DIFICULTADES Y ERRORES SOBRE NÚMEROS DECIMALES DE ALUMNOS CON UNA BUENA FORMACIÓN EN MATEMÁTICAS

María Dolores Moreno Martel
Víctor M. Hernández Suárez

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio sobre dificultades y errores que tienen alumnos con una buena formación en Matemáticas, cuando se enfrentan a un cuestionario sobre el objeto número decimal, su representación gráfica y las relaciones que los números decimales tienen con los restantes conjuntos numéricos.

El análisis, la interpretación y discusión de los resultados nos permite finalmente describir los significados de los alumnos en relación con los números decimales y sus representaciones.

Abstract

In this work we have made a study of difficulties and mistakes that some pupils with a good formation in Mathematics have when they face with a questionnaire on the object decimal number, its graphical representation and the relationships that the decimal numbers have with the remaining numerical sets.

The analysis, interpretation and discussion of the results allow us to finally describe the different meanings that the pupils give to the decimal numbers and their representations.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIII

Moreno, M. D; Hernández V. M. y Socas M. M. (2007). *Dificultades y errores sobre números decimales de alumnos con una buena formación en Matemáticas, pp.251-272*

Introducción

Tener información acerca de los errores básicos que cometen los alumnos es importante para el profesorado porque puede conocer la forma en la que éstos interpretan y solucionan las situaciones matemáticas que se les plantean. En este sentido, el aprendizaje de los números decimales constituye un problema didáctico de gran interés.

En trabajos realizados con anterioridad, [Robinet (1986), Fischbein (1954), Socas (2001), Moreno, Hernández y Socas (2004)], se pone de manifiesto que muchos alumnos terminan los estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números y que éstas no se han aclarado de forma correcta en los estudios universitarios. De esta manera, en relación con el concepto de número decimal, se ha observado (Socas, 2001) que alumnos con una fuerte preparación matemática identifican número decimal con número real. Esa misma identificación se da en alumnos que han terminado la Educación Secundaria (Moreno y otros, 2004); sin embargo, en este grupo es más frecuente la caracterización de número decimal como número con coma. De esta manera, ponemos de relieve, tal y como señala Socas:

> *…aceptamos que incluso la mayoría de los alumnos que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en matemáticas, oculta probablemente serios errores conceptuales que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. Parece necesario diagnosticar y tratar mucho más seriamente los errores de los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas, para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas.*
>
> (Socas, 1997, p.143)

El profesor que se sitúa en la Teoría Cognitiva del Aprendizaje, considera que el error lo ha construido el alumno, y es, por tanto, una estructura de su dominio.

Socas indica que la estrategia de remedio…*pasa porque el alumno modifique esa estructura cognitiva errónea y la sustituya por la correcta; para ello, el profesor debe facilitar actividades que provoquen conflicto y haga tambalear esa estructura cognitiva errónea.*

Aceptando el origen del error, las estrategias de remedio van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las matemáticas.

(Socas, 1997, p.150)

En este marco de referencia, el trabajo que nos hemos propuesto tiene, como primer objetivo, presentar a un grupo de alumnos con una buena preparación matemática la realización de unas actividades sobre números y sus representaciones, enmarcadas en un cuestionario, que permita determinar sus competencias en este tema y, como segundo objetivo, hacer un análisis y diagnóstico de los errores cometidos en esas actividades, en relación con el modelo de análisis que se describe en Socas (1997).

De manera más concreta, en este artículo presentamos un estudio con alumnos que tienen una buena formación matemática en términos de errores y dificultades, mediante el análisis e interpretación de los resultados de un cuestionario relacionado con el objeto número decimal y sus representaciones.

En particular, hemos estudiado, en el marco de las dificultades y errores, las competencias de los alumnos sobre el objeto número decimal y sus relaciones con los otros números, además de las cuestiones relativas a sus representaciones.

La presentación del trabajo sigue la siguiente estructura: primero se comentará el diseño y la administración del cuestionario, a continuación se presentarán los resultados globalmente, para luego analizar dos casos: el de María de los Ángeles (MA) y el de Carolina (C); finalmente, terminaremos con un apartado sobre consideraciones generales sobre el trabajo y los resultados.

