indicios de reconocer el uso de las Matemáticas en otros contextos, aunque parece que no llega a integrarlos ya que, en la actividad D10, necesita calcular la aceleración para comprobar que la velocidad no es constante, aunque tiene expresada esta última en función del tiempo (Figura 8).

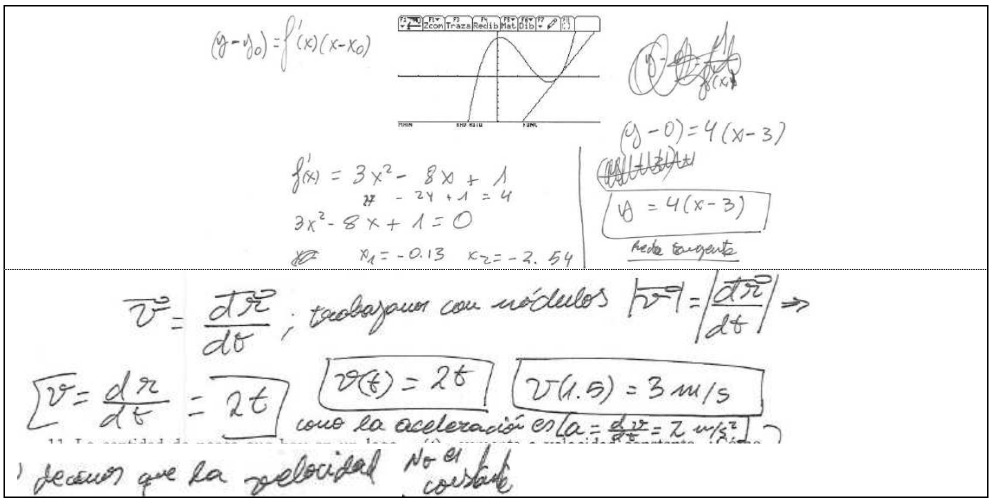
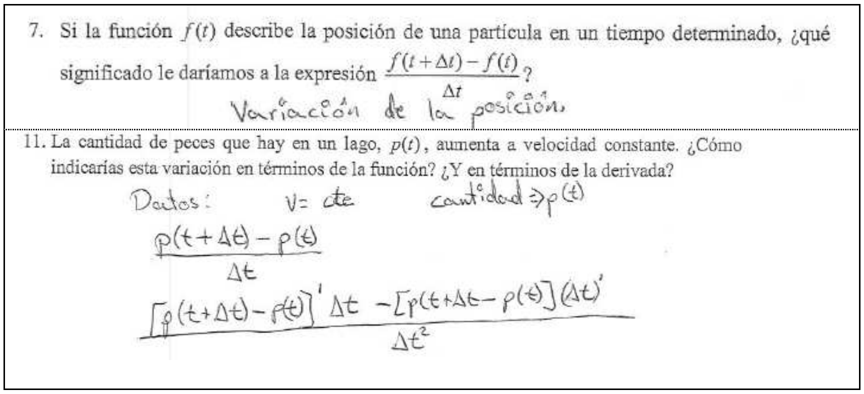


Figura 8: Respuesta de Alexis a D5 y D10

Silvia ha sido clasificada dentro del grupo de estudiantes que utilizan las Matemáticas en otros contextos y buscan analogías entre diferentes preguntas del cuestionario para intentar resolver las actividades. En la siguiente imagen podemos observar la similitud entre la respuesta que esta alumna da en D11 y el enunciado de la pregunta D7, lo que nos permite conjeturar que ha utilizado la expresión de esta última para responder a la primera, aunque su respuesta no sea correcta (Figura 9).


7. Si la función $f(t)$ describe la posición de una partícula en un tiempo determinado, ¿qué significado le daríamos a la expresión $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$?

Variación de la posición.

11. La cantidad de peces que hay en un lago, $p(t)$, aumenta a velocidad constante. ¿Cómo indicarías esta variación en términos de la función? ¿Y en términos de la derivada?

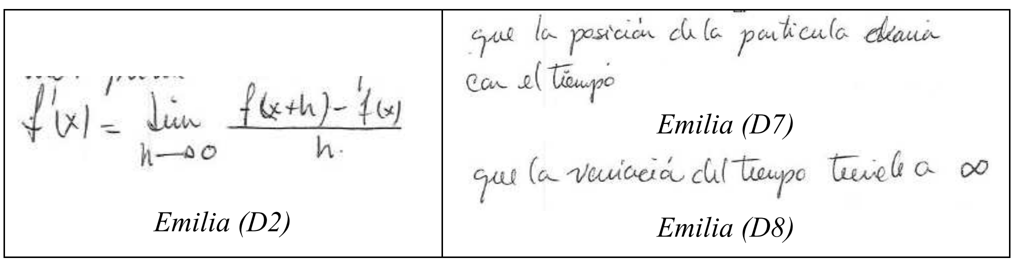
Datos: $v=$ cte cantidad $\Rightarrow p(t)$

$$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{[p(t+\Delta t)-p(t)]'\,\Delta t-[p(t+\Delta t)-p(t)](\Delta t)'}{\Delta t^2}$$

