FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA X
ISSN: 1695-6613

COMPETENCIA MATEMÁTICA FORMAL. UN EJEMPLO: EL ÁLGEBRA ESCOLAR[1]

Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se analiza la cultura matemática, entendida como un proceso de culturización matemática, y se distinguen y analizan los tres aspectos esenciales que la caracterizan como disciplina científica: el campo conceptual, la fenomenología y la funcionalidad, que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura en el Sistema Educativo.
Se describe aquí la Competencia Matemática Formal (CMF) para los tres campos conceptuales: numérico (aritmético), algebraico y analítico, desde la perspectiva disciplinar, tomando como ejemplo el campo conceptual algebraico.

Abstract

This article discusses mathematical culture, which is understood as a process of mathematical education where the three key aspects of concept, phenomenology and functionality characterizing it as a scientific discipline must be taken into account in the process of giving mathematics a greater emphasis in the educational system.

Formal Mathematics Competence (CMF) is described for the three conceptual fields: numerical (arithmetic), algebraic and analytical, from the disciplinary perspective, using the algebraic conceptual field as an example.

[1] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional I+D+i del Ministerio de Ciencia e Innovación número EDU2008-05254.

Introducción

En este trabajo se aporta, en primer lugar, una reflexión inicial sobre las características más relevantes del conocimiento o saber matemático, entendido como un proceso de Culturización Matemática, en el que se distinguen tres aspectos esenciales que lo caracterizan: los campos conceptuales, la fenomenología y la funcionalidad, que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura, es decir, en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la Matemática en los Sistemas Educativos.

Expresaremos los tres aspectos básicos que caracterizan la disciplina matemática de forma más concreta y relacionada que lo que es habitual, en un modelo que denominaremos Competencia Matemática Formal (CMF), con la intención de tomarlo como un conocimiento técnico al servicio de la docencia y de la investigación didáctica en Matemáticas.

El proceso para la caracterización de la Competencia Matemática Formal (CMF), nos obliga a tomar en consideración la naturaleza de los objetos matemáticos, diferenciando al objeto de las formas de representarlos. Por ello, en primer lugar, trataremos diferentes cuestiones relevantes sobre la naturaleza del conocimiento matemático, así como el papel que atribuimos a los objetos matemáticos y a los sistemas de signos matemáticos.

Se propone a continuación, una organización, desde el punto de vista disciplinar, de la Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos numérico, algebraico y analítico, tomando como referencia el campo conceptual algebraico. Se muestra también su aplicación en una actividad numérica relacionada con la profesión docente en Matemáticas de 1º de la ESO. Se concluye el artículo con ciertas consideraciones finales sobre los tres ámbitos del contenido matemático en la docencia.

Consideraciones sobre la Matemática

Los problemas relativos a la Filosofía de la Matemática pueden ser abordados, en la actualidad, desde las dos grandes posiciones que han caracterizado la naturaleza del conocimiento matemático durante las distintas épocas: la prescriptiva (o normativa) y la descriptiva (o naturalista); la primera, procede de una posición absolutista de la Matemática y, la segunda, analiza el conocimiento matemático desde la práctica matemática y sus aspectos sociales. La relación entre la enseñanza de las Matemáticas y estos dos grandes enfoques en la Filosofía de la Matemática es una cuestión evidente (Ernest, 1994). Aunque, por razones obvias, no es nuestra intención hacer una síntesis de las ideas más relevantes sobre Filosofía de la Matemática, sí mencionaremos brevemente algunos aspectos relacionados con cuestiones relativas a la naturaleza de los objetos matemáticos y el papel del lenguaje matemático en la comunicación de éstos.

En este sentido, debemos tener en cuenta que los objetos del conocimiento (saber matemático) como parte del conocimiento (saber humano) han sido considerados, por una parte, como un conocimiento subjetivo y, por otra, como un conocimiento objetivo. Hemos de señalar que el sentido subjetivo ha predominado en la Didáctica de la Matemática. Es común que se consideren, en general, los objetos mentales y los objetos de la Matemática sin hacer distinción aparente entre ellos y, en situaciones particulares, se pase a tratar de distinguirlos sin encontrar criterios claros para esa diferenciación. Es decir, practicamos una dualidad confusa: objetiva/subjetiva, en relación con los objetos de las Matemáticas tanto en la cultura matemática como en el sistema educativo.

Análogamente, al pensar en los objetos de la Matemática, podemos situarnos en dos polos opuestos: considerar el lenguaje en un nivel secundario en relación con los objetos o pensar que la objetividad de la Matemática está inseparablemente unida a su formulación lingüística: "la Matemática no es más que un juego del lenguaje formal". Entre estas dos posiciones, sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente, parece razonable aceptar que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje; como señala Popper (1974), no puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestras construcciones.

La consideración de la Matemática como cultura puede ser objeto de análisis desde varios puntos de vista, especialmente, el antropológico y el filosófico. No es nuestro propósito, entrar en el trabajo en este análisis (véase Geertz, 1987; Rico, 1990). Consideramos que la existencia de la Matemática como fenómeno cultural, ha tenido lugar porque existe un mundo natural previo y unas conciencias que interactúan con este mundo natural y entre ellas. Por ejemplo, en todas las culturas creadas por el hombre, éste en relación con la Matemática, ha puesto de manifiesto su necesidad de elaborar sistemas de recuento y de medición vinculados a sus necesidades prácticas. En la actualidad, la Matemática cumple una función fundamental en todas las ciencias y conocimientos técnicos y se puede considerar como elemento de la cultura que se manifiesta como un sistema conceptual que es social y público, en el sentido de que participa en los comportamientos humanos como elemento de racionalidad que facilita el pensamiento científico, colaborando en la organización de fenómenos sociales y del propio sistema conceptual y que tiene una función social y pública, que se manifiesta mediante un lenguaje propio: el sistema matemático de signos.

Las Matemáticas son comprensibles si se consideran encuadradas en el contexto de una cultura. En este sentido, las Matemáticas tienen objetos y sus enunciados tienen significados que deben buscarse en la comprensión compartida de los seres humanos de una determinada cultura. Por ello, podemos identificar los objetos matemáticos en dos procesos diferentes, que denominaremos "Culturización Matemática" y "Matematización de la Cultura".

La enseñanza de las Matemáticas forma parte del sistema educativo obligatorio de cualquier país, y es el encargado de transmitir la herencia cultural básica de cada sociedad. Al ser la Matemática una disciplina del currículo, éste no puede ser ajeno o contrapuesto a los valores de esa cultura y sociedad.