Diseño y administración del cuestionario

El cuestionario (Anexo I) está compuesto por tres preguntas. La primera, consta de 23 expresiones numéricas que los alumnos deben identificar como números naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales o reales. Tiene como finalidad recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos.

La segunda, consta de 19 expresiones numéricas que los alumnos deben identificar como número decimal o no; en ambos casos debe aportar una breve explicación que justifique su respuesta. Tiene como finalidad analizar cómo los alumnos caracterizan el número decimal y como lo discriminan en relación con los demás números.

La tercera, consta de ocho expresiones numéricas que los alumnos deben representar sobre una recta graduada con unidades y décimas. Tiene como finalidad analizar los métodos que utilizan para representar diferentes números en la recta numérica.

Este cuestionario se administró en dos sesiones distintas a un grupo de alumnos (Licenciados en Matemáticas, alumnos que estudian el tercer curso de la misma Licenciatura y alumnos de Ingeniería Técnica). En una sesión inicial se planteó la primera pregunta y, en una segunda, las dos restantes. La distribución de los participantes se recoge en el siguiente cuadro:

LICENCIADO/A	ESTUDIANTE (ULL)
Matemáticas (12,5 %)	3º Matemáticas (75 %)
	Ingeniería Técnica (12,5 %)

Nuestra conjetura inicial es, por un lado, que, en este grupo de alumnos, el conjunto (D) de los números decimales es caracterizado erróneamente dentro de los sistemas numéricos y que la tendencia mayoritaria es identificar el número decimal con el real. Por otro lado, y con respecto a la representación de números reales en la recta numérica, consideramos que el procedimiento más utilizado es utilizar el sentido operacional del número expresado en la escritura decimal.

Análisis e interpretación de resultados globalmente

A tenor de las respuestas de los alumnos, en relación con la primera pregunta, encontramos cinco tipos de comportamiento que pasamos a describir a continuación:

Comportamiento 1: D contiene a todos los números, excepto los enteros.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SI	NO	NO	SI
35.521	NO	NO	SI	NO	NO	SI
3/5	NO	NO	SI	SI	NO	SI
2	SI	SI	NO	SI	NO	SI
-1/2	NO	NO	SI	SI	NO	SI
0,63	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$-\sqrt{7}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
0,123456...	NO	NO	SI	NO	SI	SI
3,14	NO	NO	SI	NO	NO	SI
0	SI	SI	NO	NO	NO	SI
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
π	NO	NO	SI	NO	NO	SI
10/5	SI	SI	NO	SI	NO	SI
-7/3	NO	NO	SI	SI	NO	SI
0,666...	NO	NO	SI	NO	SI	SI
$(\sqrt{2})^2$	SI	SI	NO	NO	NO	SI
$1,3\hat{5}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
1,73205008....	NO	NO	SI	NO	SI	SI
π-5	NO	NO	SI	NO	SI	SI
0,5	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$3-\sqrt{3}$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
$(1+\sqrt{5})/2$	NO	NO	SI	NO	SI	SI
1/3	NO	NO	SI	SI	NO	SI

Este tipo de comportamiento se caracteriza porque, para estos alumnos, todos los números son decimales excepto los enteros (37,5%), tal y como se observa en la tabla.

En este grupo de alumnos se observa también dificultades para tomar en cuenta que $Q \cap I=\varnothing$ y $R = Q \cup I$. Por ejemplo, en algunas situaciones, -2,062 es un número real, pero no es racional ni irracional. Del mismo modo, hallamos errores relacionados con la inclusión de Z en D, por ejemplo: 2 es un entero, pero no decimal.

Comportamiento 2: D y R son isomorfos

En este caso, el alumnado considera que todos los números son decimales. Por tanto, se establece un cierto isomorfismo entre D y R (25 %).

