LUGARES GEOMÉTRICOS PINTORESCOS (3)

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En esta tercera entrega, sobre lugares geométricos pintorescos, damos cabida a otra serie de curiosas curvas planas, con las ecuaciones cartesianas correspondientes, tales como una retorta de cuello corto, una cabeza de buitre, un soplillo, una sombrilla o un paracaídas, una épsilon singular, unas alforjas (1 y 2), un par de alas, etc.

Abstract

In this third work, about picturesque geometric loci, we study once again a lot of curious plane curves, with the corresponding Cartesian equations, such as a retort of short neck, a vulture's head, a blowing-fan, an umbrella or a parachute, a singular epsilon, a pairs of saddlebags (1 and 2), a pair of wings, etc.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIII
J. Martel (2007). *Lugares geométricos pintorescos (3), pp. 195-216*

Introducción

En este trabajo, continuamos obteniendo curvas singulares, generadas por un punto P del plano ligado a otro punto M que se mueve sobre una circunferencia de radio a. Este parámetro hace, cuando es el único que figure en la ecuación, que la curva tenga siempre la misma forma, que sólo cambiará de tamaño al variar a, ya que se comporta como un escalar. No podemos decir lo mismo si en la ecuación figura más de un parámetro; en este caso, la curva variará de forma al variar éstos. Por otro lado, es recomendable utilizar dichos parámetros en el cálculo de la ecuación de un determinado lugar, pues al ser ésta homogénea en x, y, y sus parámetros, nos permitirá detectar posibles errores en el momento en que se haya perdido la homogeneidad .

Hemos elegido unas pocas curvas, dentro de un buen número de ellas, por estimar que pudieran tener algún interés, dada su rareza.

Una retorta de cuello corto

El punto P se obtiene (Fig. 1) como intersección de la recta ME con la perpendicular por N al eje OX. El punto N resulta de la intersección de la perpendicular por A a la recta ME y la perpendicular por M al eje OY. El lugar que genera el punto P es una cuártica de ecuación:

$$x^2(x^2+y^2)+a(x^2+y^2)(x-y)-a^2y(2x-3y)+a^3(x-3y)+a^4=0.$$

Esta ecuación la proporciona el Cabri II Plus, para distintos valores numéricos de a, mediante *Coord. o Ecuación.*

El inverso de P respecto de la circunferencia de centro O es P'. Al lugar generado por este punto lo hemos denominado "retorta de cuello corto".

Para determinar su ecuación, partiremos de las correspondientes fórmulas de transformación de una curva en su inversa; así, para a = 1, resulta la que sigue:

$$(x^2+y^2)^3+(x^2+y^2)^2(x-3y)+$$
$$(x^2+y^2)(3y^2-2xy-y+x)+x^2=0$$

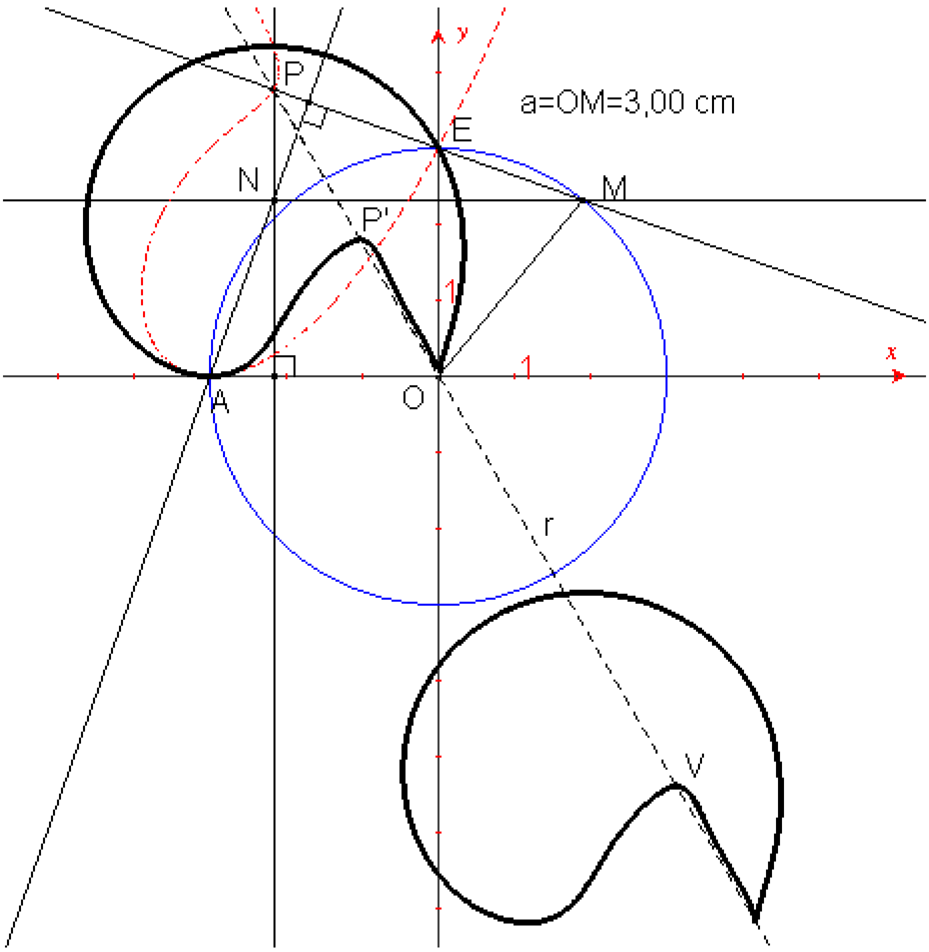


Fig.1

Como se puede apreciar, la ecuación es de grado seis. Si introducimos el parámetro a, la ecuación se escribiría de la siguiente manera:

$$(x^2+y^2)^3+a(x^2+y^2)^2(x-3y)+$$
$$a^2(x^2+y^2)(3y^2-2xy-ay+ax)+a^4x^2=0$$

Cabeza de buitre

La curva, que vamos a ver a continuación, podríamos denominarla también "garra de una rapaz".