Figura 9: Respuesta de Silvia a D7 y D11

En contraste con la respuesta de Silvia, nos encontramos con Emilia, quién consideramos que no relaciona diferentes actividades del cuestionario ya que, en D2, define la derivada como el límite del cociente incremental, pero no utiliza dicha definición para resolver las actividades D7, D8 y D9, relacionadas con el uso infinitesimal de la derivada (Figura 10).


$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Emilia (D2)

que la posición de la partícula cambia con el tiempo

Emilia (D7)

que la variación del tiempo tiende a ∞

Emilia (D8)

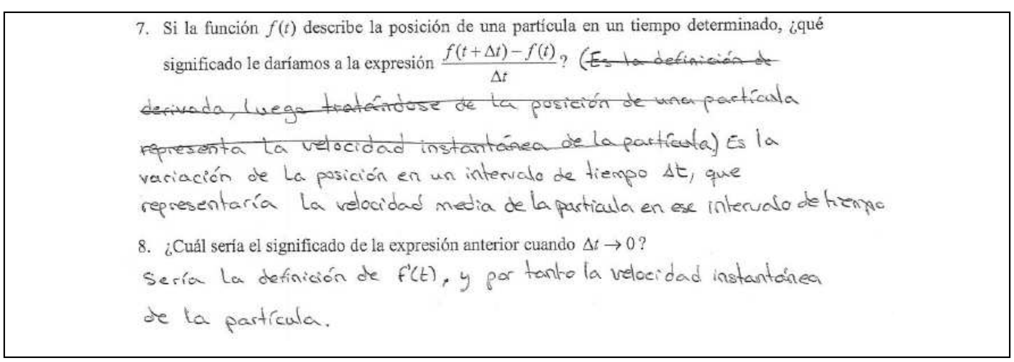
Figura 10: Respuesta de Emilia a D2, D7 y D8

La siguiente tabla (Tabla 4) muestra la clasificación de los 25 estudiantes que participaron en esta investigación, atendiendo al número de significados diferentes que asociaban al concepto de derivada, al contexto en que presentaban sus respuestas, los métodos heurísticos empleados para resolver las actividades del cuestionario y las estrategias metacognitivas mostradas en dicha resolución.

<table>
<tr><th rowspan="2">Contexto de trabajo</th><th rowspan="2">Estrategias de resolución</th><th colspan="4">Significados mostrados en relación con el concepto de derivada</th></tr>
<tr><th>1 o 2</th><th>3</th><th colspan="2">4 o 5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemático</td><td>Evalúa su proceso de resolución</td><td>Aroa
Nieves
Ginés
Jota
Sonia</td><td>Lisa
Zoraida
Virginia
Carmen</td><td>Maria
Naomi</td><td rowspan="2">Milagros</td></tr>
<tr><td>Utiliza la similitud entre actividades</td><td>Simona
Suri</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Reconoce el uso de las matemáticas en otros contextos</td><td>Evalúa su proceso de solución</td><td>Emilia
Amalia
Berta
Alberto</td><td></td><td>Alexis
Mar</td><td rowspan="2">Nicanor</td></tr>
<tr><td>Utilizan la similitud entre actividades</td><td>Silvia
Juan</td><td>Antonio</td><td>Manuel</td></tr>
</table>

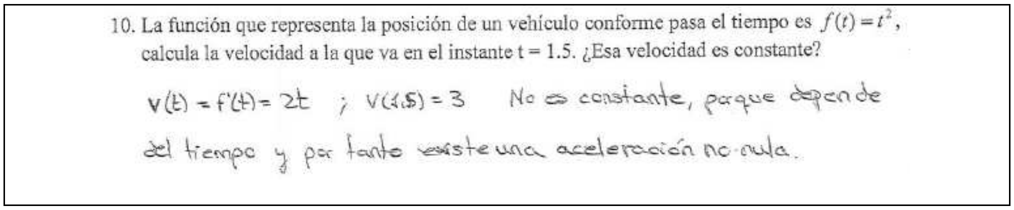
Tabla 4: Descripción del trabajo de los 25 estudiantes

En esta tabla se puede observar que la mayoría de los estudiantes se limitan al trabajo dentro del contexto matemático y que muestran indicios de evaluar en algún momento el proceso de resolución que han seguido en las diferentes actividades. Son pocos los estudiantes que utilizan como estrategia de resolución de problemas la búsqueda de actividades similares a las que se quieren resolver. Sólo las respuestas de un estudiante, Nicanor, reflejan cierta integración entre sus conocimientos matemáticos y aquellos relacionados con los de otras disciplinas, como reflejan sus respuestas a D7, D8 y D10, en las que utiliza argumentos tanto físicos como matemáticos (Figura 11).


