FORMULANDO CONJETURAS MATEMÁTICAS EN ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE ASISTIDAS CON TECNOLOGÍA

Fernando Barrera Mora
Aarón Reyes Rodríguez

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México)

Resumen

¿Qué tipo de actividades deberían incluir los programas de desarrollo profesional para revisar y ampliar los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los profesores de bachillerato? Proponemos una ruta para involucrar a los profesores en una aproximación inquisitiva en la que reflexionen sobre su práctica docente y para que construyan trayectorias potenciales de instrucción que eventualmente pueden guiar u orientar el desarrollo de sus lecciones. En este trabajo, centramos la atención sobre las actividades que se desarrollaron dentro de una comunidad profesional que incluyó la participación de matemáticos, educadores matemáticos y estudiantes de un programa de doctorado en educación matemática.

Abstract

What types of activities should professional development programs include to revise and extend high school teachers' mathematical and pedagogical knowledge? We propose a route to engage high school teachers in an inquiry approach to reflect on their current practice and to construct hypothetical learning trajectories that can eventually guide or orientate the development of their lessons. In this report, we focus on the activities that were discussed within a professional community that includes the participation of mathematicians, mathematics educators and doctoral students.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA IX
F. Barrera y Reyes, A. (2008). *Formulando conjeturas matemáticas en actividades de aprendizaje asistidas con tecnología, pp. 27-46*

Introducción

¿Qué conocimientos matemáticos y pedagógicos debería incluir la educación de los profesores de matemáticas del nivel de bachillerato? ¿Quién debería participar en los programas educativos para preparar a los profesores de matemáticas? ¿Cuál debería ser el papel de los departamentos de matemáticas o de las facultades de educación en la preparación de los futuros profesores o de los profesores en servicio? ¿En qué tipo de programas educativos deberían participar los profesores en activo con el objetivo de revisar y ampliar su conocimiento matemático, así como para incorporar los resultados de la investigación en educación matemática en su práctica docente?

Las formas tradicionales de preparar a los profesores de bachillerato normalmente incluyen la participación de los departamentos de matemáticas y las facultades de educación. Los departamentos de matemáticas ofrecen cursos de matemáticas, mientras que las facultades de educación proporcionan los cursos sobre didáctica o pedagogía. Este modelo de formación no ha brindado bases sólidas para ayudar a los profesores a desarrollar un ambiente de instrucción en el cual exhiban conocimientos matemáticos estructurados para interpretar e impulsar las respuestas de los estudiantes y para organizar e implementar actividades para un aprendizaje significativo. Ciertamente, es común leer que los profesores universitarios se quejan de que sus estudiantes de primer año carecen no sólo de conocimientos matemáticos fundamentales, sino también de estrategias o recursos para resolver problemas que requieren más que el uso de reglas o fórmulas.

“Muchos profesores en servicio, por diferentes razones, no han aprendido algunos de los contenidos que se requiere que enseñen, o no los han aprendido de un modo que les permita enseñarlos como se requiere en la actualidad….Los profesores necesitan apoyo si debiera alcanzarse el objetivo de que todos adquieran capacidad matemática. Las exigencias que esto ocasiona sobre los educadores y la educación de los profesores son sustanciales y frecuentemente sub-apreciadas”. (Adler, et al., 2005, p.361).

Davis y Simmt (2006) sugieren que los programas de preparación de profesores deberían enfocarse más en que ellos construyan ideas matemáticas o relaciones para apreciar conexiones, interpretaciones, y el uso de varios tipos de argumentos para validar y sustentar esas relaciones, que en el estudio de cursos de matemáticas formales. Así, el contexto para la construcción de su conocimiento matemático debería relacionarse con las necesidades asociadas con sus prácticas de instrucción. “…[el conocimiento matemático] necesario para la enseñanza no es una versión reducida de las matemáticas formales, sino un área seria y demandante del trabajo matemático” (ibid, p. 295). En este trabajo, defendemos la idea de que el conocimiento matemático de los profesores puede revisarse y enriquecerse mediante la interacción en una comunidad de colaboración que propicie una aproximación inquisitiva al desarrollo de ideas matemáticas y promueva actividades de resolución de problemas. El núcleo de esta comunidad debe incluir a matemáticos, educadores matemáticos, y profesores en ejercicio. Esta comunidad promueve trabajo colaborativo para construir trayectorias potenciales de instrucción que guíen u orienten las prácticas de instrucción. Los profesores necesitan interactuar dentro de una comunidad que sustente y les proporcione información colegiada; la oportunidad para compartir y discutir sus ideas con el objetivo de enriquecer su conocimiento matemático, así como sus estrategias de resolución de problemas.