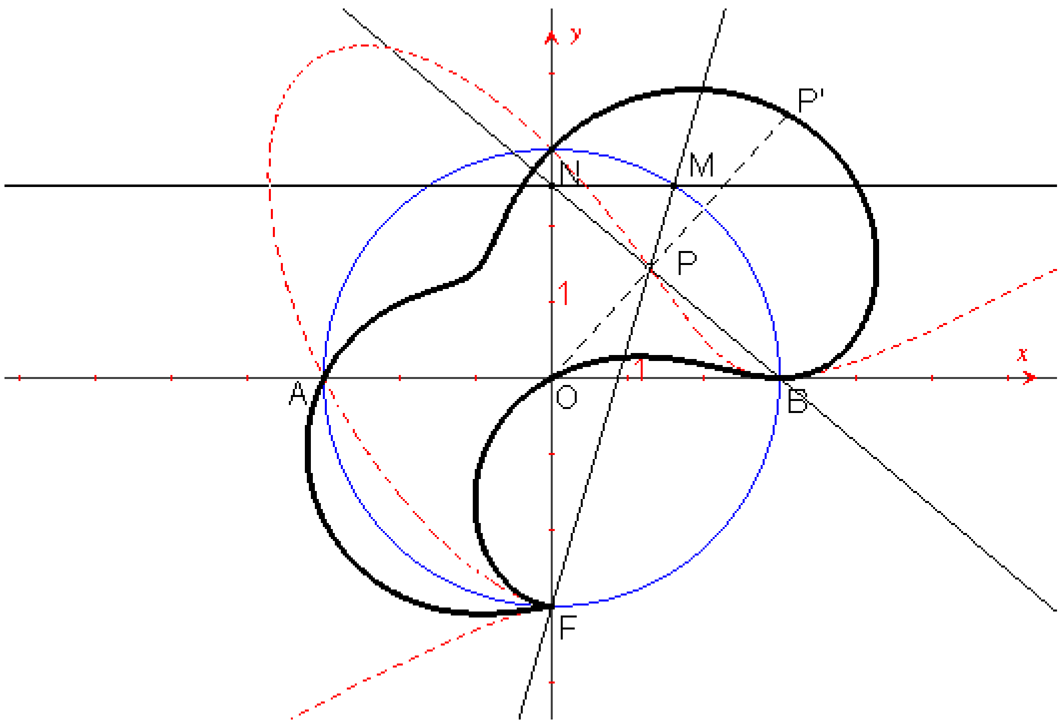


Fig. 2

En la fig. 2, P' es el inverso de P (intersección de las rectas FM y BN). Este punto P engendra la cúbica de ecuación:

$$x^3 - x^2y - xy^2 - y^3 - a(x+y)^2 - a^2(x-y) + a^3 = 0.$$

Aunque esta ecuación la facilita el Cabri, para ciertos valores numéricos de a, vamos a tratar de deducirla a continuación.

Sean M(x,y), N(0,y), B(a,0), F(0,-a) y P(X,Y) las coordenadas respectivas de los citados puntos. Las ecuaciones de las rectas FM y BN, son, respectivamente, las que siguen:

$$Y + a = \frac{y+a}{x} X, \;\; Y = \frac{y}{-a}(X - a).$$

De ellas se deducen los valores de x e y:

$$y = -\frac{aY}{X-a}, \ \ x = \frac{aX(X-Y-a)}{(X-a)(Y+a)},$$

que, sustituidos en la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2 = a^2$, dan la ecuación del lugar descrito por P:

$$X^2(X-Y-a) = (Y+a)^2(X+Y-a).$$

Esta ecuación coincide, como se puede comprobar, con la dada por el Cabri, para ciertos valores numéricos de a. Así para $a=2$, se obtiene:

$$x^3 - x^2y - xy^2 - y^3 - 2(x+y)^2 - 4(x-y) + 8 = 0.$$

La ecuación del lugar descrito por P', inverso de P, es

$$(ay + x^2 + y^2)^2(ax + ay - x^2 - y^2) = a^2x^2(ax - ay - x^2 - y^2).$$

El Cabri también proporciona, en este caso, la ecuación de la figura inversa para determinados valores numéricos de *a* (que, lógicamente, han de ser siempre positivos). Así, para $a=2$, la ecuación, una vez agrupados mejor sus términos, es la que sigue:

$$(x^2+y^2)^3 - 2(x^2+y^2)^2(x-y) - 4(x^2+y^2)(x+y)^2 +$$
$$8(x^3 - x^2y - xy^2 - y^3) = 0.$$

El soplillo

La fig. 3, muestra la manera de generar el soplillo o *abanador*. El punto P, intersección de las rectas FM y DN, da lugar a una cuártica de ecuación:

$$x^4 - 2x^2y^2 - 3y^4 - 4ay(x^2+2y^2) - 2a^2(x^2+3y^2) + a^4 = 0.$$

La figura inversa, generada por P', inverso de P, es

$$(x^2+y^2)^3-2a^2(x^2+3y^2)(x^2+y^2)-$$
$$4a^3y(x^2+2y^2)+a^4(x^2-3y^2)=0.$$

Ambas ecuaciones las facilita el Cabri, para determinados valores numéricos de a, mediante la herramienta *Coord. o Ecuación*.