Si entendemos el aprendizaje escolar en Matemáticas como un prolongado proceso de asimilación y reconstrucción por parte del alumnado de ciertos aspectos de la cultura matemática, la práctica docente en Matemáticas se plantea entonces como la búsqueda de modos de actuación que faciliten y provoquen en los estudiantes ese proceso para diferentes aspectos de la cultura matemática. En este sentido, consideramos las Matemáticas escolares como elemento de cultura y como referencia obligada en el estudio y determinación de las finalidades de la Educación Matemática. Su carácter histórico y su consideración como un sistema de prácticas y de realizaciones conceptuales, ligadas a un contexto social e histórico concreto, son elementos indispensables en este estudio.

Podemos, entonces, diferenciar los dos procesos: el de "Culturización Matemática", entendido como el de construcción o descubrimiento de los objetos matemáticos que dan origen al saber matemático sabio o disciplinar; y el de "Matematización de la Cultura", entendido como el de enseñanza-aprendizaje que se debe generar al situar las Matemáticas como un conocimiento cultural para todos los ciudadanos, al menos hasta los dieciséis años, y que se caracteriza por el saber matemático que debemos enseñar. En el primer caso nos referimos a una conciencia colectiva y, en el segundo, a una conciencia individual.

Algunas características de estos procesos son, en el primer caso:

- Los objetos de las Matemáticas se "construyen" o se "descubren" con los recursos que aporta cada contexto cultural en términos de lenguajes, valores y signos.

- Los objetos matemáticos sufren en su construcción o descubrimiento un proceso de "fosilización" en el que pierden las referencias a su evolución, a su historia e, incluso, a sus relaciones internas (descontextualización) y se convierten en meros signos que pasan a pertenecer a la conciencia colectiva.

En el segundo tenemos:

- El sistema educativo retoma estos objetos fosilizados de la cultura matemática, convertidos en meros signos, para recorrer un camino inverso, es decir, para revertirlos de nuevo, pero de forma generalizada, a la cultura ciudadana. Los devuelve a la conciencia individual (Socas, 2000).

Sucede que el proceso original de "Culturización Matemática", tiene que recorrer en los sistemas educativos un camino inverso con la intención de facilitar una "Matematización de la Cultura", en general, con la buena intención de promover el uso correcto de sus objetos y de generar o descubrir nuevos objetos.

Estas consideraciones nos llevan a diferenciar los objetos matemáticos en uno u otro proceso, de tal manera que la "Culturización Matemática" se considera como la génesis de un proceso selectivo en el que ciertamente individuos privilegiados generan este proceso, y en el que los objetos terminan por pertenecer a una conciencia colectiva (sentido histórico), mientras que los objetos matemáticos de la “Matematización de la Cultura” (saber para enseñar), están en un proceso que no es selectivo, sino que es para todos y cada uno de los individuos (sentido didáctico).

A modo de resumen de estas breves referencias sobre la Filosofía de las Matemáticas, podemos señalar que los aspectos de racionalidad matemática que subyacen en la actividad matemática en las dos grandes perspectivas adoptadas, la absolutista y la relativista, se pueden distinguir entre sí. El primero, porque concibe la racionalidad matemática como una propiedad de los sistemas formales y, el segundo, porque la entiende como una propiedad de la empresa humana, abre el horizonte de una racionalidad fuera de los ámbitos de la lógica formal y se sustenta en la actividad de los matemáticos, en la historia y en el contexto socio-cultural.

En el último cuarto del siglo XX, se ha desplazado el centro de interés desde las teorías matemáticas como productos acabados hacia la actividad matemática, entendida como una práctica social en un doble sentido: por uno, en cuanto es aprendida de otras personas y, por otro, porque está regida por reglas que se siguen habitualmente (Wittgenstein, 1987; Lakatos, 1978 y 1981; Davis y Hersh, 1988; Ernest, 1991, 1994 y 1998). De las diferentes perspectivas podemos extraer tres aspectos esenciales que caracterizan la Matemática y que deben ser tenidos en cuenta en su enseñanza-aprendizaje:

- La Matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado (campos conceptuales) y socialmente compartido. Esta organización lógica de los conceptos, propiedades, teoremas..., explica un gran número de dificultades y obstáculos en el aprendizaje.

- La Matemática es una actividad de resolución de problemas socialmente compartida; problemas que pueden tener relación con el mundo natural o social o ser problemas internos de la propia disciplina. La respuesta a estos dos tipos de problemas explica la evolución y desarrollo progresivo de los objetos matemáticos (conceptos, teorías...). La actividad de resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que ocasiona dificultades en el aprendizaje de la Matemática.

- La Matemática es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema propio de signos en el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje, tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento que dificultan el aprendizaje.

Objetos matemáticos y Sistema de signos matemáticos

En la cultura matemática, entendida como un proceso de culturización matemática, hemos distinguido tres aspectos esenciales que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura, es decir, en el proceso de su enseñanza-aprendizaje en los sistemas escolares.

Estas perspectivas de la Matemática nos obligan, desde el punto de vista del aprendizaje, a considerar, de manera general, la naturaleza de los entes matemáticos considerando el "objeto" y las formas de "representarlos". Por ello, a continuación analizamos el papel que atribuimos a los "Objetos matemáticos" y a los "Sistemas de signos matemáticos".

La Didáctica de la Matemática plantea la problemática de encontrar relaciones entre los objetos del conocimiento matemático y las representaciones de ese objeto por el alumno. Esto lleva a determinar a grandes rasgos dos posiciones en relación con los objetos matemáticos. Por una parte, la objetivista, que supone aceptar que los signos matemáticos (ostensibles y observables) dotan a los objetos de una corporeidad que los diferencia de la conciencia mental de esos objetos. Estos supuestos metodológicos suponen aceptar diferencias en la dualidad externo e interno, es decir, postular la existencia de dos mundos: el real, formado por los objetos exteriores al sujeto y el mental, caracterizado por las representaciones internas del sujeto. Éste sería a grandes rasgos el posicionamiento objetivista, que se caracterizaría por su carácter de representacionalista: existe un mundo exterior independiente de la conciencia individual; nuestro sistema cognoscitivo interacciona y se desarrolla, aunque sea parcialmente, a partir de ese mundo exterior y su conocimiento pasa por su representación en un sistema de signos y nuestra actuación sobre la base de dichas representaciones.

Por otra parte, tenemos la subjetivista, que engloba todas las posiciones que ponen en duda el objetivismo representacionalista; supondría, a grandes rasgos, negar la existencia de objetos fuera de la conciencia individual, es decir, fuera de toda experiencia individual posible o establecer relaciones entre éstos y unos posibles objetos trascendentes.

Hemos de indicar que tanto la postura subjetivista como la objetivista se interesan por describir los procesos que se dan entre la interacción entre los objetos del conocimiento matemático y los instrumentos cognoscitivos que permiten en el individuo tal incorporación.