En este contexto, destacamos la importancia de usar herramientas computacionales para representar y explorar varias formas de aproximarse a las tareas matemáticas.

Preguntas de investigación

Varios trabajos de investigación (Santos-Trigo, 2004; Schoenfeld, 1994, 2000; NCTM, 2000) enfatizan la importancia de formular y validar conjeturas cuando se aprende y desarrollan matemáticas. El proceso de conjeturar involucra varias dimensiones cuando la tecnología se usa sistemáticamente. Por ejemplo, la idea de generalización se amplifica y al mismo tiempo se tiene la oportunidad de elaborar preguntas sobre las formas en las cuales funciona un sistema computacional específico.

Las preguntas que guían esta investigación son: ¿Qué tipo de razonamiento matemático podrían desarrollar los profesores de los niveles medio y superior para reconstruir o enriquecer su conocimiento matemático al usar tecnología para explorar trayectorias potenciales de instrucción? ¿Qué tipo de argumentos matemáticos podrían formular los profesores de matemáticas para explicar resultados computacionales inesperados?

Marco conceptual

El marco conceptual se estructura alrededor de dos elementos teóricos principales: (I) resolución de problemas y tecnología y (II) trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Hemos elegido esos constructos ya que el aprendizaje de las matemáticas se logra a través de la resolución de problemas, la cual es enriquecida por el uso de los medios tecnológicos. Al respecto, argumentamos que la promoción de una aproximación inquisitiva al aprendizaje de las matemáticas puede lograrse de forma efectiva mediante la elaboración sistemática de preguntas y la formulación de conjeturas. Esta ruta está fuertemente relacionada con el descubrimiento y exploración de diferentes trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Resolución de problemas y el uso de la tecnología

En las actividades de resolución de problemas se ha reconocido la relevancia de una aproximación inquisitiva o de investigación para que los profesores trabajen en tareas matemáticas o para que piensen y reflexionen sobre sus actividades de instrucción. En este contexto, el aprendizaje de las matemáticas o el desarrollo del conocimiento a través de la resolución de problemas se conceptualiza como el trabajo con tareas donde: "Una tarea u actividad orientada por objetivos, llega a ser un problema (o una actividad problemática) cuando el sujeto que resuelve el problema (el cual puede ser un grupo de colaboración o de especialistas) necesita desarrollar una forma más productiva de pensar acerca de las situaciones dadas" (Lesh y Zawojewski, 2007, p. 782).

Es importante clarificar lo que se entiende por una forma productiva de pensamiento. De acuerdo con los mismos autores: "Desarrollar una 'forma productiva de pensamiento' significa que el resolutor necesita comprometerse en un proceso de interpretación de la situación, lo cual en matemáticas significa modelizar" (p. 782).

En este contexto, un componente importante es desarrollar una forma inquisitiva de pensamiento para formular preguntas, para identificar e investigar dilemas, para buscar evidencia o información, para discutir soluciones y, para presentar o comunicar resultados. Esto significa disposición para cuestionar, para formular y examinar preguntas, así como para desarrollar entendimiento matemático dentro de una comunidad que valore la colaboración y la reflexión constante. Al respecto, Schoenfeld (1994) argumenta: "Los matemáticos desarrollan mucho de ese entendimiento matemático profundo en virtud del aprendizaje en esa comunidad [la comunidad matemática] típicamente en la universidad y como profesionales jóvenes" (p. 68). Un modo de investigación involucra necesariamente los retos de la situación actual, de una reconceptualización continua de lo que se aprende y de la forma en que se construye el conocimiento.

"[En una comunidad de colaboración] los participantes crecen y contribuyen a la reconstitución continua de la comunidad a través de la reflexión crítica; la investigación se desarrolla como una de las formas de práctica dentro de la comunidad y la identidad individual se adquiere a través de una búsqueda reflexiva (Jaworski, 2006, p. 202)."

Si tenemos en cuenta esta visión y consideramos que el uso de la tecnología ha desempeñado un papel importante en el proceso de aprendizaje, al enriquecer diferentes elementos del pensamiento matemático, particularmente la formulación y validación de conjeturas, es relevante preguntar: ¿cuál es el papel de un sistema computacional en el proceso de elaborar y justificar conjeturas? ¿Qué tan confiables son los resultados matemáticos obtenidos con la asistencia de un sistema computacional?

En relación con la primera pregunta, Santos (2007) argumenta: "un aspecto relevante en la representación de una tarea con la asistencia de un software dinámico es que los estudiantes tienen la oportunidad de formular preguntas acerca de la estructura de algunos elementos en la configuración" (p. 124).