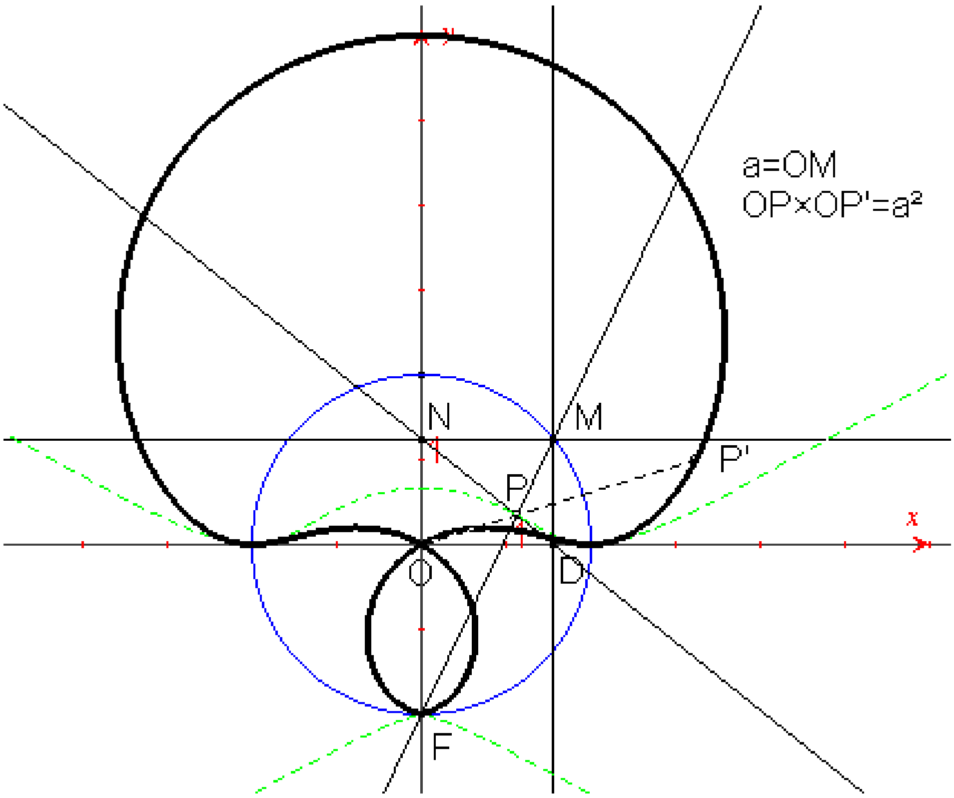


Fig. 3

El paraguas

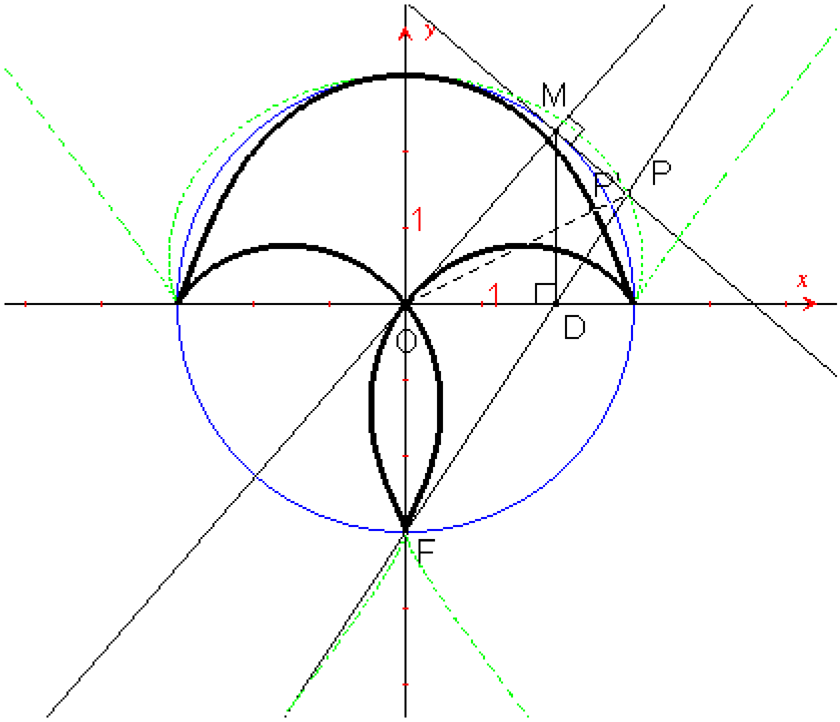


Fig. 4

La perpendicular por M a OM encuentra a la recta FD en P. El lugar descrito por P es una cuártica de ecuación:

$$x^4 + x^2y^2 - y^4 - 2ay(x^2 + y^2) - 2a^2x^2 + 2a^3y + a^4 = 0.$$

El punto P', inverso de P, respecto de la circunferencia de centro O, genera lo que hemos denominado paraguas o paracaídas. Su ecuación se determina, fácilmente, mediante las fórmulas de transformación de la inversión, dando lugar a

$$(x^2 + y^2)^4 + 2ay(x^2 + y^2)^3 - 2a^2(x^2 + ay)(x^2 + y^2)^2 +$$
$$a^4(x^4 + x^2y^2 - y^4) = 0.$$

Como puede observarse, la ecuación obtenida es de grado 8, razón por la que el Cabri no es capaz de facilitarla. (Recordemos que el máximo orden que, hasta ahora, puede proporcionar dicho programa es 6).

Una épsilon singular

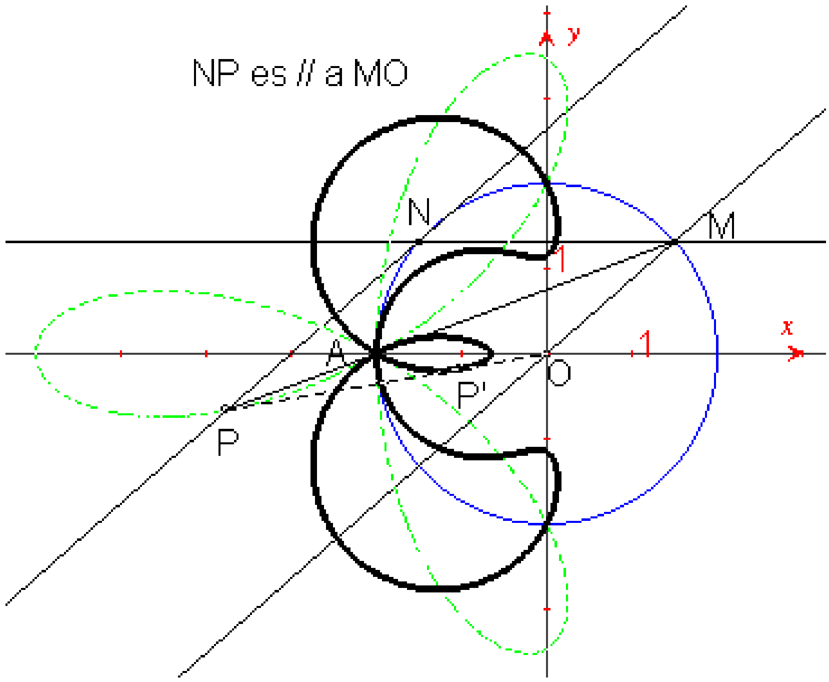


Fig. 5

Tal como indica la fig. 5, el punto P genera un trifolium cuya ecuación:

$$(x^2+y^2)^2+2a(3x^2-y^2)(x+2a)+10a^3x+3a^4=0,$$

la facilita el Cabri en forma polinómica y con coeficientes numéricos.

El punto P', inverso de P, genera la curva que hemos denominado "épsilon", cuya ecuación también la proporciona el Cabri, aunque, al igual que en el caso anterior, como un polinomio con coeficientes numéricos.

Dicha ecuación, escrita de un modo más general, es la que sigue:

$$3(x^2+y^2)^3+10ax(x^2+y^2)^2+2a^2(3x^2-y^2)(2x^2+2y^2+ax)+$$
$$a^4(x^2+y^2)=0.$$