7. Si la función $f(t)$ describe la posición de una partícula en un tiempo determinado, ¿qué significado le daríamos a la expresión $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$? (~~Es la definición de derivada, luego tratándose de la posición de una partícula representa la velocidad instantánea de la partícula~~) Es la variación de la posición en un intervalo de tiempo Δt, que representaría la velocidad media de la partícula en ese intervalo de tiempo

8. ¿Cuál sería el significado de la expresión anterior cuando $\Delta t \to 0$?

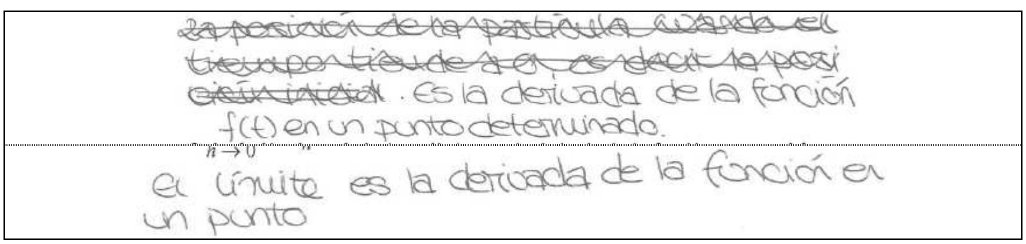
Sería la definición de $f'(t)$, y por tanto la velocidad instantánea de la partícula.


10. La función que representa la posición de un vehículo conforme pasa el tiempo es $f(t)=t^2$, calcula la velocidad a la que va en el instante t = 1.5. ¿Esa velocidad es constante?

$v(t) = f'(t) = 2t$; $v(1.5) = 3$ No es constante, porque depende del tiempo y por tanto existe una aceleración no nula.

Figura 11: Respuesta de Nicanor a D7, D8 y D10

En la sección anterior, pudimos observar que Nicanor era uno de los estudiantes que mostraban reconocer los cinco significados de la derivada que hemos contemplado en esta investigación, junto con otra estudiante: Milagros. Sin embargo, la manera en que estos dos alumnos abordan la resolución de los problemas del cuestionario difiere, sobre todo, en el contexto en que cada uno de ellos presenta sus respuestas. En el caso de Milagros, ésta parece sentirse más segura en el contexto matemático, como así refleja su respuesta a la actividad D8. La alumna intenta responder a D8 dentro del contexto en que se plantea la pregunta y revisa su respuesta después de haber contestado a D9; finalmente, en D8, muestra una respuesta que nada tiene que ver con el contexto en que se formula la pregunta (Figura 12).


~~La posición de la partícula cuando el tiempo tiende a 0, es decir la posición inicial~~. Es la derivada de la función f(t) en un punto determinado.

$h \to 0$

el límite es la derivada de la función en un punto

Figura 12: Respuesta de Milagros a D8 y D9

En Milagros también podemos observar que, aunque ha mostrado conocer los cinco usos diferentes de la derivada considerados en este trabajo, no los utiliza todos de forma óptima. La actividad D4 se puede resolver empleando el significado geométrico de la derivada; sin embargo, son pocos los estudiantes que resuelven correctamente esta actividad. Milagros es una de las alumnas que no sabe cómo utilizar el significado geométrico de la derivada para resolverla correctamente (Figura 13).

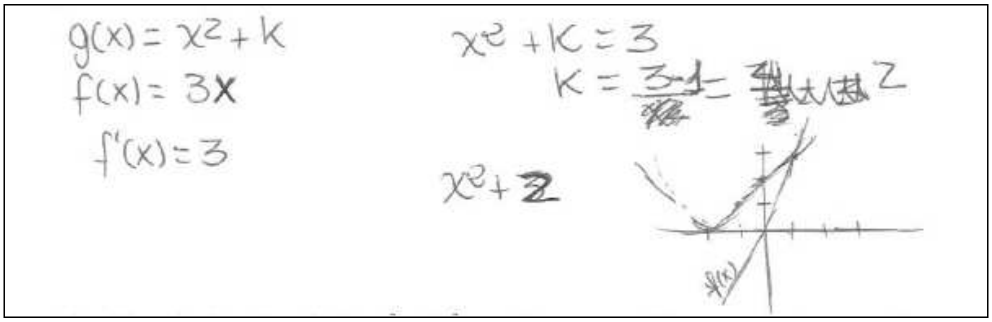


Figura 13: Milagros no utiliza correctamente el significado geométrico de la derivada para resolver D4