En el discurso matemático, por ejemplo, el número 5, el número $\prod=3,14159\ldots$, los números combinatorios, los números amigos, el cuadrado, las funciones trigonométricas, la función Beta, o la distribución de Dirac, designan objetos matemáticos. Cuando los objetos matemáticos se encadenan mediante ciertas relaciones o leyes tenemos las estructuras matemáticas que también pueden ser consideras como objetos. El término objeto matemático connota que el objeto en cuestión tiene alguna clase de existencia. Ahora bien la noción de existencia no está claramente delimitada y comporta diferentes dificultades lógicas y psicológicas (Davis y Hersh, 1988).

Si miramos desde los fundamentos de la Matemática, para la concepción platonista, los objetos matemáticos son reales, y su existencia, un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos. Por el contrario, para la concepción formalista no hay objetos matemáticos. La Matemática está constituida por fórmulas, listas de símbolos que no se refieren a nada, es decir, axiomas, definiciones y teoremas.

La naturaleza de los objetos matemáticos y su representación constituye, sin lugar a dudas, un dominio sumamente complejo. Acerquémonos a esta situación a partir de situaciones diferentes. A título de ejemplo, podemos encontrar, objetos en realidades diferentes, o un mismo objeto, en diferentes estadios de desarrollos cognitivos, o en diferentes mundos de pensamiento, o en experiencias de naturaleza distinta.

Si, por ejemplo, consideramos los objetos gato y cuadrado, el primero es un objeto físico, un objeto de la vida real en el que cada gato que encontremos es un representante idóneo del objeto; sin embargo, el cuadrado es un objeto cultural, ningún objeto real puede ser considerado como un representante perfecto de cuadrado. En consecuencia, nos encontramos frente a una situación más compleja, que necesitamos organizar al menos para entender en qué nivel nos situamos cuando nos referimos al objeto “cuadrado”.

Es cierto que, aunque no tengamos un representante real de cuadrado, si tenemos objetos como: baldosas cuadradas, casillas cuadradas o papel cuadriculado..., que generan una conciencia individual de cuadrado, como resultado de una selección de las características consideradas como relevantes en los objetos reales percibidos.

Si consideramos los objetos matemáticos de Trigonometría: seno, coseno y tangente, éstos adquieren significados diferentes en contextos diferentes: círculo goniométrico, ángulos agudos en un triángulo rectángulo, representación gráfica de las funciones respectivas, escritura algebraica en términos de medida, expresión funcional, desarrollo en series... Podemos hablar de un mismo objeto matemático en diferentes estadios de desarrollo cognitivo (Socas, 1997).

También podemos encontrar un mismo objeto matemático en experiencias matemáticas de naturaleza diferente. Por ejemplo, dada una jarra con forma de tronco de cono llena de cerveza, ante la pregunta: ¿cuánto líquido contiene esta jarra? Las respuestas pueden tomar formas diferentes: verter el líquido en una probeta graduada, pesar el líquido y la jarra, comparar con un recipiente de volumen conocido, tomar medidas y aplicar la fórmula del volumen del tronco de cono, o sea, un mismo objeto matemático puede ser implicado en soluciones de naturaleza diferente: físicas, analógicas o analíticas.

Observamos que podemos hablar de objetos comunes y de objetos matemáticos y, a veces, de relaciones entre ambos. Conviene tener modelos, aunque simplificados, que permitan diferenciar el discurso para saber a qué nos estamos refiriendo.

Nos preguntamos: ¿cómo debemos entender este lenguaje y cuál es su relación con el objeto matemático? Esto es lo que trataremos de describir someramente en los párrafos siguientes, desde el punto de vista educativo.

Para organizar la complejidad de los objetos matemáticos podemos distinguir tres escenarios:

Escenario 1: materialidad o corporeidad matemática. Es el escenario de lo observable, lo perceptible, lo susceptible de ser notado. Es también el escenario de lo ostensible, lo susceptible de ser mostrado.

Los objetos matemáticos toman forma y son representados en el dominio del mundo físico, es decir, lo visible del objeto. Su encarnación en un objeto físico (baldosa cuadrada), en una figura: $\square$, o en una fórmula: $x = y^2$, $x, y \in A$ (cuadrado de un anillo, x es el cuadrado de y).

Es el escenario que llamaremos “de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos”, que muestra la doble intención de observable (percibido) y ostensible (mostrado).

Escenario 2: culturización matemática. Es el escenario del conocimiento objetivo de los objetos matemáticos, productos de las interacciones humanas, enmarcadas en la realidad socio cultural, que encuentra lenguajes que posibilitan una potencialidad expresiva cada vez mayor y que facilita una dinámica abstractiva y generalizadora.

Escenario 3: matematización de la cultura. Es el escenario del conocimiento subjetivo de los objetos matemáticos y, por tanto, de las representaciones mentales de naturaleza individual.

Estos tres escenarios no sólo están íntimamente relacionados, sino que deben ser considerados como un todo holístico en el que sus partes admiten una separación analítica.

Es común considerar el lenguaje matemático, como un sistema de signos matemáticos (SSM) en el que se distinguen dos subconjuntos de signos: “signos artificiales” (propios de la Matemática), y “signos naturales” o de la lengua usual. El lenguaje vernáculo es el instrumento práctico que permite indicar cómo han de utilizarse los signos del lenguaje artificial (De Lorenzo, 1971). Este autor distingue dentro del lenguaje artificial matemático: a) signo estrictamente artificial, como ∇, $\in$, $\sum$..., que carece de referente en el lenguaje natural; b) signo gráfico único, como las letras de diversos alfabetos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e, Π, Γ..., con las que se designan convencionalmente distintos objetos matemáticos; c) signos compuestos por varias letras, como dx, sen, ln,..., que provienen de abreviaturas de palabras con las que se designan operadores o términos técnicos; d) término, como “grupo”, “anillo”, “matriz”, “filtro”,..., que existen en el lenguaje natural con un significado diferente al que tienen en el lenguaje matemático; e) figuras, como las geométricas, diagramas,..., y f) signo artificial, como 0, 1, 2, ∀, ∃..., cuyo uso no es exclusivo del lenguaje matemático. Ahora bien, “la caracterización del texto matemático no va a estar, por ello, en la mera utilización del signo artificial, sino en el modo de emplearlo y en el modo por el cual se le da un referente o contenido semántico posterior”, como señala De Lorenzo (1971). El estudio de los usos y asignaciones de referentes, que se hace en los textos de Matemáticas, a los signos artificiales a lo largo de la historia, permite elaborar una tipología de éstos en el proceso de culturización matemática, así como, determinar lo que De Lorenzo llama “estilos matemáticos”.