Alforja 1

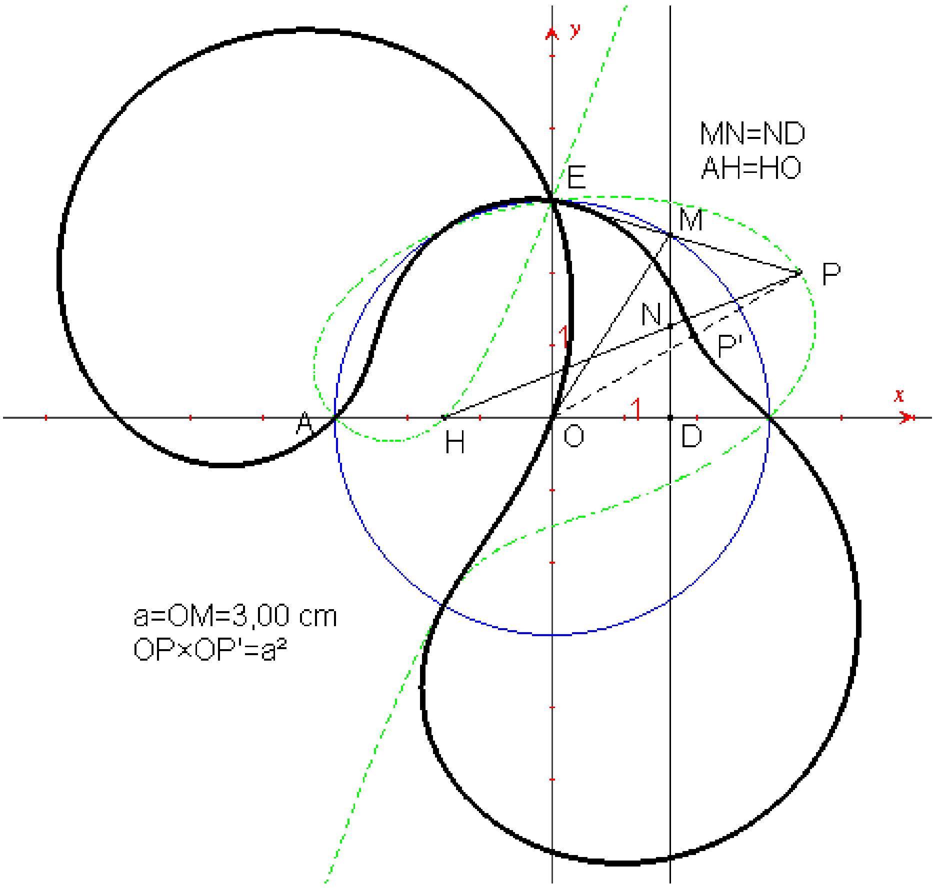


Fig. 6

El punto P genera una cúbica de ecuación:

$$2[x^2(x-y)+y^2(3x-y)]+a(x^2-4xy+3y^2)-2a^2x-a^3=0.$$

A partir de esta ecuación es fácil de hallar la ecuación del lugar descrito por P’, inverso de P. Para ello, basta con aplicar, como hemos dicho otras veces, las fórmulas de transformación de la inversión, con las que se obtiene, como ecuación de esta alforja (fig. 6), la que sigue:

$$(x^2+y^2)^3+2ax(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-4xy+3y^2)(x^2+y^2)-$$
$$2a^3[x^2(x-y)+y^2(3x-y)]=0.$$

El Cabri determina las ecuaciones de estas dos curvas; pero, como siempre, con coeficientes numéricos.

Alforja 2

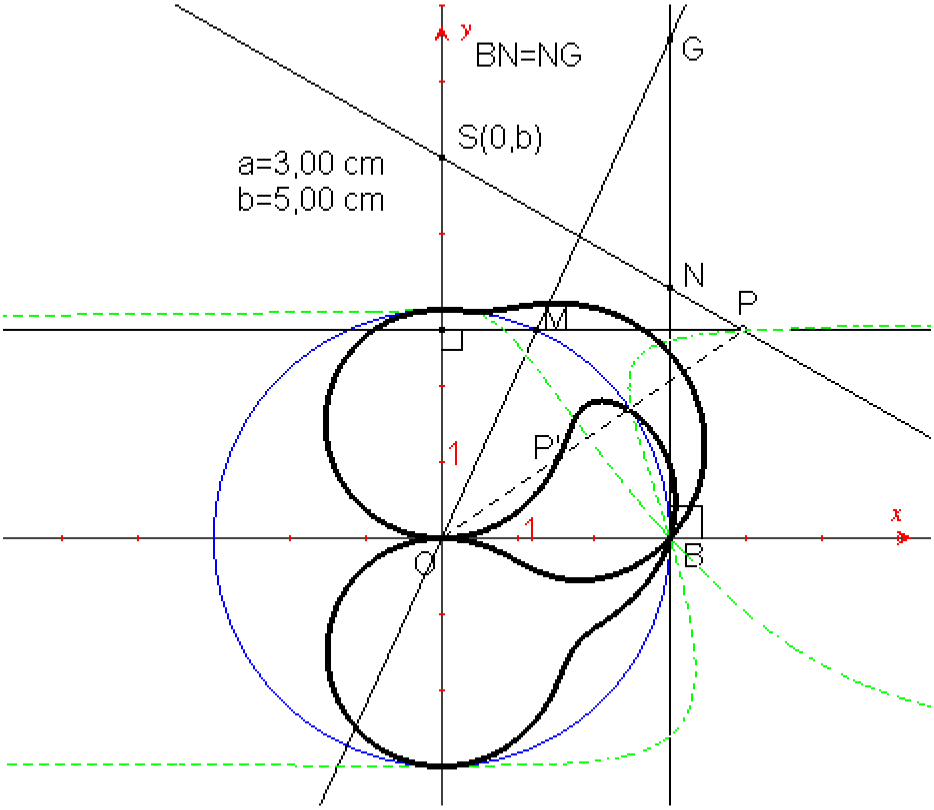


Fig. 7

Disponemos ahora de dos parámetros: el a que, al ser el radio de la circunferencia, sólo podrá tomar valores reales positivos, y b, ordenada del punto S, que se mueve sobre el eje OY, y que, por tanto, puede tomar también valores reales negativos. Tal como se indica en la fig. 7, el punto N es el punto medio del segmento BG. El punto P, intersección de SN y la perpendicular por M al eje OY, genera una cuártica, cuya ecuación vamos a obtener. Para ello, establezcamos las coordenadas de los puntos que van a intervenir en el proceso de su determinación; así, M(x, y), B(a ,0), G(a, ay/x), S(0, b) y P(X, Y). Además, por ser $y=Y$, la ecuación de la recta SN, nos proporcionará el valor de x; o sea,

$$x = \frac{aXY}{2(aY + bX - ab)} \ .$$

Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación de la circunferencia, tendremos, finalmente, para la ecuación de la cuártica, la expresión:

$$4(aY + bX - ab)^2 (a^2 - Y^2) = a^2 X^2 Y^2 .$$

A partir de esta ecuación, determinaremos la ecuación de la curva generada por P', inverso de P; esto es:

$$4[a^2 y + abx - b(x^2 + y^2)]^2 [(x^2 + y^2)^2 - a^2 x^2] = a^6 x^2 y^2 .$$

En esta ecuación, de grado 8 en x e y, hemos prescindido de las letras mayúsculas con *primas*, que intervienen en las fórmulas de transformación de la inversión.

Por otro lado, tal como hemos indicado en la introducción, para diferentes valores de los parámetros a y b, las curvas obtenidas serán también diferentes. Veamos un par de casos:

i) *a=4, b=2*

Como puede observarse, con estos valores de los parámetros, la figura inversa nos recuerda al signo que cierra una interrogación. Las ecuaciones, de ambas curvas, se deducen de las anteriores para los valores indicados de los parámetros.

