# EL MEJOR COCHE

Ana Teresa Antequera Guerra
IES “Luis Cobiella Cuevas”

María Candelaria Espinel Febles
Universidad de La Laguna

## Resumen

Se elige un problema del Informe PISA 2003, y se amplía incluyendo cuestiones de elección de preferencia y decisión. La actividad se le propuso a alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, de entre 15 y 16 años, y se analizó su comportamiento al resolverla y su capacidad heurística para la toma de decisiones. Los resultados muestran que los alumnos tienen dificultades para utilizar las matemáticas en la asignación de pesos a la hora de conseguir un objetivo concreto y, sin embargo, reconocen el uso funcional de las reglas de elección que se utilizan en la sociedad.

## Abstract

A problem is chosen from the PISA 2003 Report, and then extended to include questions involving a choice of preferences and decisions. These questions are posed to Secondary School students aged 15 to 16, whose problem-solving and heuristic decision-making skills are then analysed. We discovered that students have difficulty using mathematics when assigning a weight to achieve an objective, though they are able to recognize the functional use of the rules of choice used in society.

**FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA IX**
A. T. Antequera; Mª C. Espinel (2008). *El mejor coche, pp*. 9-25

## Introducción

Algunas de las situaciones de elección en el mundo real a las que se puede enfrentar un ciudadano requieren de herramientas matemáticas de cálculo para establecer sus preferencias o analizar la situación. El *análisis multicriterio* constituye una forma de modelizar procesos de decisión en los que entran en juego la toma de decisiones, los eventos desconocidos que pueden afectar al resultado, los posibles cursos de acción y sus consecuencias. Mediante los modelos multicriterio el decisor estimará las posibles implicaciones de cada una de sus acciones, que lo llevan a obtener una mejor comprensión de las conexiones entre esas acciones y sus objetivos. Existen diversos procedimientos matemáticos que sintetizan los valores obtenidos en cada alternativa en función de todos los criterios considerados en el análisis. Los mecanismos más conocidos son los que se obtienen de la ponderación lineal *(scoring)*, la simple suma de las contribuciones obtenidas de cada atributo. Es éste un campo muy productivo de Investigación Operativa en el que continuamente se producen mejoras y variantes, además de crecientes aplicaciones en diversos contextos (Berumen y Llamazares, 2007).

En el caso particular de un *problema de decisión discreto*, la información disponible se concreta en la evaluación de *n* atributos sobre un conjunto de *m* alternativas, presentándose en una matriz de doble entrada en la que los atributos aparecen como columnas, y las alternativas como filas. Para la toma de decisiones se fija el criterio bajo el cual se desea decidir la mejor solución (Romero, 1993).

En la actividad “El mejor coche” de PISA 2003 (MEC, 2005) se formula un problema de decisión. Se parte de una tabla de datos con cuatro atributos y cinco alternativas, y se pide calcular el valor de una función lineal que determina un ranking en las alternativas. En el segundo apartado se requiere ponderar una función lineal de forma que se obtenga un objetivo concreto. La actividad se amplió incluyendo dos nuevas reglas de elección del mejor coche. La regla 1 tiene en cuenta el número de primeros puestos, y la regla 2 elimina las puntuaciones extremas y suma las restantes.

En este trabajo se analiza la práctica de los estudiantes sobre la actividad formulada. El estudio se realizó con alumnos de la Enseñanza Secundaría Obligatoria (ESO) que tienen en su mayoría alrededor de 15 años.