Kieran y Filloy (1989) sugieren sustituir la noción de Sistema de Signos matemáticos por la de Sistema Matemático de Signos (SMS), con su código correspondiente. Esta noción de Sistema Matemático de Signos es lo suficientemente amplia que permite analizar no sólo los textos matemáticos históricos, sino también las producciones de los alumnos en clase de Matemáticas. Este punto de vista supone situarse en una semiótica de las Matemáticas centrada en los sistemas de significación y en los procesos de producción de sentido antes que en el estudio de los signos.

Por último, describimos la noción de representación semiótica. Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: “un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1) La presencia de una representación identificable...

2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro en la que ha sido formada...

3) La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...”

Si consideramos los objetos y el lenguaje del Álgebra para analizar y fundamentar todas las cuestiones anteriores, observamos que en este conocimiento o saber matemático se usan múltiples modelos; por ejemplo, el del equilibrio, el analítico, el “canónico”, el “factorial”, o el funcional, para las ecuaciones lineales o cuadráticas, en sus versiones numéricas, algebraicas, gráficas o geométricas, que se pueden expresar mediante diferentes representaciones semióticas de naturaleza analógica (gráfica o visual) o digital (simbólica o formal). Por ejemplo, las representaciones gráficas o geométricas aportan distintas representaciones semióticas visuales discretas o continuas que dan significado al lenguaje algebraico. Las conversiones entre diferentes lenguajes: habitual, gráfico, aritmético, geométrico y algebraico, facilitan los procesos de sustitución formal y generalización, típicos del lenguaje algebraico en esta etapa educativa.

Competencia Matemática Formal

La Competencia Matemática Formal (CMF), toma en consideración a la Matemática como una Disciplina Científica, que tiene unas características y un orden lógico propio, y muestra la organización formal de su campo conceptual en relación con los conceptos, fenómenos y funciones implicados.

En este caso, pretendemos explicitar lo que caracterizamos como Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos conceptuales:

Números (Aritmética), Álgebra y Análisis, con especial referencia a los contenidos matemáticos del currículo no universitario. En consecuencia, tendremos que explicitar la organización lógico-formal de la Matemática, es decir, los conceptos, relaciones y procedimientos que la caracterizan, así como las funciones, situaciones y fenómenos que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los objetos matemáticos implicados.

El Modelo de Competencia Formal tiene como punto de partida la organización conceptual, funcional y fenomenológica de los objetos matemáticos y éstos se van a organizar desde la perspectiva lógico semiótica que hemos considerado (Socas, 2001 y 2007), es decir, por la organización lógico-semiótica de los conceptos, fenómenos y funciones que concrete de forma eficiente (competente) sus diferentes procesos de significación.

En este análisis vamos a considerar el campo conceptual algebraico y tomaremos ejemplos del Álgebra en la ESO. Como hemos señalado, para las Matemáticas en general, la naturaleza de sus objetos y sus representaciones constituyen, sin lugar a dudas, un dominio sumamente complejo. A efectos de establecer esta organización lógico-semiótica y describir los diferentes procesos de significación, identificaremos la cultura matemática de forma más concreta y con una referencia más explícita al sistema educativo, en términos de entender el conocimiento matemático.

En el epígrafe anterior, hemos identificado los objetos matemáticos en dos procesos diferentes denominados de "culturización matemática" y de "matematización de la cultura", y hemos diferenciado el primero, como parte de una conciencia colectiva (sentido histórico), y el segundo, como parte de una conciencia individual (sentido didáctico).

En este análisis, al intentar caracterizar la Competencia Matemática Formal (CMF) nos estamos refiriendo a los objetos matemáticos del proceso de "culturización matemática" y, como hemos comentado, a efectos de simplificar y concretar esta caracterización, tomamos como referencia el Álgebra en el nivel temático de la ESO. En consecuencia, es necesario explicitar y relacionar el campo conceptual algebraico, la fenomenología del conocimiento algebraico y la funcionalidad del lenguaje algebraico.

Campo conceptual del Álgebra

La caracterización del campo conceptual del Álgebra supone, por una parte, organizar la complejidad de los objetos del Álgebra y, por otra, tomar en consideración los diferentes procesos en los que está presente el conocimiento algebraico.

En relación con la complejidad de los objetos del Álgebra observamos cómo ésta opera en dos niveles: semántico -los signos algebraicos son dados con un significado claro y preciso-, y sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado-. Es decir, en general, los objetos de las Matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso; y el estatus conceptual, de carácter estático, en el que los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos aspectos integrantes de los objetos de la Matemática.

Los objetos matemáticos del Álgebra, como todos los objetos matemáticos, tienen un carácter dual que estarán presentes tanto en los fenómenos que organizan como en las funciones que desarrollan. Necesitamos, en consecuencia, caracterizar esta dualidad operacional/ conceptual en el Álgebra, es decir, relacionar los signos con los objetos algebraicos y sus significados. Esta dualidad del objeto matemático ha sido utilizada e interpretada de formas diferentes por distintos autores: Hiebert y Lefevre (1986), Douady (1986), Sfard (1991), Socas (2001)…

En los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), esta dualidad se desarrolla bajo las nociones de conocimiento conceptual y procedimental.

"Conocimiento conceptual": se caracteriza como un conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado.

"Conocimiento procedimental": se construye en dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las Matemáticas. La otra, consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información: una que consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos y, otra, en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos.

Estos autores ponen de manifiesto las características diferentes de cada uno de ellos. Indican que el conocimiento conceptual es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna; se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. Mientras que, el conocimiento procedimental, es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Dichos autores establecen relaciones entre ambos conocimientos, de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan, b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas y, c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente pues, dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

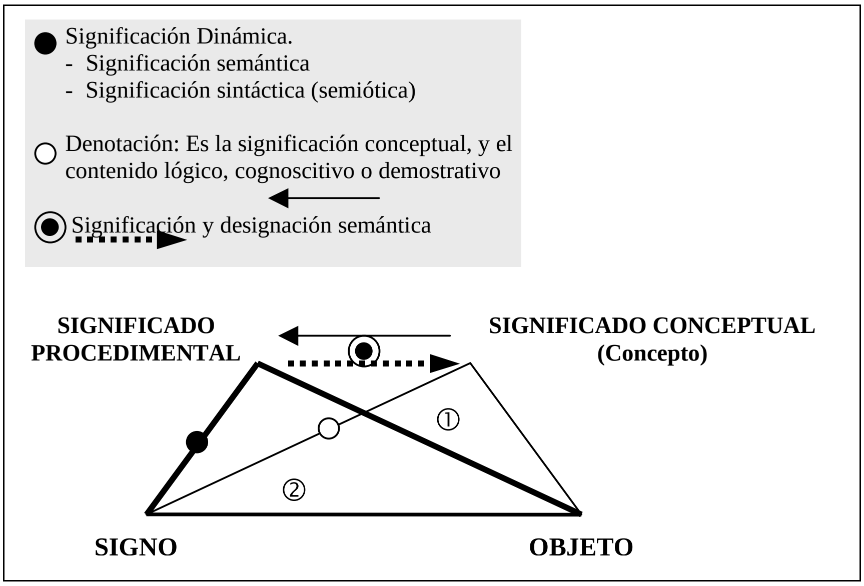
Es ciertamente una forma sencilla de explicitar, desde un punto de vista conceptual, la dualidad operacional/conceptual, es decir, la convivencia en Matemáticas de los tipos de conocimiento, conceptual y procedimental.