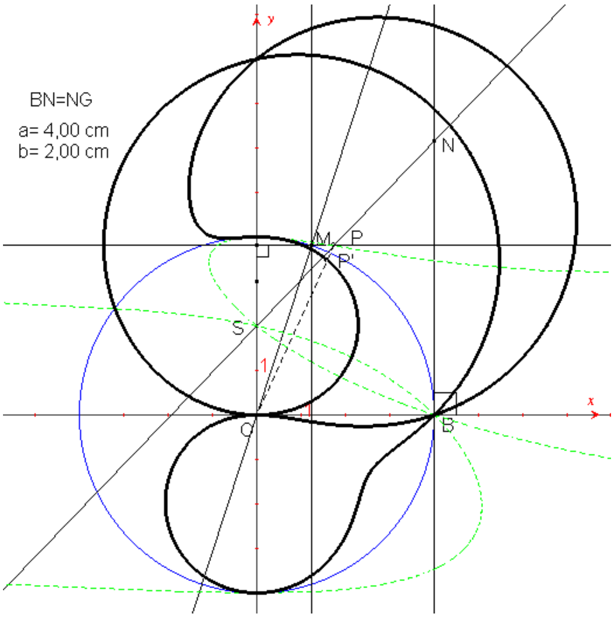


Fig. 8

ii) *a=2, b=0,*

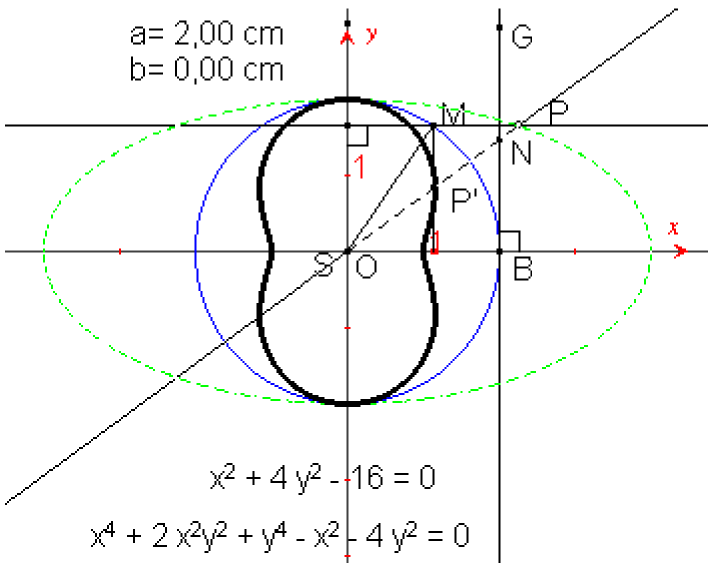


Fig. 9

El punto P genera una elipse y P', una cuártica bicircular, como era de esperar. Las ecuaciones de ambas curvas las proporciona el Cabri, tal como aparecen en la fig. 9.

Un par de alas

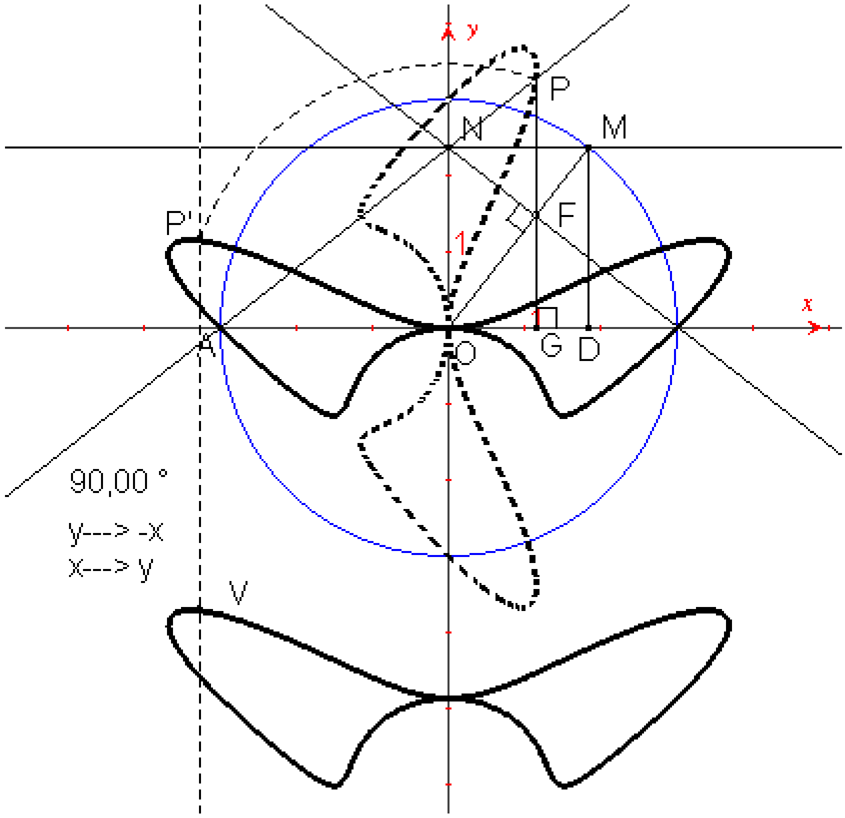


Fig. 10

El punto P, intersección de AN y GF, genera el par de alas. Para determinar su ecuación hay que tener en cuenta las coordenadas de los puntos A(a, 0), N(0, y), P(X, Y), M(x, y), y F(X, y_1).

De la ecuación de la recta AN se deduce que $y=aY/(a+X)$, y de la semejanza de los triángulos OGF y ODM, la relación: $y_1=yX/x$. El coeficiente angular de NF, $(y-y_1)/-X=-x/y$, nos permite determinar, el valor $x= X(a+X)^2/Y^2$. Sustituyendo estos valores de x e y, en $x^2+y^2=a^2$, se obtiene, finalmente, la ecuación del lugar generado por P:

$$X^2(a+X)^6+a^2Y^4[Y^2-(a+X)^2]=0.$$

Mediante un giro de 90º, $X \quad Y$ e $Y \quad -X$, la ecuación del par de alas (trazo continuo) toma esta otra forma:

$$Y^2(a+Y)^6+a^2X^4[X^2-(a+Y)^2]=0.$$

Unas gafas

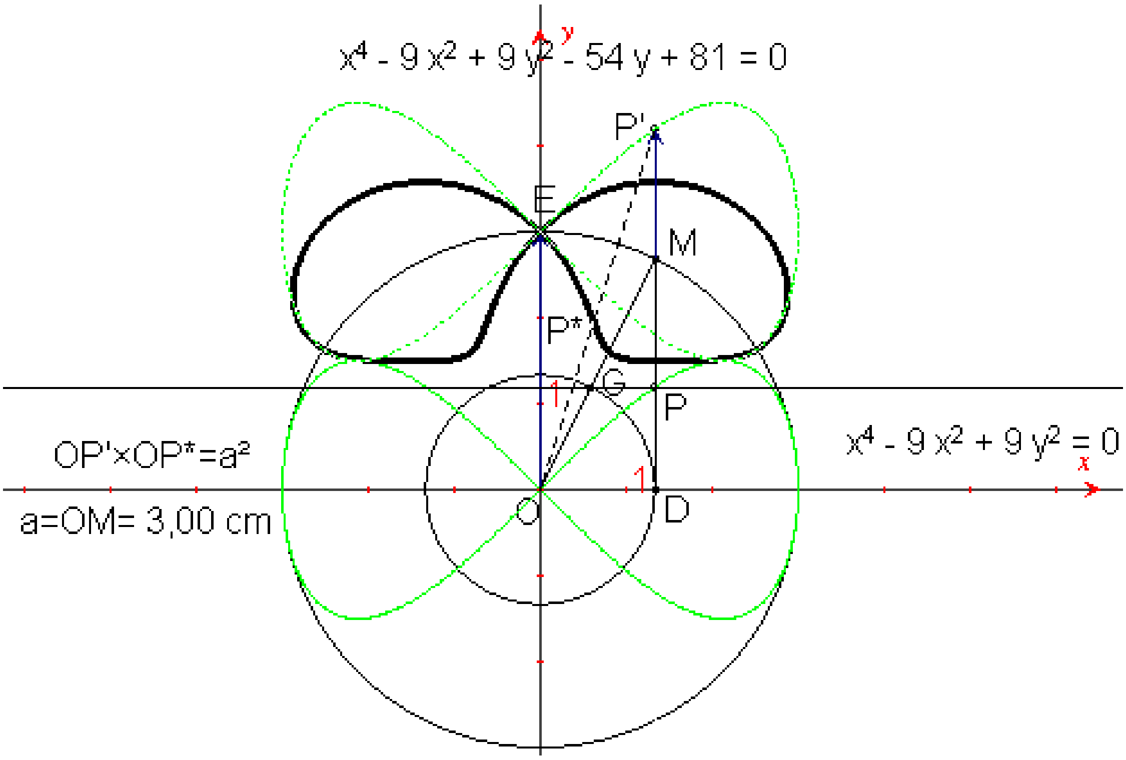


Fig. 11

El punto P genera una cuártica, no bicircular, conocida como lemniscata[1] de Gerono, de ecuación: $x^4 - a^2(x^2 - y^2) = 0$

Mediante una traslación de vector OE, P se transforma en P', que genera la misma curva anterior, pero que tendrá ahora por ecuación:

$$x^4 - a^2(x^2 - y^2) - 2a^3y + a^4 = 0.$$

El punto P*, inverso de P', genera la curva inversa, cuya ecuación es,

$$(x^2 + y^2)^4 - 2ay(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^2 + a^4x^4 = 0.$$

[1] La verdadera lemniscata, que es bicircular, tiene por ecuación: *$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$*.

Una alfombra mágica

La paralela por G a ED corta a MN en el punto P. Este punto genera la curva que hemos denominado alfombra mágica.

Para determinar su ecuación, basta tener en cuenta las coordenadas de los puntos que aparecen en la Fig. 12. Al ser, $y=Y$; el valor de x lo obtendremos mediante la ecuación de la recta ED, de donde resulta:

$$x = \frac{a^2 X - Y(a^2 - Y^2)}{a^2}.$$

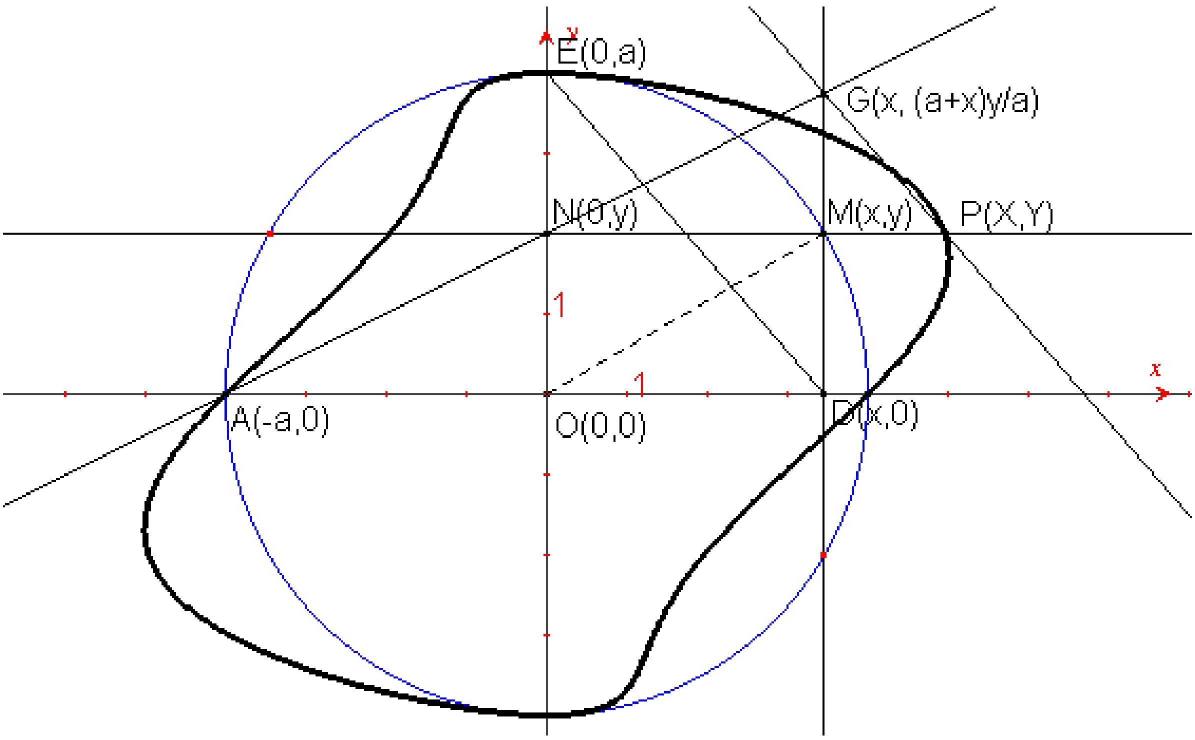


Fig. 12

Estos valores de x e y, sustituidos en la ecuación de la circunferencia, $x^2+y^2=a^2$, dan, finalmente, para dicha ecuación, la expresión:

$$Y^6 + 2a^2 y^3 (X - Y) + a^4 (X^2 - 2XY + 2Y^2) - a^6 = 0.$$

Una punta de horma

En este caso, el punto P que genera el lugar (Fig. 13), viene dado por la intersección de MN con la paralela por G a la perpendicular a OM.

El Cabri proporciona, sin dificultad alguna, su ecuación que, para $a=3$, se muestra en el dibujo. Podemos generalizarla, para cualquier valor de a, homogeneizándola; así obtendríamos:

$$y^4 - 2ax^3 + a^2(x^2 + y^2) - a^4 = 0.$$

Además de "punta de horma", podríamos denominarla, también, dada su forma, "punta de pala".