Respecto a la segunda pregunta, Dick (2007) introdujo el término *Fidelidad Matemática* "para enfatizar que las matemáticas de la herramienta no siempre representan a las matemáticas en la forma en que éstas son entendidas por la comunidad matemática" (p. 1174). En el ejemplo que discutiremos, señalaremos la fuerte necesidad de proporcionar argumentos matemáticos para tratar con las discrepancias entre los resultados que ofrece la computadora y los resultados esperados.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Para promover las aproximaciones inquisitivas de los profesores en su práctica docente, puede ser de utilidad la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (su sigla en inglés es HTL). Esas trayectorias emergen de examinar las rutas que surgen al explorar una situación problemática. Simon y Tzur (2004) establecen que la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje se basa en las siguientes suposiciones:

1. La generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje está basada en el entendimiento del conocimiento actual de los estudiantes.
2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es un vehículo para la planeación del aprendizaje de conceptos matemáticos particulares.
3. Las tareas matemáticas proporcionan herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares y son, entonces, una parte clave del proceso de instrucción.
4. A causa de la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor regularmente está involucrado en la modificación de cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje. (p. 93).

Cuando las tareas son diseñadas para revisar y ampliar los conocimientos matemáticos de los profesores, no se tiene como objetivo principal que se logre el aprendizaje de un concepto matemático particular; más bien se pretende que dichas tareas sean un vehículo para ayudar a estructurar redes conceptuales. Esto se conecta de manera natural con el surgimiento de diversos caminos de solución en una situación problemática, dando lugar a lo que *llamaremos Trayectorias Potenciales de Instrucción*. Por ejemplo, en la tarea que se discute en este trabajo se presentan tres trayectorias potenciales de instrucción que surgieron al formular preguntas en el contexto de una situación problemática.

En esta perspectiva, sugerimos que los profesores junto con otros miembros de la comunidad (incluyendo a los matemáticos), trabajen sobre varias formas de aproximarse a una tarea y para identificar conceptos relevantes y estrategias de solución. Argumentamos que este tipo de interacción de los profesores puede ser relevante para promover y desarrollar una aproximación inquisitiva de la resolución de problemas que suponga: "Ver el contenido matemático en preguntas poco sofisticadas matemáticamente, ver las similitudes de estructura subyacentes en problemas aparentemente diferentes, facilidad para echar mano de diferentes representaciones matemáticas de un problema, comunicar las matemáticas de forma significativa a audiencias diversas, facilidad para seleccionar y usar modos apropiados de análisis ("mental", con papel y lápiz o tecnológico) y la disposición para continuar aprendiendo material nuevo y nuevas técnicas" (Cohen, 2001, p. 896).

Además, también reconocemos que el uso de herramientas computacionales ofrece a los profesores la oportunidad para enriquecer aspectos relevantes del pensamiento matemático, así como para representar y examinar tareas matemáticas en términos de preguntas que pueden conducirlos a desarrollar o reconstruir algunos resultados matemáticos. Por ejemplo, el uso de un software dinámico permite a los profesores representar los problemas dinámicamente, con el objetivo de reconocer y explorar relaciones matemáticas dentro de una configuración geométrica, y para identificar lugares geométricos descritos por elementos de una configuración cuando otros se mueven. En este contexto, el uso de herramientas computacionales es importante para que los profesores discutan las rutas pedagógicas asociadas con las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que pueden ser útiles para guiar u orientar sus prácticas de instrucción.

Sostenemos que el proceso inquisitivo está estrechamente relacionado con la aparición de trayectorias hipotéticas de aprendizaje derivadas de la actividad de resolución de problemas. Por esto entendemos que en el proceso de resolución de problemas aparece la oportunidad de aprender o reconstruir conceptos matemáticos nuevos que emergen mientras se busca responder a las preguntas.

Diseño de investigación, métodos y procedimientos generales

El Centro de Investigación en Matemáticas (CIMA), que es parte de una universidad pública, está encargado de desarrollar e implementar un programa profesional para revisar y mejorar el conocimiento matemático y didáctico de los profesores de bachillerato. Como parte del programa, de cuatro módulos que se ofertaron, coordinamos un módulo de instrucción de 40 horas, cuyo principal objetivo fue ilustrar y discutir las fortalezas y limitaciones del uso de herramientas computacionales en actividades de resolución de problemas. Para este fin, un grupo que incluyó a dos matemáticos, un educador matemático, y dos estudiantes de doctorado en educación matemática se reunieron durante dos meses, en sesiones de tres horas por semana, para seleccionar y discutir las tareas que posteriormente se usaron durante el desarrollo e implementación de las actividades con los profesores.