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	No	Si	Si	No	Si
35.521	NO	No	Si	Si	NO	Si
3/5	No	NO	Si	Si	NO	Si
2	Si	Si	Si	Si	NO	Si
-1/2	NO	NO	Si	Si	NO	Si
0,63	NO	NO	Si	Si	NO	Si
$-\sqrt{7}$	NO	NO	Si	NO	Si	Si
0,123456…	NO	NO	Si	No	Si	Si
3,14	NO	NO	Si	Si	NO	Si
0	NO	Si	Si	Si	No	Si
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	Si	No	Si	Si
Π	NO	NO	Si	NO	Si	Si
10/5	Si	Si	Si	Si	No	Si
-7/3	NO	NO	Si	Si	No	Si
0,666...	No	NO	Si	Si	No	Si
$(\sqrt{2})^2$	Si	Si	Si	Si	No	S
$1,3\ddot{5}$	NO	NO	Si	Si	No	S
1,73205008....	NO	NO	Si	NO	Si	S
Π- 5	NO	NO	Si	NO	Si	S
0,5	NO	NO	Si	Si	NO	S
$3 - \sqrt{3}$	NO	NO	Si	NO	Si	S
$(1+\sqrt{5})/2$	NO	NO	Si	NO	Si	S
1/3	NO	NO	Si	Si	No	S

Comportamiento 3: D y Q son isomorfos

En esta situación, los alumnos identifican el conjunto de los números decimales con el de los racionales (12,5%). En este grupo, también se encuentra algún alumno que excluía a los enteros.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	No	Si	Si	No	Si
35.521	Si	Si	Si	Si	No	Si
3/5	No	No	Si	Si	No	Si
2	Si	Si	Si	Si	No	Si
-1/2	No	No	Si	Si	No	Si
0,63	No	No	Si	Si	No	Si
$-\sqrt{7}$	No	No	No	No	Si	Si
0,123456…	No	No	Si	Si	No	Si
3,14	No	No	Si	Si	No	Si
0	Si	Si	Si	Si		Si
$1+\sqrt{2}$	No	No	No	No	Si	Si
Π	No	No	No	No	Si	Si
10/5	Si	Si	Si	Si	No	Si
-7/3	No	No	Si	Si	No	Si
0,666...	No	No	Si	Si	No	Si
$(\sqrt{2})^2$	Si	Si	Si	Si	No	Si
$1,3\overline{5}$	No	No	Si	Si	No	Si
1,73205008....	No	No	Si	Si	No	Si
Π- 5	No	No	Si	Si	No	Si
0,5	No	No	Si	Si	No	Si
$3-\sqrt{3}$	No	No	No	No	Si	Si
$(1+\sqrt{5})/2$	No	No	No	No	Si	Si
1/3	No	No	Si	Si	No	Si

En esta situación, observamos cómo el alumno considera correctamente a π como irracional, sin embargo, la expresión π - 5 es clasificado como decimal. Posiblemente, el alumno identifica la expresión π, en el primer caso, como una estructura, y en el segundo π - 5, como una operación y no como una estructura y su pensamiento operacional le lleva a una aproximación decimal que identifica como decimal. En este grupo se identifican alumnos que dudan sobre si el cero es irracional o no, siendo racional.

Comportamiento 4: Los números decimales son números con coma.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SI	SI	NO	SI
35.521	NO	NO	SI	SI	NO	SI
3/5	NO	NO	NO	SI	NO	SI
2	SI	SI	NO	SI	NO	SI
-1/2	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,63	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$-\sqrt{7}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,123456…	NO	NO	SI	NO	SI	SI
3,14	NO	NO	SI	SI	NO	SI
0	SI	SI	NO	SI	NO	SI
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	NO	NO	SI.	SI
11	NO	NO	NO	NO	SI.	SI
10/5	NO	NO	NO	SI	NO	SI
-7/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,666...	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$(\sqrt{2})^2$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
$1,3\hat{5}$	NO	NO	SI	SI	NO	SI
1,73205008....	NO	NO	SI	NO	SI	SI
Π- 5	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,5	NO	NO	SI	SI	NO	SI
$3 - \sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
$(1 + \sqrt{5})/2$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
1/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI

En este caso, los números decimales son identificados por su escritura decimal mediante el uso de comas (12,5%).