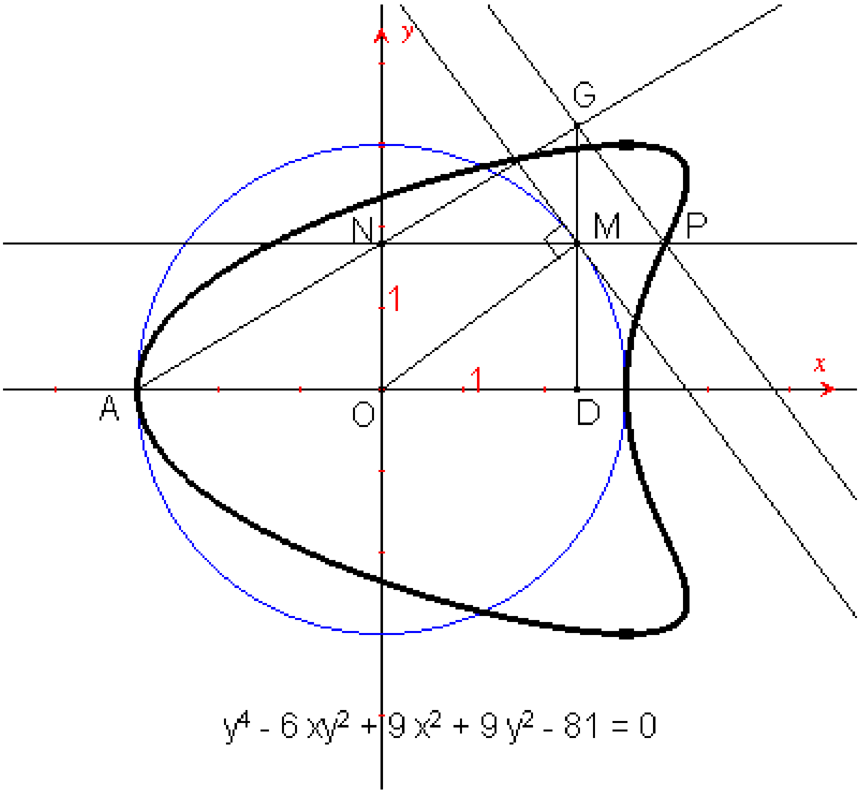


Fig. 13

Ancas de un caballo

El punto P (fig. 14), intersección de MD con la paralela a OX por G, genera una cuártica de ecuación:

$$2x^2y^2 - 2ax^2y + a^2(x^2 - y^2) + 2a^3y - a^4 = 0.$$

El Cabri, la facilita para ciertos valores numéricos de. Así, para a = 3, la ecuación que proporciona es la que sigue:

$$2x^2y^2 - 6x^2y + 9x^2 - 9y^2 + 54y - 81 = 0.$$

El inverso de P, P', genera el lugar que hemos denominado "ancas de un caballo", que se muestra a continuación:

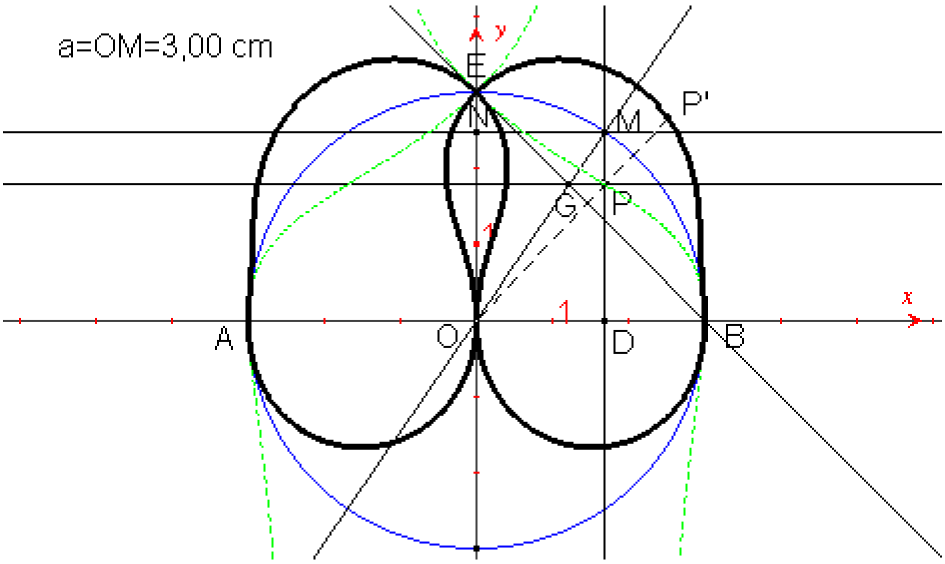


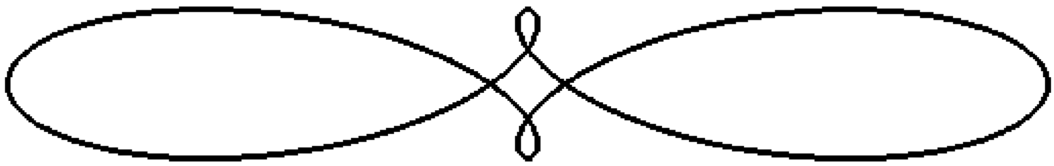
Fig. 14

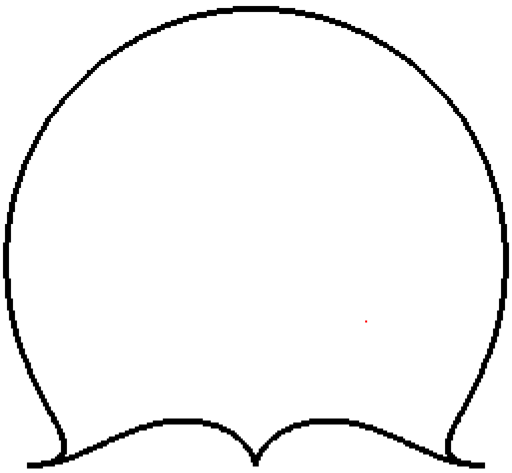
Su ecuación, mediante las fórmulas de transformación de la inversión, es la que sigue:

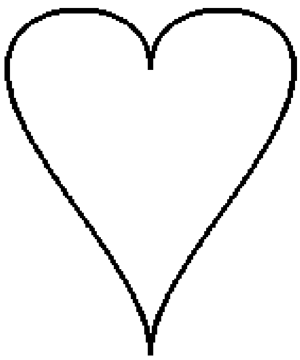
$$(x^2 + y^2)^4 - 2ay(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^2 +$$
$$2a^3x^2y(x^2 + y^2) - 2a^4x^2y^2 = 0.$$

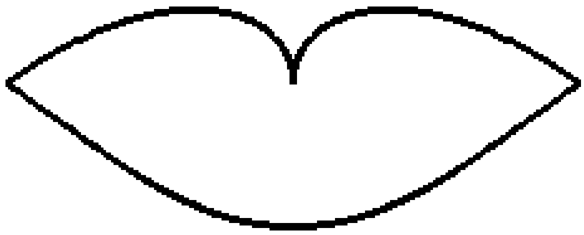
Otras curvas planas

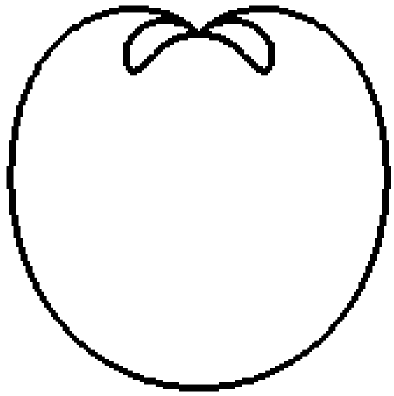
A continuación, presentaremos algunas curvas más, que son también lugares geométricos obtenidos con el Cabri; pero, sin denominarlas ni especificar cómo han sido obtenidas, con el fin de no alargar demasiado este trabajo.