Los objetivos que guían la investigación son:

- Mostrar si los estudiantes comprenden las reglas de decisión y si las aplican correctamente. Dado que el contexto en el que se presenta el problema, elegir el mejor coche, es una situación familiar para la mayoría de los jóvenes y les resulta fácil de comprender.
- Saber si los estudiantes pueden identificar otras situaciones o ambientes donde se apliquen las distintas reglas de elección presentadas en la actividad u otras que también puedan aplicarse.
- Observar, cuando los estudiantes tienen que elegir o tomar decisiones en otros contextos, si utilizan un proceso de solución donde las matemáticas estén presentes. Se ha de tener en cuenta que se trata de potenciar el desarrollo de capacidades en el alumno para tomar posición de manera crítica ante las diferentes reglas de elección que se aplican en la sociedad.
- Verificar la validez de la actividad diseñada en un cuestionario sobre decisiones justas y juicios bien fundados, dado que este problema forma parte de una investigación más amplia de diseño e implementación de actividades relacionadas con Teoría de Juegos y modelos de negociación desde las matemáticas.

*Marco teórico*

Los estudios que realiza la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) sobre el aprovechamiento de los estudiantes en matemáticas que, en el caso de los estudiantes españoles, muestran su poca disposición a pensar más allá de la aplicación de los procedimientos o problemas rutinarios en matemáticas. Uno de los cambios dentro de los currículos de Secundaria realizados en 2007 ha sido el desarrollo de las competencias básicas. Se entiende la *competencia matemática* como la capacidad de un individuo para utilizar las matemáticas en forma que permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. Este nuevo marco para el desarrollo de los currículos facilita la introducción de actividades sobre resolución de problemas y matemática discreta.

En la actualidad, la *resolución de problemas* ya se contempla como parte del currículo de Primaria y Secundaria Obligatoria. Se debe entender por problema aquella situación conflictiva que uno necesita resolver y para cuya resolución no se conoce de antemano un procedimiento explícito. Los libros de texto más utilizados por los escolares ya incluyen pautas para trabajar la resolución de problemas, casi siempre siguiendo las fases de Polya (1945). Se promueve el uso de heurísticas, consideradas como métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas en los cuales la solución se descubre por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final. Por ello, las heurísticas son "reglas de oro", conjeturas, soluciones intuitivas o, simplemente, sentido común. El problema es entendido como una herramienta para pensar matemáticamente (Schoenfeld, 1992) y ello supone formar individuos con capacidad autónoma para pensar y ser críticos y reflexivos con las soluciones.

El bloque de contenidos dedicado a la resolución de problemas, obligatorio hasta los 16 años, ofrece la oportunidad para trabajar con matemática discreta. Sin embargo, éste es un tema poco conocido por los profesores en ejercicio, a lo que se suma además la falta de material y de actividades que permitan desarrollar esta práctica educativa al mismo nivel que en otros países (DeBellis y Rosenstein, 2004).

La *matemática discreta* ha sido uno de los campos de las matemáticas que más se ha desarrollado en el siglo veinte al amparo de los ordenadores. Desde distintos centros y asociaciones como el Instituto Freudenthal (Doorman, Drijvers y Dekker, 2007), el Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) o la American Mathematical Society (AMS), se ha favorecido su incorporación a los currículos llevando a cabo experiencias e investigaciones en las que se incluyen principalmente contenidos sobre grafos, matrices y combinatoria, de gran utilidad en la matemática actual (Kenney y Hirsch, 1991; Rosentein, Franzblau y Robert, 1997). También la aparición de textos y proyectos como COMAP (1988), basado en un conjunto de aplicaciones a la vida de la matemática más actual, aportan material e ideas para su desarrollo. En la última década abundan los textos en la misma línea (Parks, Musser, Burton y Siebler, 2000) y páginas web como http://www.dimacs.rutgers.edu.

Algunos investigadores en Educación Matemática consideran la matemática discreta como una oportunidad para revitalizar la matemática en la escuela (DeBellis y Rosenstein, 2004; Rosenstein et al., 1997). La perciben como una posibilidad para la innovación y una oportunidad para descubrir problemas no rutinarios (Goldin, 2004).