Comportamiento 5: D está formado por los enteros y los números expresados en escritura decimal finita o infinita periódica

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	NO	NO	SI	NO	NO	SI
35.521	NO	NO	SI	NO	NO	SI
3/5	NO	NO	NO	SI	NO	SI
2	SI	SI	SI	SI	NO	SI
-1/2	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,63	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$-\sqrt{7}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,123456...	NO	NO	NO	NO	SI	SI
3,14	NO	NO	SI	NO	NO	SI
0	NO	SI	SI	SI	NO	SI
$1+\sqrt{2}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
π	NO	NO	NO	NO	SI	SI
10/5	SI	SI	NO	NO	NO	SI
-7/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI
0,666...	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$(\sqrt{2})^2$	SI	SI	SI	SI	NO	SI
$1,3\widehat{5}$	NO	NO	SI	NO	NO	SI
1,73205008....	NO	NO	NO	NO	SI	SI
$\pi-5$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
0,5	NO	NO	SI	NO	NO	SI
$3-\sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
$(1+\sqrt{5})/2$	NO	NO	NO	NO	SI	SI
1/3	NO	NO	NO	SI	NO	SI

Para este último grupo, los números decimales son los enteros y los números expresados en escritura decimal finita o infinita periódica (12,5%).

Además, para este grupo, encontramos alumnos que no establecen de forma correcta la inclusión de D en Q, de manera que 35.521 es decimal, pero no racional, como observamos en la tabla anterior.

Se pone de manifiesto, también, cierta confusión en el uso de punto o coma en la escritura decimal de un número para separar la parte entera de la parte decimal. Así, una respuesta mayoritaria es clasificar a 35.521 como decimal y no entero.

En la siguiente tabla se recogen las relaciones de inclusión que se establecen entre los diferentes Sistemas Numéricos y se muestran los porcentajes de alumnos en términos de relaciones: correcta, incorrecta y no contesta.

	$N \subset Z$	$Z \subset D$	$D \subset Q$	$Q \subset R$	$I \subset R$	$Q \cap I=\emptyset$	$Q \cup I=R$
Correcta	87,5%	37,5%	12,5%	87,5%	87,5%	62,5%	62,5%
Incorrecta	12,5%	62,5%	75%			25%	25%
No contesta			12,5%	12,5%	12,5%	12,5%	12,5%

En ella se observa que las principales dificultades están en las relaciones entre N y Z con D y la relación entre D y Q.

En la segunda pregunta el alumnado debe identificar al número decimal y dar una explicación de la respuesta. De esta manera, podemos ver qué argumentos utilizan en cada caso para identificarlo o discriminarlo.

El análisis de esta parte del cuestionario nos permite determinar los siete argumentos siguientes:

a) Todos son decimales menos los enteros. Un número es decimal si tiene décimas, centésimas...

b) Todos son decimales menos los enteros. Un número es decimal si tiene parte decimal no nula.

c) Todos son decimales menos los enteros. Un número o su valor es decimal si está entre dos enteros o no es entero.

d) Todos son decimales. Los decimales son los que están representados en el sistema numérico decimal.

e) Todos son decimales menos los irracionales. Un número, c, es decimal si $\exists\exists a$ y $b \in Z$: $a / b = c$

f) Todos son decimales, porque pueden expresarse como un número seguido por una coma y decimales.

g) Todos son decimales excepto los que tienen expresión decimal infinita no periódica.

Como se indicó al comienzo de este trabajo, las preguntas 1 y 2 del cuestionario se propusieron en momentos diferentes; ello nos permitió analizar la consistencia o no de los argumentos utilizados. Se observa, en general, algunos cambios. Los más relevantes son:

- La exclusión de las fracciones como parte del conjunto de los decimales en la primera pregunta al incluirlas en la segunda.

- Contrariamente, la de incluir los irracionales como decimales en la primera pregunta al excluirlos en la segunda.

Las argumentaciones erróneas de los alumnos las podemos organizar en cuatro grupos:

- Identificar el número decimal como un número con comas o con la escritura decimal.
- Seleccionar a los decimales tomando como referencia las fracciones y la escritura decimal.
- Clasificar a los números como no decimales por la ausencia de comas en su representación.
- Seleccionar a los números decimales tomando como referencia el orden.