Socas, 2001, analiza la dualidad operacional/conceptual en el marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), en términos de la función semiótica que deriva del plano denotativo y connotativo de la tríada: signo-objeto-significado. Esquemáticamente se representa así:

<table>
<tr><td colspan="3">SIGNO</td><td>OBJETO</td><td>SIGNIFICADO
(conceptual)</td><td>← PLANO DENOTATIVO</td></tr>
<tr><td>SIGNO</td><td>OBJETO</td><td>SIGNIFICADO
(procedimental)</td><td></td><td></td><td>← PLANO CONNOTATIVO</td></tr>
</table>

El punto de partida es la posición de Peirce (1987), en la que el signo se presenta como una relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo está relacionado con tres instancias separables analíticamente: representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que le conecta con el objeto); objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento) e interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta).

La tríada de Peirce se expresa en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) mediante la tríada: signo-objeto-significado. Explicitar las relaciones que se dan en esta tríada en los dos planos de la función semiótica es el objetivo esencial para determinar conceptualmente el papel de los objetos y los signos en el lenguaje algebraico y una forma de expresar la dualidad operacional/conceptual. En ELOS esta dualidad se determina separando el significado en dos: significado conceptual y procedimental, y modelizando tales relaciones mediante el trapecio formado por los dos triángulos, signo-objeto-significado (conceptual) y signo-objeto-significado (procedimental), de la siguiente manera:



En este esquema se modelizan las siete relaciones que caracterizan la dualidad operacional/conceptual. Al menos tres de ellas pueden ser descritas en relación con el conocimiento conceptual y procedimental desarrollado en Hiebert y Lefevre (1986). La primera es la relación entre el signo y el conocimiento conceptual, que denominamos “denotación” del signo y se caracteriza como la significación conceptual. La segunda, es la relación entre el signo y el significado procedimental, que denominamos "significación dinámica" y está caracterizada por las dos clases de información que engloba el conocimiento procedimental y que llamamos "significación semántica" y "significación sintáctica", respectivamente. La tercera es la relación entre el significado conceptual y el procedimental, que también se describe someramente en los citados autores, y que relaciona el significado conceptual con el procedimental ("designación semántica") y el significado procedimental con el conceptual (significación semántica"). Las restantes relaciones, por ejemplo, la relación signo-objeto o las relaciones objeto-significado conceptual o procedimental, son aún cuestiones abiertas.

Funciones del lenguaje algebraico

Si analizamos las diferentes funciones del lenguaje algebraico (matemático), podemos decir que éste se concreta en las cuatro funciones básicas de los lenguajes: "expresiva" (estado del objeto algebraico que facilita la representación semiótica y que permite la materialización o encarnación del objeto), "señalizadora" (que evoca, desencadena, estimula..., una reacción en el receptor), "descriptiva" y "argumentadora".

Las dos funciones "expresiva" y "señalizadora" son consideradas como funciones inferiores de todo lenguaje, no así en el lenguaje matemático (algebraico). A la función expresiva se le asocia una "percepción primaria" y a la función señalizadora se le atribuye el poder de desencadenar una "actividad perceptual". Deben entenderse como procesos complementarios.

Pero el lenguaje algebraico (matemático), al igual que el lenguaje humano, es mucho más rico; posee dos funciones superiores que son de vital importancia para la evolución del razonamiento matemático y para la racionalidad de los objetos matemáticos; éstas son las funciones "descriptiva" y “argumentadora”.

La organización anterior del lenguaje matemático nos ofrece una perspectiva útil para hacer una distribución de los objetos algebraicos. Si consideramos “las situaciones problemáticas” o “fenómenos” de naturaleza didáctico matemático, podemos caracterizar los fenómenos que tienen lugar con los objetos algebraicos en la actividad matemática mediante tres entidades primarias o básicas que tomaremos como referencia: “Expresiones semióticas”, “Descripciones algebraicas” y “Argumentaciones algebraicas”.

Las “expresiones semióticas”, se refieren a los observables y ostensibles utilizados en la actividad matemática, tales como, términos, símbolos, tablas, gráficos, palabras... y, en general, todas las representaciones externas del objeto algebraico. Las expresiones semióticas asumen las funciones expresivas y señalizadoras del lenguaje algebraico.

Las “descripciones algebraicas” se refieren, a las definiciones, propiedades, características de los objetos algebraicos, y a las relaciones de los objetos entre sí, es decir, conceptos, proposiciones, procesos, algoritmos, operaciones...

Las “argumentaciones algebraicas” son tanto las demostraciones para probar propiedades del Álgebra como las pruebas que empleamos para mostrar a otra persona la solución de la situación problemática o fenómeno algebraico.

Ahora bien, desde el punto de vista de la Teoría Semiótica, tenemos que suponer que una “expresión de signos matemáticos” no designa un objeto matemático del mundo real, sino que transmite un contenido de la cultura matemática. En nuestro caso, aunque el significado del objeto algebraico corresponda con un objeto del mundo cultural (culturización matemática), el contenido algebraico se identifica con el referente, es decir, lo identificamos como objeto cultural y no como unidad cultural. Esta es la posición del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001, 2007).

El conocimiento algebraico y su fenomenología

En el nivel temático considerado, el conocimiento algebraico, es entendido como el desarrollo de habilidades para manipular letras y otros símbolos que pueden significar cosas diferentes, y también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas a través de relaciones bien definidas. Usiskin (1988), al considerar el Álgebra escolar, entiende que ésta es esencialmente la comprensión del significado de las letras y las operaciones con ellas. El autor propone la siguiente relación: aritmética generalizada (generalizar patrones: traducir, generalizar), medio para resolver ciertos problemas (incógnitas, constantes, resolver, simplificar), estudio de relaciones (argumentos, parámetros, relacionar, hacer gráficas), y estructura (signos arbitrarios, manipular, justificar).