Durante cada sesión, uno de los miembros del grupo presentó un problema y proporcionó información relacionada con su relevancia o fundamento, e ideas acerca de la posible solución. Después, todos los participantes se comprometieron en el proceso de solución y al final discutieron y resumieron las ideas principales, así como las formas mediante las cuales abordaron las tareas. En este trabajo, nos centramos en la presentación de características generales de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que emergieron como resultado de trabajar sobre esas tareas que posteriormente usamos para estructurar el desarrollo de las sesiones con el grupo de profesores que participó en este módulo. La unidad de análisis es el trabajo hecho y presentado por los participantes (los matemáticos, el educador matemático y los estudiantes de doctorado) como grupo. Así, al mostrar los resultados, presentamos el discurso grupal para identificar y caracterizar ese trabajo. Los problemas seleccionados se tomaron de libros de texto y artículos de investigación. También hubo problemas que incluyeron la construcción de una configuración dinámica inicial (usando un software dinámico) en la cual los profesores pudieron formular sus propias preguntas o problemas.

La tarea

Este problema es una extensión de una tarea discutida en Santos, et al. (2006, p. 125). En particular, el grupo de trabajo construyó una ruta hipotética para que los profesores desarrollaran una aproximación inquisitiva a las tareas, en la cual se impulsara el uso de la tecnología. El problema apareció al analizar la invariancia y estructura de componentes simples de una configuración geométrica con el objetivo de identificar una ruta de instrucción para fomentar que los profesores identificaran relaciones matemáticas.

Dados una recta L, un punto P en L y un punto Q fuera de L, se traza el segmento PQ, una recta L_1 perpendicular a PQ por Q y una recta L_1 perpendicular a L por P. Llamemos R al punto de intersección de L_1 y L_2. ¿Cuál es el lugar geométrico de R cuando P se mueve sobre la recta L (figura 1)?

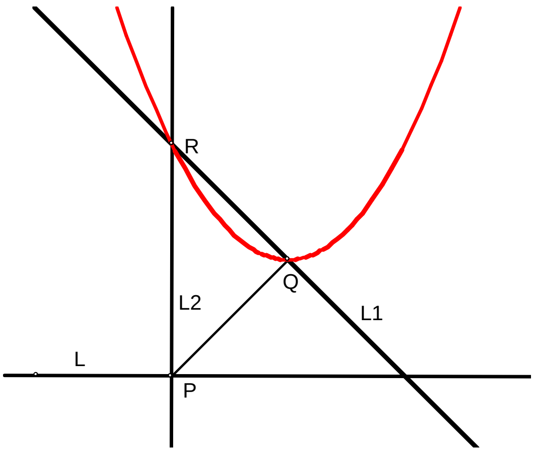

Figura 1. ¿Cuál es el lugar geométrico de R cuando P se mueve sobre la recta L?

Resultados y discusión

La Figura 2 muestra las diferentes etapas que aparecieron durante el proceso de solución de la tarea así como las principales características que guiaron la construcción de las diferentes trayectorias potenciales de instrucción. Debe mencionarse que el diagrama muestra únicamente una ruta de instrucción que el grupo propuso durante la discusión de la tarea; sin embargo, hubo otras dos rutas posibles de instrucción (encontrar el triángulo de área mínima y el caso para el que el lugar geométrico es una hipérbola), cuya discusión no se presenta.