En relación con la tercera pregunta el alumnado encuestado ha puesto en práctica diferentes procedimientos para representar las ocho expresiones numéricas:

a) Utilizar la escritura decimal para representar los números exactamente o por aproximación en la recta numérica.

b) Aplicar el método basado en el teorema de Pitágoras para representar $\sqrt{2}$.

c) Representar una fracción con el método fundamentado en el teorema de Thales: División de un segmento en partes iguales.

d) Considerar a $-2\sqrt{2}$ como el doble de $-\sqrt{2}$ y éste como el simétrico de $\sqrt{2}$.

e) Situar una fracción en la recta numérica dividiendo la unidad en partes iguales, pero de forma aproximada.

En la siguiente tabla reflejamos los porcentajes de alumnos por número y procedimiento:

	$\sqrt{2}$	0,75	0,333...	$-2\sqrt{2}$	2/3	2,75	3/4	2,2333...
A	50%	87,5%	87,5%	25%	62,5%	87,5%	75%	87,5%
B	12,5%							
C					12,5%		12,5%	
D				12,5%				
E					12,5%			

Conviene señalar que, en algunas representaciones, los alumnos recurren a procedimientos mixtos o combinaciones de los anteriores. En la tabla no hemos considerado esta división y hemos tenido en cuenta para el porcentaje el procedimiento más determinante de los realizados por el alumno.

Sabemos que, en el contexto de la recta numérica, el uso de la escritura decimal para representar números reales, no es un procedimiento eficaz. Sin embargo, en este estudio se observa que es el método utilizado con mayor frecuencia.

Asimismo, obtenemos que $\sqrt{2}$ no es representado por el 25% de los alumnos y -2$\sqrt{2}$ por el 50%.

Los casos de las alumnas MA y C

Después de la presentación global de los resultados, analizamos, a título de ejemplo, los casos de MA (Licenciada en Matemáticas) y C (titulada en Ingeniería Técnica).

- MA considera que los números decimales son aquellos números que no son enteros ni irracionales. Es de los alumnos caracterizados por el comportamiento 3 y está en el subgrupo de aquéllos que excluían a los enteros. Cuando contesta a la pregunta 2 del cuestionario mantiene los mismos criterios que usó en la pregunta 1, de manera que sus respuestas en dicha pregunta 2, son del tipo:

-3,9 "es decimal, tiene un decimal. Es decimal puro".

0 "No es decimal, no tiene decimales".

10/5 "No es decimal, es un entero".

-7/3 "Es decimal, puede ser representado como decimal".

π "No es decimal, es irracional".

0,666… "Es decimal, es decimal periódico".

1,73205008… "No es decimal, es irracional".

La tercera cuestión relativa a la representación en la recta numérica, la aborda utilizando tres procedimientos diferentes:

1) Aplicar el método basado en el teorema de Pitágoras para representar $\sqrt{2}$ y, en el caso de $-\sqrt{8}$, aplicar el mismo procedimiento, utilizando un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 2 unidades.

2) Utilizar la escritura decimal para representar los números en la recta numérica. Esta situación la desarrolla en:

0,75 "A partir de cero (unidad) he tomado siete décimas y cinco centésimas partiendo de que estaba dividida la unidad en décimas".

2,75 "A partir de la unidad 2, tomo siete décimas y 5 centésimas"

$\frac{3}{4}$ "Equivale a 0,75. Lo hago igual que en el caso b".

2,2333… "A partir de la unidad 2, tomo 2 décimas y 3 centésimas (3 milésimas…). Lo sitúo de manera aproximada. Si no, lo paso a decimal y lo represento".

3) Representar una fracción con el método fundamentado en el teorema de Thales: división de un segmento en partes iguales.

0,333… "Equivale a $\frac{3}{9}$. Divido la unidad en 9 partes iguales y tomo 3".

$\frac{2}{3}$ "Divido la unidad en 3 partes iguales y tomo 2".