Freudenthal (1983) insiste en los aspectos esenciales del Álgebra y trata de presentarla como un lenguaje para ser aprendido y utilizado, con el inconveniente de que en la vida diaria no se emplea con frecuencia y en el contexto escolar no es adquirido de forma natural.

En este marco debemos considerar las diferentes categorías de interpretación y uso de las letras (interesan, más que la notación formal en sí misma, las ideas representadas por esas expresiones), que para Küchemann (1981) son: letras evaluadas (a las que se les asigna un valor numérico desde el principio), letras ignoradas (a las que se les reconoce su existencia pero no se les asigna ningún significado), las letras como objeto (objeto concreto: frutas, lados de un polígono, etc.), letras como incógnitas específicas (como un número desconocido, pero específico sobre el que se puede operar directamente), letras que generalizan números (como una representación de varios valores numéricos antes que de uno exactamente) y letras como variables (consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados en el que se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores).

Actualmente encontramos un cierto acuerdo cuando se habla de las competencias del Álgebra en la escuela obligatoria: “ocuparse del estudio de las "letras" o "variables" y de las propiedades que las relacionan”.

Existen diferentes interpretaciones a la afirmación anterior (Socas et al. 1989): Álgebra como Aritmética generalizada (las letras forman parte de modelos que permiten generalizar las propiedades numéricas), Álgebra como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos (las ecuaciones), Álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y Álgebra como modelo estructural.

Más recientemente encontramos una propuesta de organización más actualizada de los contenidos del Álgebra en la Escuela Secundaria Obligatoria, según la cual éstos deben organizarse en torno a la generalización, la resolución de problemas, la modelización y las funciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

La propuesta de organización y fenomenología asociada a los objetos algebraicos, está relacionada con la generalización y la resolución de problemas. En ella destacan:

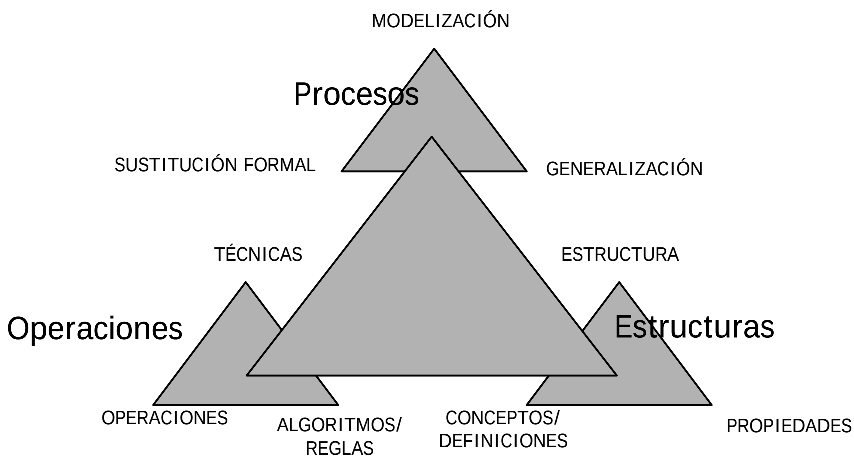
(1) Capacidades algebraicas que se deben desarrollar: usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones, trabajar y hacer conversiones entre diferentes representaciones semióticas, sustituir formalmente, generalizar y particularizar, hacer transformaciones en expresiones algebraicas, leer, interpretar y hacer transformaciones en funciones y fórmulas dadas, plantear y resolver ecuaciones por métodos algebraicos y otros.

(2) Usar las letras con significados algebraicos en entornos numéricos y de magnitudes (álgebra de las cantidades) y en entornos geométricos (álgebra geométrica).

(3) Usar diferentes sistemas de representación semióticos y fuentes de significado: contextual, numérico, visual/geométrico, esquema y formal.

El análisis de los diferentes aspectos del Álgebra: conceptual, funcional y fenomenológico, nos permite describir la Competencia Matemática Formal (CMF) y como ésta se puede expresar como un modelo de competencia organizado con relación a las tres características de las Matemáticas como disciplina: campo conceptual, resolución de problemas y lenguaje propio, descrito anteriormente como los elementos que caracterizan a la disciplina matemática.

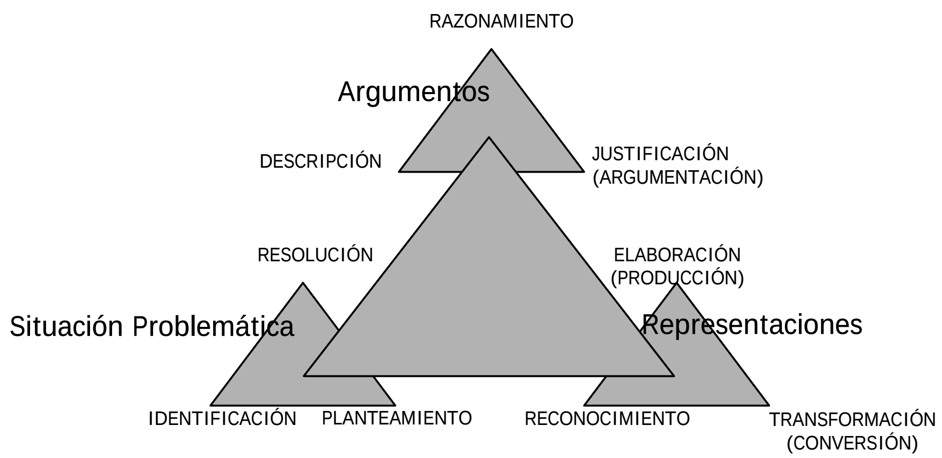
En este caso, vamos a describir la competencia matemática formal (CMF) para los campos numérico, algebraico y analítico. Ésta queda caracterizada por la siguiente semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos, y como contexto: las situaciones problemáticas, el lenguaje (expresivo y descriptivo) y los argumentos. El campo conceptual de forma esquemática quedaría así:



En él se expresan los diferentes dominios de la actividad matemática, en relación con el campo conceptual desde la perspectiva formal y sus diferentes relaciones, es decir, se describe la dualidad de los objetos matemáticos en relación con el conocimiento matemático conceptual/procedimental del campo tratado. De manera concreta, si nos situamos en una actividad algebraica relacionada con el Álgebra de la ESO, ésta puede ser descrita con relación a las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y sus relaciones. Cada componente a su vez, está determinada por otras tres componentes que describen una nueva semiosis. La componente "Operaciones" queda determinada por la semiosis: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente "Estructuras" por: conceptos (definiciones), propiedades y estructura; y la componente "Procesos" por: sustituciones formales, generalización y modelización.