También se aprovecha el potencial que tienen los problemas del entorno para construir conocimientos matemáticos y modelizar situaciones, lo que ayuda al estudiante a comprender y dominar el mundo que le rodea. La *modelización* matemática se puede considerar como un medio para conectar la resolución de problemas al mundo real. Aunque el concepto de modelo matemático en sí mismo es muy discutido, dentro de la matemática se puede usar para resolver problemas reales, implicando a los estudiantes en sólo algunas de las fases de las tareas de modelización (Stillman, Brown, Galbraith y Edwards, 2007). Trabajar en clase situaciones de la vida real es la tendencia u objetivo de los modelos y la modelización para aprender tanto matemáticas como resolución de problemas (Lesh y English, 2005).

En este sentido y con los puntos señalados (desarrollo de competencias matemáticas, resolución de problemas y modelización de problemas cotidianos) se plantea la actividad de la toma de decisiones cuando existen varias alternativas en un determinado contexto.

**Descripción del estudio y resultados**

En este trabajo se muestra un estudio con 72 alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). De ellos, 35 corresponden a dos grupos de tercero y 37 a dos grupos de cuarto. La mayoría de estos alumnos tiene una edad comprendida entre 15 y 16 años. También se muestran los resultados de una entrevista a uno de los grupos de alumnos de cuarto de ESO.

La actividad: “El mejor coche” con la que se trabajó fue tomada en parte de PISA 2003 (MEC, 2005). En ella se formula un problema de decisión discreto mediante una tabla de datos con cuatro atributos y cinco alternativas que se muestra a continuación. Se pide calcular el valor de una función lineal que determina un ranking en las alternativas, para después ponderar una función lineal con un objetivo determinado. Se amplía la actividad de PISA, pidiendo que se elija el mejor coche aplicando dos reglas (regla 1: número de primeros puestos; regla 2: eliminar extremos y sumar).

| Coche | Seguridad ( S ) | Ahorro de combustible ( C ) | Diseño exterior ( D ) | Habitáculo interior ( H ) | Puntuación |
|---|---|---|---|---|---|
| Ca | 3 | 1 | 2 | 3 | |
| M2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| Sp | 3 | 1 | 3 | 2 | |
| N1 | 1 | 3 | 3 | 3 | |
| Xk | 3 | 2 | 3 | 2 | |

Las puntuaciones se interpretan de la siguiente manera:

3 puntos = Excelente

2 puntos = Bueno

1 punto = Aceptable

Para el estudiante la actividad consta de tres partes:

- Cuestión (a), consiste en evaluar una función lineal simple que viene dada e indicar el coche ganador:

Puntuación total = (3x S) + C + D + H

- Cuestión (b), requiere crear una función lineal ponderada para obtener un determinado objetivo:

Puntuación total = …. S +…. C +…. D +…. H

de forma que la alternativa Ca sea el mejor coche.

- Cuestión (c), pretende que los alumnos apliquen dos reglas para elegir el mejor coche con cada una de ellas:

Regla 1: contar el número de primeros puestos.

Regla 2: sumar puntuaciones después de eliminar los extremos.

*Análisis de la información*

Para el análisis de los resultados se desglosan las tres cuestiones de la actividad considerando siete ítems codificados de la siguiente forma:

T = Completar la tabla.

A = Valor de una función lineal.

B = Asignar pesos a una función lineal para conseguir un objetivo.

CR1 = Regla primeros puestos.

CR2 = Regla  suma eliminado extremos.

CE1 = Elección primeros puestos.

CE2 = Elección suma eliminado extremos.

Los resultados del análisis de datos se presentan en cuatro apartados. En el primero se recogen los resultados relativos al éxito de cada uno de los ítems. Los apartados segundo y tercero se dedican a la cuestión (b) sobre diseño de una función ponderada, detallando los resultados y las estrategias utilizadas por los alumnos. En el cuarto apartado se compara la muestra de 72 alumnos con los resultados en PISA, de España y de la OCDE, para las cuestiones (a) y (b). Se acompañan los resultados con un análisis cualitativo de la entrevista semi-estructurada realizada a uno de los grupos que participó en la investigación. A los estudiantes se les pide que expliquen su solución a las distintas cuestiones de la actividad, que expresen su opinión sobre las reglas, citen otras situaciones donde se apliquen estas reglas y nombren otras reglas de elección.