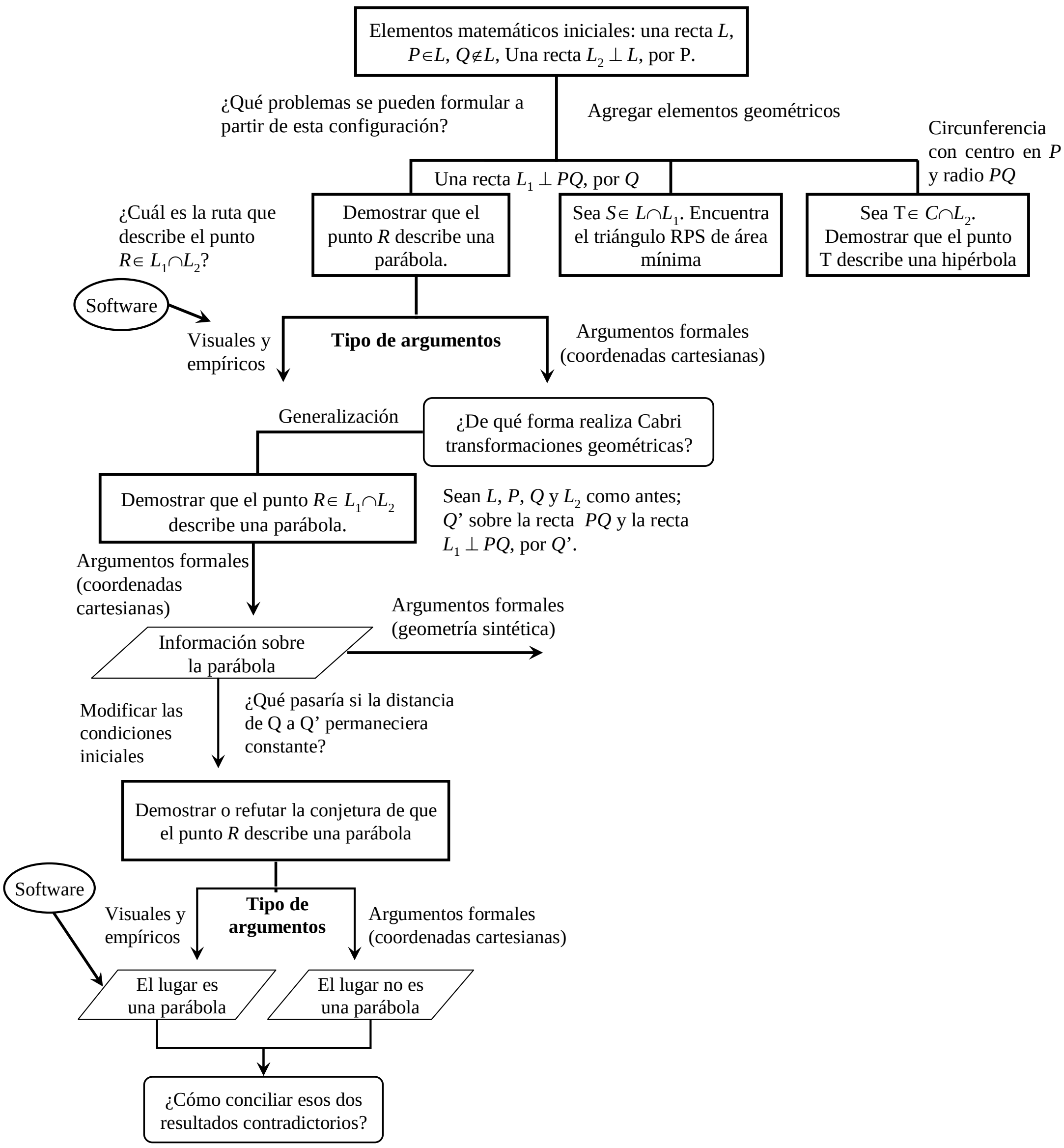

Figura 2. Proceso hipotético de instrucción en el contexto de una tarea en particular.

En esta perspectiva, el significado asociado con las principales etapas que caracterizaron la trayectoria potencial de instrucción supuso: (i) tomar en cuenta el conocimiento base que los profesores de bachillerato necesitan para explorar la tarea inicial, (ii) el reconocimiento de que la meta al desarrollar la tarea es proporcionar condiciones para que los profesores de bachillerato refuercen y reconstruyan sus conceptos matemáticos en una forma tal que esto pueda ayudarles a diseñar y guiar las actividades de aprendizaje en el salón de clases, (iii) los problemas que se discutieron aparecieron al analizar los elementos mínimos en una configuración geométrica con el objetivo de diseñar tareas de aprendizaje y (iv) la posibilidad de que los profesores incluyeran en la discusión elementos adicionales para modificar cada aspecto de la trayectoria potencial de instrucción después de haber resuelto la tarea.

Uno de los miembros del grupo de discusión sugirió abordar el problema usando Cabri-Geometry para construir una configuración geométrica; mediante la herramienta *Lugar*, se pidió al software trazar el lugar geométrico descrito por el punto *R* cuando *P* se mueve sobre *L*. Cabri-Geometry mostró una gráfica que parece una parábola (Figura 1). Con base en esta información, algunos de los miembros del grupo conjeturaron posteriormente, apoyados en la herramienta de Cabri *Coordenada o Ecuación*, que la ecuación del lugar geométrico descrito por R corresponde a una parábola. En este punto hubo un consenso de que se necesitaban argumentos formales para continuar con el análisis y encontrar conexiones y generalizaciones.

Uso de un sistema coordenado. Una aproximación algebraica fue importante para construir un argumento que mostrara que el lugar geométrico es una parábola. Aquí, el grupo usó un sistema cartesiano en una posición adecuada para facilitar las operaciones algebraicas.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que *L* coincide con el eje *x*, $P=(t,0)$ y $Q=(a,b)$. Para determinar las coordenadas del punto *R*, se encuentra la ecuación de la recta L_1, que viene dada por: $y-b=((t-a)/b)(x-a)$, la ecuación de la recta L_2 es $x = t$. Al resolver el sistema determinado por esas dos ecuaciones, se obtiene: $y-b=(x-a)^2/b \ldots$ (*) que, en efecto, es la ecuación de una parábola, ya que *a* y *b* son fijos.