Esta organización de los campos conceptuales numérico, algebraico y analítico está contextualizada en las Situaciones problemáticas que se abordan en el campo conceptual, en el Lenguaje (Representaciones) y Argumentos (Razonamientos) que se utilizan en el desarrollo de la situación problemática.

La contextualización del campo conceptual se expresa de forma esquemática así:



Análogamente, los tres componentes del contexto, quedan determinados por las respectivas semiosis. En el caso de Situaciones problemáticas: identificación, planteamiento y resolución; en Representaciones (lenguaje): reconocimiento, transformación (conversión) y elaboración (producción); y en Argumentos: descripción, justificación y razonamientos.

El modelo CMF permite describir el campo conceptual del objeto matemático en el nivel temático en el que lo estemos considerando, además de sus funciones y su fenomenología. Es, en consecuencia, un instrumento técnico de gran utilidad, por ejemplo, para analizar significados atribuidos a los objetos matemáticos desde la perspectiva institucional, currículo, libros de textos mediante la elaboración de un mapa de los contenidos tratados.

Si nos situamos en el currículo de Matemáticas de 1º de ESO (BOC, 2007) y consideramos los contenidos relativos a números racionales y decimales del Bloque II. Números, descritos en los apartados 3 y 6, que son los siguientes:

> 3. Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. Fracción generatriz de un decimal exacto. Ordenación de fracciones y decimales exactos.
> 6. Porcentajes. Cálculo mental y escrito de porcentajes habituales. Aplicaciones a la resolución de problemas de la relación de porcentajes muy sencillos con la fracción y el decimal exacto correspondiente.

Estos contenidos curriculares pueden ser organizados mediante lo que denominamos Mapa de los conocimientos curriculares, que queremos tratar, organizando, en un primer momento, el campo conceptual numérico, referido a las fracciones y a los números decimales, para luego completar el Mapa con el contexto en que se desarrollan los objetos matemáticos del campo conceptual en el nivel temático considerado.

El Mapa de los conocimientos fracciones y números decimales en relación con el campo conceptual numérico para 1º de la ESO, lo expresamos mediante el siguiente cuadro:

FRACCIONES Y DECIMALES (1º ESO)

PROCESOS

Sustitución formal

- Cambio de representación decimal a fraccionaria y viceversa
- Representación en la recta numérica
- Representación discreta y continua

Generalización

- Fracción generatriz de una expresión decimal exacta y periódica
- Fracción decimal y sistema de numeración decimal ampliado

Modelización

- Situaciones problemáticas que involucren números fraccionarios y decimales (porcentajes de cantidades…)

OPERACIONES

- Operaciones aditivas
- Operaciones multiplicativas
- Ordenar fracciones y decimales

Algoritmos

- Reducir fracciones a común denominador
- Sumar y restar números decimales y fracciones con distinto denominador
- Multiplicar y dividir decimales y fracciones

Técnicas

- Redondeo de un número racional en escritura decimal periódica
- Representación en la recta de los números racionales

Fracciones y Decimales (Currículo)

- Fracciones y decimales en entornos cotidianos
- Diferentes significados y usos de las fracciones
- Fracciones equivalentes
- Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente
- Fracción generatriz de un decimal exacto
- Ordenación de fracciones y decimales exactos
- Porcentajes
- Cálculo mental y escrito

ESTRUCTURAS

- Fracción como parte de la unidad (parte-todo)
- Numerador y denominador
- Fracción como medida, cociente, razón, y operador
- Fracciones equivalentes
- Fracciones irreducibles
- Fracción y número racional
- Fracción decimal y no decimal
- Fracción decimal y número decimal
- Expresión decimal

El Mapa de los conocimientos se completa explicitando el contexto en que se desarrollarán los objetos matemáticos del campo conceptual numérico en el nivel temático considerado: 1º de la ESO. Lo expresamos también mediante el siguiente cuadro, bajo el epígrafe que denominamos: Escrituras y razonamientos.

Escrituras y razonamientos: fracciones y números decimales

ESCRITURAS (representaciones)
- Escritura fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta
- Representación digital (fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta)
- Representaciones analógicas discretas y continuas (colecciones, recta numérica y áreas)

RAZONAMIENTOS
- Esquemas: partes-todo, operativos (+, x) y (- , /), y semánticos
- Usos de la fracción: parte-todo, cociente, razón, medida, operador y porcentaje
- Sentido numérico (estimación: fraccionaria, decimal y porcentajes)
- Agrupar y desagrupar en el sistema de numeración decimal ampliado
- Deductivos: Esquemas e Inclusión numérica
- Inductivos (relaciones de igualdad)

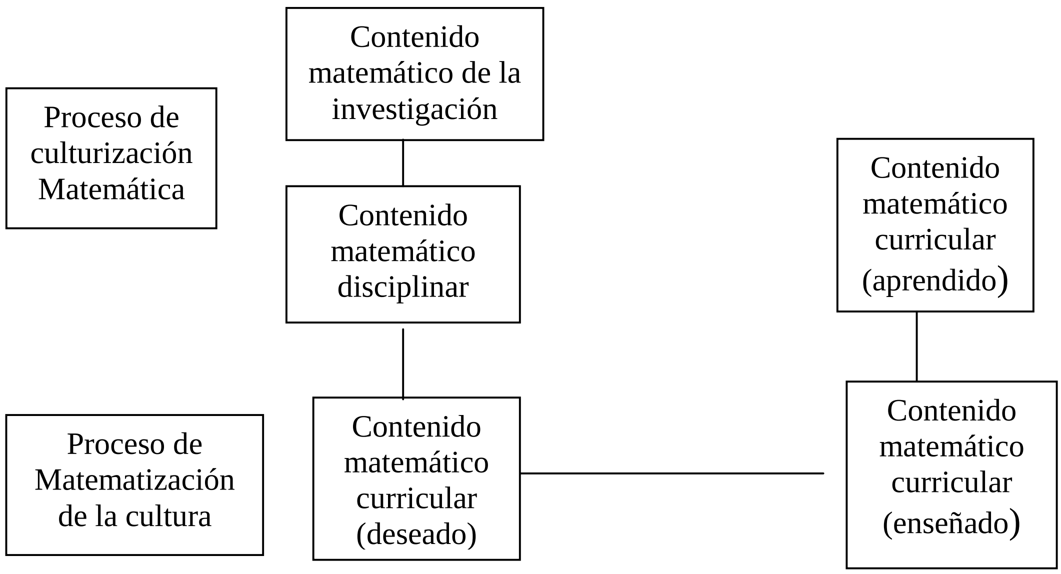
SITUACIONES PROBLEMÁTICAS
- Situaciones de parte-todo, de unión de partes, de transformación (operador), de comparación, de partición de un todo
- Situaciones de partición y reparto
- Situaciones de medida
- Situaciones de representaciones y cambios
- Situaciones de porcentajes de cantidades discretas y continuas

Podemos, igualmente, caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la competencia matemática formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan a los alumnos, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, si estamos trabajando en la Educación Obligatoria y, en consecuencia, analizar e interpretar las producciones del alumnado en la realización de las tareas, así como organizar los errores y hacer conjeturas sobre las dificultades, obstáculos y origen de éstos tanto desde el punto de vista de la docencia como de la investigación.