*1. Éxitos de cada uno de los siete ítems*

En la tabla 1 se muestra los porcentajes de alumnos que han resuelto correctamente cado uno de los siete ítems en los que se han desglosado las tres cuestiones.

Tabla 1: Porcentaje de alumnos que han resuelto correctamente cada ítem

| Ítems | T (a) | A (a) | B (b) | CR1 (c) | CR2 (c) | CE1 (c) | CE2 (c) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % | 93 | 100 | 57 | 96 | 93 | 83 | 82 |

Los resultados del estudio realizado con 72 alumnos dan un alto porcentaje de éxito, no apreciándose diferencias entre los grupos de tercero y cuarto curso de la Secundaria Obligatoria. El 93% de los alumnos han completado la tabla que se les daba con la puntuación de cada coche (ítem T). Todos los alumnos han resuelto de forma correcta la cuestión (a) de aplicar la regla, esto es, hallar el valor de una función lineal (ítem A). La mayoría, más del 90%, aplican la regla 1 (CR1) y la regla 2 (CR2). También, más del 80% de los alumnos eligen correctamente el coche ganador aplicando respectivamente ambas reglas. La dificultad mayor se presenta en la cuestión (b), asignar pesos para conseguir que un determinado coche (Ca) sea el mejor, donde sólo responde correctamente poco más de la mitad de los estudiantes.

La actividad mostrada aquí (7 items) forma parte de un estudio más amplio, que costa de 23 ítems, relacionados con teoría de juegos y toma de decisiones con el que se pretende analizar el desarrollo capacidad crítica y de argumentación de los estudiantes de Secundaria Obligatoria. Para medir la validez de dicho estudio se sigue la metodología Rasch (Linacre, 2007). Esta técnica aporta un continuo lineal con alumnos e ítems, donde se confirma que asignar o elegir pesos (cuestión (b)) para conseguir un determinado objetivo es un ítem difícil con respecto a los otros ítems formulados en este estudio (www.ince.mec.es/pub/pisamanualdatos.pdf pp. 64-81).

*2. Resultados de la pregunta sobre la ponderación de una función lineal*

Para el análisis del ítem (B = Asignar pesos a una función lineal) se estableció un sistema de codificación de las respuestas en Blanco, Mal, Regular y Bien. Donde "Regular" corresponde a que las ponderaciones asignadas dan un resultado de empate en la puntuación con otro coche distinto del Ca. La tabla 2 muestra el número de alumnos contabilizados en cada una de estas categorías.

Tabla 2: Resultados de la pregunta (b)

| Categorías | Blanco | Mal | Regular | Bien |
|---|---|---|---|---|
| N = 72 | 2 | 18 | 11 | 41 |

En los resultados de la tabla 2, se observa que 41 alumnos, más de la mitad, responden correctamente. Sin embargo, la cuarta parte, 18 alumnos, contestan incorrectamente, no son capaces de asignar unos pesos a una función lineal para conseguir un determinado objetivo. Si a éstos se añaden los alumnos con regular y blancos se obtiene que el 43% de los estudiantes han fracasado en esta cuestión.

Con respecto a la cuestión (b), el grupo de alumnos al que se realiza la entrevista dan las siguientes respuestas como razones para elegir estas ponderaciones:

- Se fijan en las puntuaciones mayores y les dan más peso
- Las eligen al azar
- Trabajan por ensayo y error

Se entiende que el fracaso a la hora de establecer una función lineal ponderada para obtener un determinado objetivo, cuando prácticamente se ha finalizado la formación obligatoria de una persona, puede tener una repercusión negativa en su futuro como ciudadano.