En esta etapa, la representación dinámica de la tarea fue el punto de partida para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Aquí, explicamos las formas en las cuales el grupo de trabajo exploró los siguientes casos generales:

(a) Las mismas hipótesis sobre *L*, *P* y *Q*, pero ahora se consideró un punto adicional *Q*' sobre el segmento *PQ*, así como la recta L_1 que pasa por el punto *Q*'. Entonces nos preguntamos: ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por *R* cuando *P* se mueve sobre la recta *L*? ¿Cómo cambia ese lugar geométrico cuando *Q*' se mueve sobre el segmento *PQ*?

Una parte interesante del uso de Cabri Geometry para formular conjeturas es que, después de demostrar el resultado, el grupo de discusión obtuvo información más precisa acerca de la parábola. Por ejemplo, al conocer el foco y la directriz, pudo formular el resultado en términos de geometría sintética.

Sea L una recta, Q un punto que no está sobre L, P $\in$ *L, y* L_1 *la recta que pasa por Q y P. Se elige un punto Q'* $\in$ L_1 *y se traza la recta perpendicular a* L_1 *que pasa por Q'; llámese a esta recta* L_2*. Por P, Q' y Q se trazan rectas perpendiculares a L, llámense a esas rectas* L_3*,* L_4 *y* L_5*, respectivamente. Sean T, S y R los puntos de intersección de las rectas L y* L_4*; L y* L_5*;* L_2 *y* L_3*, respectivamente. Por Q' se traza una recta perpendicular a* L_4*, que interseca a* L_3 *y* L_5 *en los puntos E y V, respectivamente. Sean F y W dos puntos sobre* L_5 *tales que* $WV = VF = QS^2/4Q'T$*. Si* L_6 *es la recta perpendicular a* L_5 *que pasa por W e interseca a* L_3 *en U, entonces* L_6 *y F son la directriz y el foco de una* *parábola con vértice en V.*

Demostración. La afirmación es equivalente a demostrar que *UR*=*FR*.

Tenemos que:

$$FR^2 = VE^2 + (UR - 2VF)^2 \quad \ldots(1)$$

De los triángulos semejantes *PQ'T* y *PQS* se tiene:

$$\frac{QS}{Q'T} = \frac{VE}{Q'E},$$

y de ahí, se obtiene:

$$VE = \frac{SQ}{TQ'} Q'E.$$

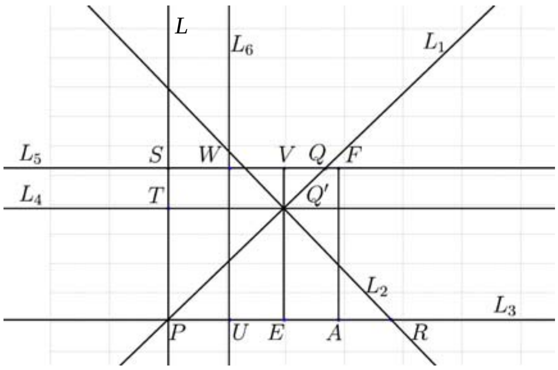

Figura 3. Demostración de que *UR* = *FR*.

Al sustituir el valor de *VF* y *VE* en la ecuación (1) y desarrollar el binomio se llega a:

$$FR^2 = \frac{SQ^2 Q'E^2}{Q'T^2} + UR^2 - UR\frac{QS^2}{Q'T} + \frac{QS^4}{4Q'T^2}$$
$$= UR^2 + \frac{SQ^2}{Q'T}\left(\frac{Q'E^2}{Q'T} - UR + FV\right).$$

Del triángulo *RQ'P* tenemos que $Q'E^2 = (PE)(ER)$; por otra parte *PE*=*Q'T*, entonces de la ecuación anterior se concluye que:

$$FR^2 = UR^2 + \frac{SQ^2}{Q'T}(ER - UR - FV).$$

Tenemos que *ER*-*UR*=-*EU*=-*VW*=-*VF*; de lo cual se sigue la conclusión.

Al formular el último resultado, el grupo supuso que la segunda coordenada del punto *Q'* no cambia; con esto en mente, algunos miembros del grupo elaboraron una pregunta bastante natural: ¿Qué sucedería si la distancia entre los puntos *Q* y *Q'* fuese constante?