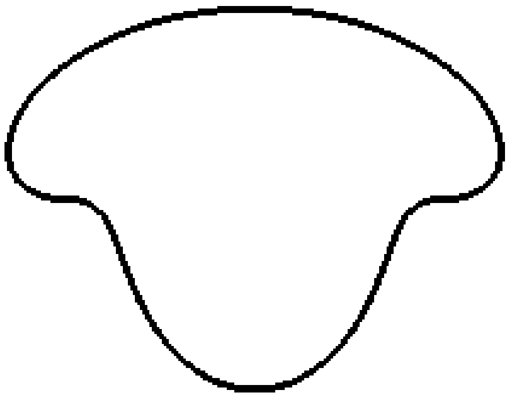


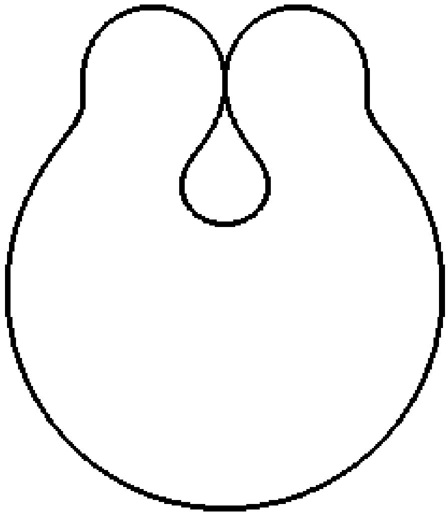


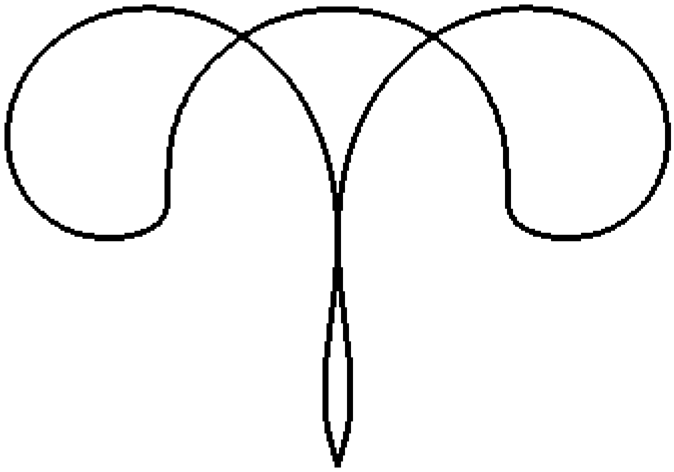


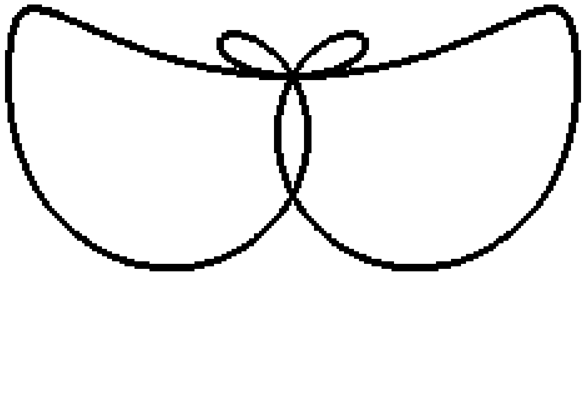


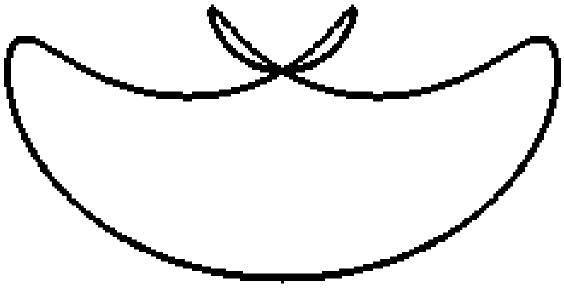


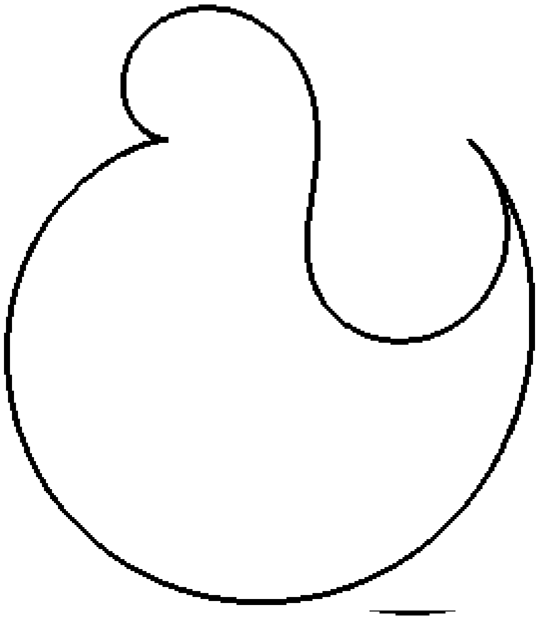


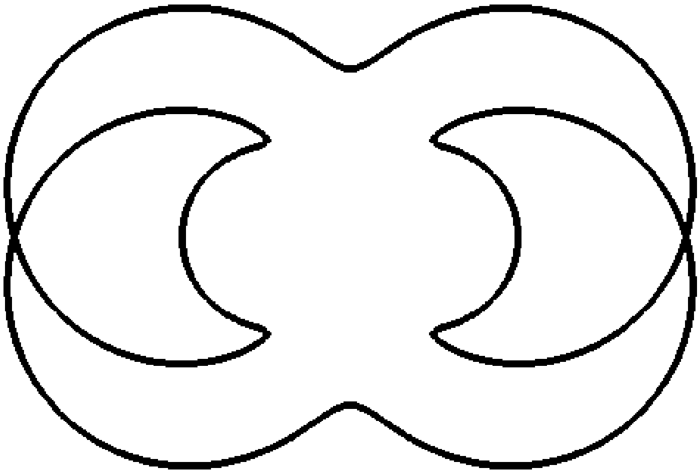












Referencias bibliográficas

Cámara Tecedor, S. (1945). *Elementos de Geometría Analítica*. 3ª edición. Madrid.

Rey Pastor, J.; Santaló, L. A.; Balanzat, M. (1955). *Geometría Analítica*. Kapelusz. Buenos Aires.