*3. Enumeración y análisis de las estrategias de ponderación lineal*

En la tabla 3 se resume en forma de ristras o cuádruplas los pesos aportados por los alumnos, agrupados como Bien, Regular y Mal. Se adjunta el valor de la función objetivo para cada uno de los atributos o coches, y el número de alumnos que ha propuesto dicha opción. Cuando en una casilla hay varias ponderaciones no se muestran los valores, sino sólo el número de alumnos que ha elegido dicha ponderación.

Tabla 3: Patrones de respuesta según estrategias para conseguir un objetivo

| *Calificación* | *Ponderación* | *Valor alternativas* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| Bien | 3 1 1 3 | 21, 16, 19, 18, 20 | 9 |
| | 3 1 1 4 | 24, 18, 21, 21, 22 | 7 |
| | 3 1 2 4 | 26, 20, 24, 24, 25 | 4 |
| | 3 1 1 6 | 30, 22, 25, 27, 26 | 4 |
| | 4 1 1 4 | 27, 20, 24, 22, 25 | 3 |
| | 2 1 1 3 | 18, 14, 16, 17, 17 | 2 |
| | 4 2 1 4 | 28, 22, 25, 25, 27 | 2 |
| | 5 1 2 5 ; 5 2 1 5<br>3 0 0 3 ; 2 1 0 2 | | 4 |
| | 4 1 1 3 ; 5 1 1 3 | | 2 |
| | 3 1 2 6 ; 4 2 1 6<br>1 0 0 2 ; 4 2 3 6 | | 4 |
| Regular | 3 1 2 7 | 23, 18, 22, 21, 23 | 5 |
| | 2 1 2 3 | 20, 16, 19, 20, 20 | 2 |
| | 4 1 2 3 ; 6 1 2 3<br>6 2 4 6 ;15 1 2 3 | | 4 |
| Mal | 3 2 3 3 ; 3 3 2 3<br>2 3 4 2 ; 3 3 8 3<br>2 1 5 2 ; 2 3 2 2<br>3 2 2 3 | | 9 |
| | 9 2 2 3 ; 9 3 2 3<br>9 3 3 2 ; 4 2 3 2<br>4 2 2 1 ; 3 1 3 2<br>1 1 1 3 | | 9 |

De los 72 alumnos más de la mitad, 41 alumnos, eligen bien los pesos que corresponde a obtener en el primer valor la puntuación más alta de las cinco. En total aparecen 17 ponderaciones o cuádruplas distintas correctas. Las más repetidas son (3 1 1 3) que se presenta 9 veces, con puntuación 21 para el ganador, y (3 1 1 4) que aparece 7 veces, con puntuación 24.

La estrategia más frecuente es asignar pesos altos a los laterales (S y H) y bajos en el medio (C y D). Se observa que algunos alumnos cambian el último 3 (peso de H) a 4, posiblemente para conseguir una diferencia mayor entre la puntuación del mejor coche y la del siguiente. Esta misma estrategia parece ser el origen de otras ponderaciones como (3 1 1 6) o (3 1 2 6).

Los 11 casos que se han calificado como regular, corresponden a empates y pertenecen a alumnos que eligen pesos como (3 1 2 3) o (2 1 2 3). Hay alumnos que asignan pesos a los atributos y luego sólo los comprueban con las alternativas que creen más conflictivas. Posiblemente por ello no descubren el empate.

Las respuestas de los 18 alumnos consideradas incorrectas asignan pesos como (3 2 3 3), (9 2 2 3), y otros que parecen disparatados o absurdos.

Como ya se ha hecho notar anteriormente, es preocupante que al terminar la educación obligatoria existan tantos alumnos que no sepan asignar pesos para conseguir un objetivo, es decir, que no sean capaces de analizar y trabajar con los datos puestos a su alcance para lograr una finalidad.