(b) Suponiendo que *L*, *P* y *Q* son como en la tarea anterior, pero ahora el punto *Q*' es la intersección de la recta *L*', que pasa por *P* y *Q*, y la circunferencia

C de radio *r* con centro en *Q*. Las rectas L_1 y L_2 se construyen como antes, y también R. ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por R cuando *P* se mueve sobre la recta *L*? ¿Cómo se comporta el lugar geométrico cuando *r* se aproxima a cero?

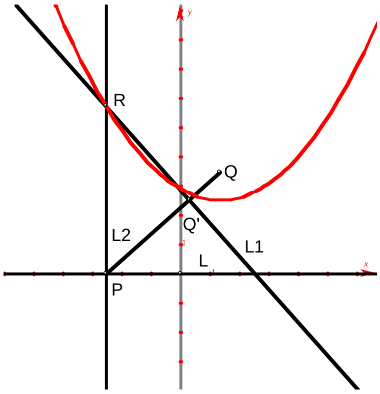

Figura 4. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto *R* cuando el punto *P* se mueve sobre la recta *L*?

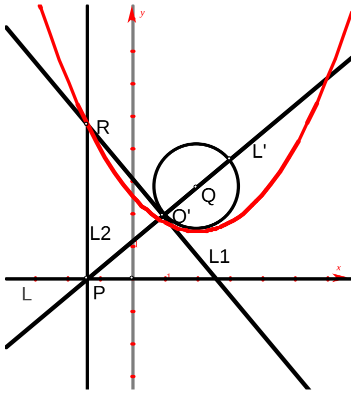

Figura 5. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto *R* cuando *P* se mueve sobre la recta *L*?

Al discutir la parte (b) con el uso de Cabri Geometry el grupo tuvo la oportunidad de experimentar y observar el comportamiento del lugar geométrico generado por R. Una primera aproximación mostró el resultado que se observa en la Figura 5, y parece que el lugar geométrico es una parábola, incluso la herramienta Coordenada o Ecuación del software sugiere que el lugar geométrico corresponde a una parábola.

Sin embargo, al examinar con detalle el comportamiento del lugar geométrico generado por el punto *R*, aparece una gráfica como la que se muestra en la Figura 6, que no puede identificarse con la gráfica de una parábola. Con esta evidencia, es natural pensar en argumentos formales que permitan determinar qué tipo de

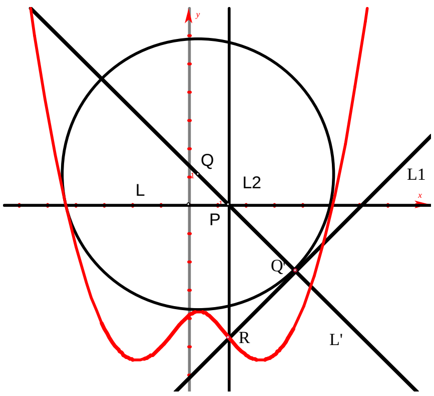

Figura 6. ¿Qué lugar geométrico describe el punto *R*?

objeto geométrico describe el punto R.

Después de usar un sistema coordenado y efectuar cálculos, el grupo encontró que las coordenadas de R son:

$$R = \left(x, \frac{1}{b}\left((x-a)^2 + b^2 \pm r\sqrt{(x-a)^2 + b^2} \right) \right),$$

donde (a,b) es el centro de la circunferencia. Debe notarse que la segunda coordenada de R se aproxima a $\left[(x-a)^2/b\right]+b$ cuando r se aproxima a cero, es decir, en límite este resultado es consistente con el del problema inicial y también muestra la consistencia con proceso de generalización, que constituye un aspecto importante del pensamiento matemático.

Los participantes también formularon preguntas relacionadas con la forma en que Cabri lleva a cabo transformaciones geométricas. Esto condujo a pensar acerca de la fiabilidad de los resultados matemáticos obtenidos con el apoyo de un sistema computacional. Aquí el grupo tuvo la oportunidad de reflexionar acerca de la importancia de analizar el proceso y resultados obtenidos con una herramienta tecnológica y formular preguntas sobre el sistema axiomático subyacente en ésta.

Observaciones finales

Las tareas matemáticas son elementos clave de cualquier programa de desarrollo profesional que busque revisar y fortalecer los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores; en este contexto es de importancia preguntar: ¿Cómo deben discutirse las tareas de aprendizaje matemático con los profesores para identificar formas explícitas de razonamiento que sean consistentes con la práctica matemática? Sostenemos que las tareas de aprendizaje matemático deben abordarse en una forma abierta dentro de una comunidad inquisitiva que promueva la colaboración y la reflexión matemática.