MA, es una alumna que identifica los números decimales como aquellos números que son isomorfos a las fracciones propias e impropias (no enteros) y descarta como tales a las fracciones impropias (enteros) y a los irracionales. En la representación, utiliza técnicas propias de la representación decimal, fraccionaria o de los irracionales algebraicos, salvo en el caso de 2,2333…A pesar de los errores, se puede observar un cierto equilibrio entre el uso en el campo numérico del pensamiento operacional y estructural.

- **C**, identifica los números decimales como aquellos números que están expresados o son susceptibles de expresarlos, al cambiar de registro, con cifras decimales significativas. Presenta el comportamiento que hemos denominado 4. Para esta alumna dejan de ser decimales, únicamente, los números enteros. Cuando contesta a la pregunta 2 del cuestionario mantiene los mismos criterios que usó en la pregunta 1, de manera que sus respuestas en dicha pregunta 2, son del tipo: "Sí, si tiene cifras decimales o puede ser escrito con cifras decimales significativas" y "No, si no tiene cifras decimales o no puede ser escrito con cifras decimales significativas".

La tercera cuestión relativa a la representación en la recta numérica la aborda utilizando dos procedimientos:

1) Utilizar la escritura decimal para representar los irracionales algebraicos en la recta numérica. Como este procedimiento tiene dificultades, acude a una representación aproximada.

Para representar $\sqrt{2}$, señala: "Está entre 1,4 y 1,5".

En el caso de $-2\sqrt{2}$, lo considera como el doble de $-\sqrt{2}$ y éste como el simétrico de $\sqrt{2}$. Indica que $-2\sqrt{2}$ se representa: "A partir del caso anterior, se mide la distancia de 0 a $\sqrt{2}$, se toma el doble y se mide esa distancia hacía la izquierda a partir del cero".

2) Utilizar la idea de representar el número mediante una fracción y situar ésta en la recta numérica dividiendo la unidad en partes iguales, pero de forma aproximada.

0,75 "Es $\frac{3}{4}$; se divide la distancia entre 0 y 1 en cuatro trozos y se coge la mitad de la segunda mitad".

0,333… "Equivale a $\frac{1}{3}$. Se divide la distancia entre 0 y 1 en tres trozos iguales y se marca en el primero".

$\frac{2}{3}$ "Se divide la distancia entre 0 y 1 en tres trozos iguales y se toman los dos primeros".

2,75 "A partir de 2, se divide en cuatro partes la distancia entre 2 y 3 y se toman las tres primeras".

$\frac{3}{4}$ "Se divide en 4 la distancia entre 0 y 1 y se marca donde llegue la tercera división".

2,2333… "Se parte de 2. Si fuese 2,25 se dividiría en cuatro trozos la distancia entre 2 y 3 y se tomaría la primera división. Como es un poco menos, se marca un poco antes".

C, es una alumna que identifica los números decimales como aquellos números que son isomorfos a las fracciones propias e impropias (no enteros) con los irracionales, ya que éstos pueden ser expresados con cifras decimales significativas y descarta como tales a las fracciones impropias (enteros).

En la representación, utiliza técnicas propias de las representaciones decimal y fraccionaria o combinaciones de ambas; en casos de dudas por inexactitud de la técnica, usa la aproximación. La primera, la utiliza para los irracionales algebraicos; la segunda, para las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, y la combinación de ambas para los restantes casos.

C, es una alumna que manifiesta un pensamiento claramente operacional y que lo pone en juego para dar respuesta a las diferentes preguntas del cuestionario.

Consideraciones

En el estudio con alumnos que tienen una buena formación matemática hemos encontrados cinco comportamientos diferenciados. Si los comparamos con resultados anteriores, tenemos que en Socas (2001) se describen, para alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, dos tendencias, a saber:

a) El número decimal como sinónimo de número real (85 %).
b) El número decimal como aquel número expresado mediante una escritura numérica con comas (15 %).

Asimismo, en Moreno y otros (2004) se encuentra, en alumnos de 1^er^ curso de la titulación de Maestro, Especialidad de de Educación Infantil, las mismas posiciones extremas anteriores, pero la más significativa es la segunda:

a) El número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con comas.