## *4. Comparación con los resultados de PISA*

En la tabla 4 se muestran los porcentajes de éxito de las cuestiones (a) y (b) en los 72 alumnos objeto del estudio y los resultados de España y de otros países de la OCDE. En la cuestión (a) se ha considerado el resultado del ítem T pues en PISA los resultados de los ítems T y A se presentan de manera conjunta.

Tabla 4: Comparación con los resultados de PISA

| | ESO N=72 | España PISA | OCDE PISA |
|---|---|---|---|
| Pregunta (a) | 93% | 71,4% | 72,9% |
| Pregunta (b) | 57% | 22,2% | 25,4% |

Para los 72 alumnos de ESO, los resultados son manifiestamente mejores que los del resto de España y también que los de otros países de la OCDE. Sin embargo, la cuestión (b), en la que se pide asignar pesos o priorizar alternativas para conseguir un determinado objetivo, obtiene en los tres ámbitos unos resultados poco aceptables. En los países en los que se ha realizado la prueba, la tarea involucra un proceso matemático importante en el que falla tanto el aspecto conceptual como el aprendizaje algorítmico.

Al entrevistar a los alumnos se les pide que expresen su opinión sobre las reglas de elección y que nombren otras situaciones donde se apliquen dichas reglas. En sus respuestas, varios comentan que no les parecen justas las reglas aplicadas en la pregunta (c), debido a que ambas dan como mejor coche el que es peor en seguridad; aunque también defienden que les parece más aceptable elegir aquel coche que tenga mayor puntuación puesto que de eso se trata. Además, son capaces de identificar estas dos reglas con situaciones reales y nombrar contextos donde se aplican las citadas reglas como competiciones deportivas y otros eventos. Así, nombran la natación artística, el patinaje, los saltos de trampolín, los concursos de baile, las competiciones de surf y algún concurso de televisión. Sin embargo, tienen dificultades para inventar reglas, proponiendo en su mayoría sencillamente sumar las puntuaciones.

Las entrevistas efectuadas también reflejaron la evidencia de que el problema era nuevo para los alumnos. Por ejemplo, no lo relacionan con funciones, esto es, consideran que la actividad no está relacionada con un contenido matemático como es hallar el valor de una función y por tanto no tienen conciencia de esa transferencia de conocimiento (Santos, 1997). Se enfrentan al problema como algo nuevo que nunca han trabajado en clase de matemáticas.

**Conclusiones y reflexiones**

Los resultados del estudio con alumnos de tercero y cuarto curso de ESO muestran como todos han completado la tabla con la puntuación de cada coche. Los alumnos han resuelto correctamente la cuestión relativa a aplicar una regla y llevan a cabo un procedimiento rutinario ante una instrucción directa. Comprenden las reglas de decisión y se muestran predispuestos a aplicarlas en su vida cotidiana como se recoge en las entrevistas, aunque piensan que no se trata de una situación relacionada con las matemáticas. Casi la mitad de los estudiantes de nuestra muestra tienen dificultades para elegir los pesos apropiados y fallan en la notación que utilizan. A modo de resumen, se puede afirmar que los alumnos son capaces de leer en una tabla y hallar el valor de una función, pero tienen serias dificultades al asignar pesos para alcanzar un objetivo y dicen no disponer de un método que les garantice el éxito.