Consideraciones finales

En este artículo hemos considerado dos formas diferenciadas del conocimiento matemático y hemos identificado dos tipos de contenido matemático: el contenido matemático disciplinar (cmd) y el contenido matemático curricular (cmc). El primero (cmd) lo hemos situado como el contenido matemático del proceso de Culturización Matemática y el segundo (cmc) como contenido matemático del proceso de Matematización de la Cultura.

Estos dos procesos y sus relaciones con el contenido matemático, los podemos representar, de manera simplificada, mediante el siguiente esquema:



Si nos situamos en la perspectiva del profesor de Matemáticas, este análisis nos lleva a que el contenido matemático emerge en la profesión del docente como un espacio de conocimiento o entorno que tiene, desde la función del docente de Matemáticas, tres ámbitos específicos que necesita analizar, comprender y planificar. De manera concreta, podemos representar los diferentes ámbitos de contenido matemático mediante el siguiente cuadro en el que, además, se explicita su relación con el tipo de organización interna y con las competencias disciplinares y profesionales.

Contenidos	Matemático Disciplinar (cmd)	Matemático Curricular (cmc)	Matemático de Enseñanza (cme)
Organización	Lógica	Pedagógica	Didáctica
Competencias	Matemática Formal	Matemática Básica	Básicas

Identificamos como el primer ámbito que el profesor necesita organizar, al que deriva de la propia disciplina, el saber matemático erudito, que podemos denominar contenido matemático disciplinar (cmd) o formal; el siguiente ámbito es el contenido matemático curricular (cmc), contenido matemático deseado que es definible en el dominio del contenido matemático disciplinar, aunque no es organizado bajo esa lógica. Mediante mecanismos y organizaciones precisas se extraen del contenido disciplinar y se sitúan en el currículo. Realizadas estas acciones por diferentes elementos del sistema educativo, el contenido matemático curricular es intrínsecamente diferente del saber disciplinar, al menos en su aspecto epistemológico, y admite interpretaciones desde diferentes perspectivas, por ejemplo funcional, como parte de una cultura básica común (Rico y Lupiáñez, 2008), y el tercer ámbito, es el contenido matemático para la enseñanza (cme), que comprende tanto el contenido matemático enseñado como el evaluado (Hernández y otros, 2010).

Los tres contenidos se relacionan entre sí en un procedimiento que se denomina transposición didáctica o adaptación de los contenidos matemáticos, pero con una organización propia y diferenciada. La organización del contenido matemático disciplinar sigue el orden lógico de la disciplina, y está asociada a la competencia matemática disciplinar o formal de los sujetos que la organizan. La organización del contenido matemático curricular surge de un orden pedagógico implícito en los diseñadores del currículo, y está asociada a la competencia matemática básica como parte de una cultura común. La organización del contenido matemático para la enseñanza se elabora a partir del orden didáctico y está asociada a la competencia de los sujetos en el conocimiento didáctico matemático (cdm) y determina la secuencia y el nivel del contenido matemático en la propuesta de enseñanza en relación con la competencia matemática básica y las demás competencias básicas.

Si consideramos como tarea profesional del docente de Matemáticas la de organizar el contenido matemático para la enseñanza, esta tarea conlleva que el profesor debe ser competente en los tres ámbitos del contenido matemático en la etapa y nivel educativo en los que desarrolla su profesión.

En este trabajo hemos abordado de forma explícita el primero de los tres contenidos, el contenido matemático disciplinar (cmd), y hemos establecido una organización de éste en forma de modelo (CMF), que hemos formulado como un conocimiento técnico que permite al profesional docente reconceptualizar el contenido matemático curricular, en términos del contenido matemático disciplinar para organizar la enseñanza, en el nivel educativo en el que trabaja.

En resumen, a partir de la naturaleza de los objetos matemáticos y sus representaciones, identificados como objetos que se organizan en campos conceptuales que tienen una funcionalidad y fenomenología concreta, se establece la Competencia Matemática Disciplinar (CMF), para los campos numérico, algebraico y analítico, como un conocimiento profesional de naturaleza técnica que ayuda al profesor a adaptar y procesar su conocimiento teórico y práctico de la Cultura Matemática (Culturización Matemática) y a entender mejor el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática (Matematización de la Cultura).

Referencias bibliográficas

Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Montreal: Kluwer.

BOC (2007). *DECRETO 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias.* (Boletín Oficial de Canarias núm. 113, jueves, 7 de junio de 2007).

Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática*. Madrid: MEC-Labor. (Título original: The Mathematical Experience. Boston: Birkhäuser, 1982).

De Lorenzo, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

Douady, R. (1986). Approaches des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11,* 77-110.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México, 1997).

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* London: Falmer Press.

Ernest, P. (1994). The Philosophy of Mathematics and the Didactics of Mathematics. En R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 335-349). Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1998). Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics. En C. Alsina et al. (Eds.), *Selected Lectures. ICME 8*, 1996, (pp. 153-171). Sevilla: SAEM THALES.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Geertz, C. (1987). *La interpretación de las culturas*. Barcelona: Gedisa.

Hernández, J.: Muñoz, M. Palarea, M.M.; Ruano, R. y Socas, M.M. (2010). La programación por competencias en la clase de Matemáticas. Una actividad profesional básica. En M.T. González, M.M. Palarea y A. Maz, (Eds.), *Seminario de los grupos de investigación pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática* (pp. 26-49). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias. 7(3),* 229-240.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad (Traducción al castellano de: *Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: University Press, 1976).

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

Popper, K. R. (1974). *Conocimiento objetivo.* Madrid: Tecnos (versión castellana de *Objective knowledge.* Oxford: Oxford University Press, 1972).

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1),* 1-36.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Horsori: Barcelona.

Socas, M. M. (2000). Cambios en el currículo de Matemáticas en la formación inicial del profesorado de Infantil y Primaria. *Guiniguada*. *Revista del Centro Superior de Formación del Profesorado,* 8/9, pp. 261-274. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía*

Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 19-52.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. F. Coxford, y A. P. Shulte (Eds.). *Ideas of Algebra, k-12*, pp. 8-19. Reston, VA: N.C.T.M.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial (Versión en castellano de *Remarks on the foundation of Mathematics*, 1979. Cambridge, MA: MIT Press).