En este proceso, el uso de herramientas computacionales es relevante para representar algunas tareas de una forma dinámica y visualizar diversas relaciones matemáticas inmersas en esas tareas. Es evidente que la conceptualización de las tareas como dilemas proporciona la oportunidad para identificar y explorar relaciones, para desarrollar diversas líneas de pensamiento que puedan conducir a la comunidad o al resolutor a abordar las tareas desde diversos puntos de vista o perspectivas. Por ejemplo, las aproximaciones visuales y empíricas fueron importantes para identificar información relevante, posibles relaciones y la plausibilidad de las soluciones. El uso del software dinámico ofrece la oportunidad de utilizar estrategias heurísticas particulares (relajar las condiciones iniciales) para resolver el problema. El pensar en varias aproximaciones al problema, que constituye otra actividad relevante en la resolución de problemas, permite al resolutor identificar propiedades fundamentales de la solución y posibles relaciones o conexiones. Así, la resolución de problemas es una actividad continua en la cual contenidos (de diversos dominios), así como varios recursos y estrategias, se usan para diseñar un escenario de instrucción inicial que puede ser útil para orientar y estructurar la práctica de los profesores de matemáticas. Finalmente, el grupo que trabajó sobre las tareas reconoció la importancia de abordarlas dentro de una comunidad inquisitiva o de investigación. Los participantes desarrollaron una guía para implementar las tareas. De hecho, el plan y las actividades para implementar las tareas en el programa de desarrollo profesional se basaron en la consideración de las rutas que emergieron al abordar las tareas durante las sesiones del grupo de investigación.

Un aspecto de importancia crucial cuando se usan herramientas tecnológicas para resolver problemas matemáticos, es la necesidad de proporcionar sustento o argumentos formales para justificar los resultados obtenidos mediante el uso de las herramientas. Se acepta que la tecnología es una herramienta poderosa; sin embargo, los resultados obtenidos deben examinarse rigurosamente para ser aceptados o rechazados. Al Respecto Dick (2007, p. 1175) ha introducido el término fidelidad matemática y ha identificado tres áreas en las cuales puede emerger la falta de fidelidad matemática: (i) sintaxis matemática, (ii) sub-especificaciones en las estructuras matemáticas y (iii) limitaciones al representar fenómenos continuos con estructuras discretas y cálculos con una precisión numérica finita. Sin embargo, esas áreas puede que no consideren aspectos relacionados con la fiabilidad, tales como los resultados discutidos en el ejemplo. Consideramos que los resultados que no concuerdan con los esperados tienen su origen en los procesos internos de la herramienta; en relación con este hecho, sugerimos que se tiene que realizar un examen detallado de la estructura matemática subyacente en la herramienta. Al respecto, nuestra opinión concuerda con la expresada por Zbiek, et al. (2007), al afirmar que:

Con la integración de la tecnología a las matemáticas escolares, se requiere hacer un análisis cuidadoso de la fidelidad matemática [y confiabilidad]. Este tipo de investigaciones necesitará colaboración intensa de matemáticos, científicos de la computación y educadores matemáticos (p. 1176).

También consideramos que este análisis debe incluir la tarea de categorizar los niveles de fiabilidad de las herramientas. Por ejemplo, afirmamos que las operaciones aritméticas básicas (adición y multiplicación dentro de los rangos de precisión de las calculadoras y las computadoras) ofrecen una confianza del 100%. Este no es el caso cuando se ejecutan operaciones que requieren del uso de estructuras matemáticas más sofisticadas.

Agradecimientos

El primer autor agradece el apoyo recibido de Conacyt a través del proyecto de investigación con número de referencia 61996 y de los fondos PIFI

3.4 “Cuerpos Académicos”, con los cuales se financió parcialmente una estancia en la Universidad de La Laguna, Tenerife, España, durante el periodo octubre-noviembre de 2008.

Referencias bibliográficas

Adler, J., Ball, D., Krainer, K, Fou-Lai, L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 359-381.

Cohen, A. (2001). Two reactions to the mathematical education of teachers. *Notices of the AMS, 48*(9), 985-991.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need) to know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 293-319.

Dick, T. (2007). Keeping the faith: Fidelity in technological tools for mathematics education. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, cases, and perspectives. Vol. 2: Cases and Perspectives* (pp. 333-339). Greenwich, CT: Information Age.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 187-211.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Santos-Trigo, M. (2004). The role of dynamic software in the identification and construction of mathematical relationships. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 23* (4), 399-413.

Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos, M. et al. (2006). Constructing a Parabolas’ World Using Dynamic Software to Explore Properties and Meanings. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 2 (3), 125-134.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education, *Notices of the AMS, 47* (6), 641-649.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Zbiek, R. M. et al. (2007). Research on Technology in Mathematics Education. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.1169-1207). Charlotte, NC: Information Age.