Es motivo de reflexión lo que muestran los datos en los países que participan en PISA. Esto es, los alumnos saben aplicar reglas sobre una tabla de datos, pero no saben cómo manipular la tabla para conseguir un determinado fin. Se podría deducir de los datos de la OCDE, que concuerdan con nuestra investigación, que hay cuestiones en los sistemas educativos actuales que están fallando. Los alumnos no disponen de un procedimiento o de una estrategia lineal o compensatoria equivalente al cálculo de una media o de una esperanza matemática. Otras investigaciones (Cobo y Batanero, 2004) han mostrado que gran parte de los estudiantes tienen dificultades en el cálculo y en la interpretación de medias ponderadas en estadística. La ponderación correcta en el cálculo de la media supone la capacidad de aplicar la ley distributiva de la suma y el producto a un conjunto de valores numéricos. Otra analogía válida para mostrar esta problemática es el “problema de la mochila” (Knapsack Problem) o “problema del subconjunto suma” (Subset Sum Problem) en el que, fijado un peso o suma, hay que elegir los ítems apropiados para completar la mochila. Éste es un problema NP-completo, pero existen buenos heurísticos que se podrían enseñar (Espinel, 1995). Parece que a los alumnos no se les enseñan métodos para elegir pesos o valores entre los de un conjunto dado para alcanzar una suma o peso total.

De las tres dimensiones que se contemplan en PISA (contenido, situación y competencia), la tarea "El mejor coche" se considera como una situación pública. Esta requiere que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones en la vida pública. Además como competencia o proceso en el desarrollo del problema están presentes el pensar, razonar y argumentar (Niss, 2002). Consideramos que es una actividad rica para llevar al aula (DeBellis y Rosenstein, 2004), ya que permite trabajar distintos campos de la matemática como: elección social, métodos de votación, justicia social y búsqueda de reglas justas, y teoría de la toma de decisiones o búsqueda de decisión óptima para un conjunto de alternativas.

Nota: Parte de esta investigación ha sido realizada en el marco del proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, programa del Plan Nacional de I+D+I).

## Referencias bibliográficas

Berumen, B. A., Llamazares, F. (2007). La utilidad de los métodos de decisión multicriterio (como el ahp) en un entorno de competitividad creciente. *Cuad. Adm. Bogotá* (Colombia), 20 (34): 65-87. On line: http://www.scielo.org.co/pdf/cadm/v20n34/v20n34a04.pdf

Cobo, B., Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma*. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. 45, 79-86.

COMAP (1988). *For All Practical Purpose*. S. Garfunkel (Project Director) et al. New York: W.H. Freeman. ("Las matemáticas en la vida cotidiana". Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1999).

DeBellis, V.A., Rosenstein, J. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM*, 36 (2) 46-55.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, De Lange, J., Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Neatherlands. *ZDM Mathematics Education*, 39, 405-418.

Espinel, M.C. (1995). Optimizar cantidades. Revista de Didáctica de las Matemáticas. *UNO*, 3, 116-122.

Goldin, G. A. (2004). Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *ZDM* . 36 (2), 56-60. Holanda: Springer.

Kenney, M. J., Hirsch, C.R. (Eds) (1991). *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12*. Inc, Reston, Virginia: NCTM.

Lesh, R., English, L.D. (2005). Trends in the Evolution of Models & Modelling Perspectives on Mathematical Learning and Problem Solving. *ZDM*. 37 (6), 487-489.

Linacre, J. M. (2007). *Realiability and Separations. A User´s Guide to Winsteps/ Ministep Rasch – Model Computer Programs.* Chicago: Winsteps. Disponible en: www.winsteps.com

MEC (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Inecse. Madrid.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish Kon Project. Disponible en: http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf

Parks, H., Musser, G., Burton, R., Siebler, W. (2000). *Mathematics in Life, Society, & the World*. New Jersey: Prentice Hall.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Romero, C. (1993). *Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Madrid: Alianza Universidad Manuales.

Rosentein, J. G., Franzblau, D. S., Robert, F. S. (1997) (Eds). *Discrete Mathematics in the Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics Computer Science, Volume 36, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Disponible en:

http://dimacs.rutgers.edu/Volumes/Vol36.html

Santos, L. M. (1997). La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas de aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* 2, 3, 11-30.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, sense-making in mathematics. In: D. Grouws (Ed.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (334-370). New York: Macmillan.

Stillman, G., Brown, J., Galbraith, P., Edwards, I. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. Watson, J., Beswick, K. (Eds) *Proceeding of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. 2, 688-697. Australia.