A modo de conclusión

A partir de la información recopilada por medio de las respuestas de los 25 estudiantes de primer curso de Química al cuestionario ¿qué podemos decir de la red de significados que dichos estudiantes se han formado en torno al concepto de derivada de una función y que será parte de los conocimientos con los que se enfrenten al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias? El análisis presentado muestra que la comprensión conceptual de la derivada de una función no es homogénea para todo el grupo, aun cuando todos los estudiantes han recibido una formación común del cálculo en una y varias variables. La cuarta parte de los estudiantes relaciona el concepto de derivada de una función únicamente con un conjunto de reglas algebraicas que se aplican a dicha función, esto es, las reglas de derivación (Thurston (1994) considera que el uso de estas reglas está relacionado con el hecho de considerar la derivada como un símbolo). La interpretación de la derivada que más estudiantes han empleado de forma correcta en este cuestionario ha sido la relacionada con el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil (D10), seguida de la relación del concepto con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto (D5). Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no ha utilizado correctamente estos significados de la derivada para responder a otras cuestiones relacionadas (D11 y D4, respectivamente), lo que, según la segunda parte de nuestro análisis, puede deberse a ciertas deficiencias en el desarrollo de heurísticas y estrategias metacognitivas, elementos fundamentales en la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985).

Los resultados de este análisis deben tomarse en cuenta a la hora de introducir el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria con estos estudiantes, puesto que las debilidades en la comprensión del concepto de derivada se transfieren a la comprensión de las EDO (Camacho et al., 2007). Así, el significado geométrico de la derivada es fundamental para la construcción del campo de direcciones asociado a una EDO y el análisis cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial requiere que se relacione el uso de la derivada para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto con el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de una función. Por tanto, la introducción del concepto de EDO debe hacerse con el objetivo de construir un nuevo concepto matemático, pero también debe considerarse como un momento propicio para la revisión y consolidación del concepto de derivada de una función, tratando que ambos conceptos queden integrados en una misma red de significados.

Referencias bibliográficas

Camacho, M.; Perdomo, J. & Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de ecuación diferencial ordinaria: un estudio exploratorio. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo y M.T. González (Eds) *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación*. Tenerife-España, 87-106.

Camacho, M., Perdomo, J. & Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. En O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.). *PNA* 3(3), 123-133.

García, M., Llinares, S. & Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education.* DOI: 10.1007/s10763-010-922-2

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the danish KOM project.* IMFUFA, Denmark: Roskilde University.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.

Zandieh, M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education,* 8, 103-127.

Anexo: Cuestionario de la derivada

D1. Deriva las siguientes funciones:

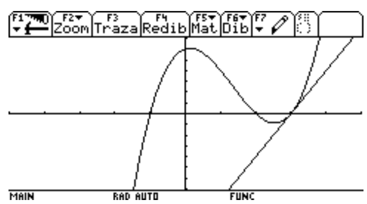
a. $f(x) = (-x^3 + 3x) \cdot e^{\frac{x^2-3}{2}}$ b. $g(t) = \dfrac{\ln(2t-5)}{2t-5}$

D2. Explica qué significa para ti el concepto de derivada. ¿Qué imágenes vienen a tu mente al pensar en este concepto?

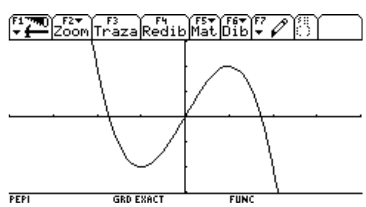
D3. Indica un problema donde se utilice el concepto de derivada.

D4. Dada la función *f(x) = 3 x*, ¿existe una función cuadrática $g(x)$ que sea tangente a *f* en el punto *x = 1*? En caso afirmativo, representa gráficamente cuál es la situación en dicho punto.

D5. Considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, cuya gráfica se muestra a continuación. Calcula la pendiente de la recta que se muestra en la imagen, sabiendo que las dos curvas se cortan en el punto de coordenadas (3,0).



D6. Dada la función cuya representación gráfica se muestra a continuación, ¿qué puedes decir sobre su derivada?



D7. Si la función $f(t)$ describe la posición de una partícula en un tiempo determinado, ¿qué significado le daríamos a la expresión $\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$?

D8. ¿Cuál sería el significado de la expresión anterior cuando $\Delta t \to 0$?

D9. ¿Qué relación tiene el siguiente límite con la derivada de la función exponencial en un punto? $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h}$

D10. La función que representa la posición de un vehículo conforme pasa el tiempo es $f(t) = t^2$, calcula la velocidad a la que va en el instante t = 1,5. ¿Esa velocidad es constante?

D11. La cantidad de peces que hay en un lago, $p(t)$, aumenta a velocidad constante. ¿Cómo indicarías esta variación en términos de la función? ¿Y en términos de la derivada?