En este trabajo también hemos encontrado, tal como se ha mencionado anteriormente, las dos tendencias anteriores:

a) Número decimal como sinónimo de número real (25%).

b) Número decimal como número expresado mediante escritura numérica con comas, pero con ciertos matices relacionados con la presencia (o no) de infinitas cifras decimales periódicas (o no) (25%)

Sin embargo, hemos observado otra tendencia:

c) Número decimal como sinónimo de número racional (12,5%).

En relación con los errores, los resultados anteriores nos permiten identificar en las formas de pensar de los alumnos cuatro grupos:

a) Número decimal es cualquier número que admita una representación en el Sistema de Numeración Decimal.

b) Número decimal es cualquier número que esté expresado mediante una escritura con comas o que pueda expresarse de ese modo si se realiza el correspondiente cambio de registro.

c) Número decimal es el que viene expresado mediante una escritura decimal finita (se incluyen a los enteros) o decimal infinita y periódica.

d) Número decimal es el aquel en cuya representación aparece una coma.

Hemos identificado, también, cinco procedimientos o combinaciones de ellos para representar expresiones numéricas en la recta numérica.

Cuando analizamos los casos de MA y C, observamos que son alumnas con comportamientos diferenciados en relación con los números decimales, con los sistemas numéricos y con las formas de representar los números en la recta numérica. La primera, muestra un cierto equilibrio entre el uso en el campo numérico del pensamiento operacional y estructural, mientras que la segunda manifiesta un pensamiento claramente operacional que lo pone en juego para dar respuesta a las preguntas del cuestionario sobre números.

Encontramos, finalmente, en relación con los números decimales, en un grupo de alumnos que tienen una buena formación matemática, comportamientos y prácticas en los que se utiliza “lo decimal” como un lenguaje sin definiciones precisas, más propio de usos y prácticas fuera del sistema didáctico. Cabría esperar de estos alumnos usos y prácticas en el sistema didáctico en las que se utilizara “el decimal” como un lenguaje con definiciones precisas.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1981). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.*

Centeno, J, (1988). *Números decimales.* Síntesis. Madrid.

Colera, J. y otros (1996). *Matemáticas 1 ESO.* Anaya. Madrid.

Dickson, L. y otros (1996). *El aprendizaje de las Matemáticas*. MEC-Labor. Barcelona.

Fischbein, E. (1994). The irracional numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceeding of the XVIII PME,* Lisbon, Vol. 2, 352-359.

Hart, K. M: (1981). *Children's Understanding Mathematics: 11-16.* London: John Murray.

Moreno, M. D.; Hernández, V. y Socas, M. M. (2004). Respuestas del alumnado de Magisterio a un cuestionario sobre números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 253-276.

Robinet, J. (1996). Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Cahier de Didactique des Mathématiques, 21.* IREM. Paris 7.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* ICE-Horsori. Barcelona.

Socas, M. M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III, 297-318.* Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. *Números,* Vol. 50, 19-34.

Anexo:

Cuestionario [illegible]

1. **[illegible] la tabla contestando SÍ o NO en cada cuadro, sin dejar ninguno en blanco.**

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,002						
[illegible]						
3/5						
2						
-1/2						
0,03						
$-\sqrt{7}$						
0,1[illegible]...						
3,14						
6						
$1+\sqrt{2}$						
Π						
10/5						
-7/3						
0,666...						
$(\sqrt{2})^2$						
$1,3\overline{5}$						
1,73205008...						
Π- 5						
0,5						
$3-\sqrt{3}$						
$(1+\sqrt{5})/2$						
1/3						

2. **Marca con un Sí los números decimales y con un No los restantes, explica brevemente tu respuesta:**

-3,9		
0		
1/2		
2		
$1+\sqrt{2}$		
10/5		
Π		
-7/3		
0,666...		
$(\sqrt{2})^2$		
-3		
$1,3\overline{5}$		
1,73205008....		
Π- 5		
0,5		
$3-\sqrt{3}$		
-1/3		
1,48		
$(1+\sqrt{5})/2$		

3. Representa en la recta numérica:

a) $\sqrt{2}$ **b)** 0,75 **c)** 0,333… **d)** $-2\sqrt{2}$ **e)** 2/3 **f)** 2,75 **g)** 3/4

h) 2,2333…