INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS. UN EJEMPLO EN LA ESO CON ALUMNOS DE UN PROGRAMA DE DIVERSIFICACIÓN CURRICULAR

Eligia Domínguez Santana
Josefa Hernández Domínguez
María Muñoz Pérez
M.ª Mercedes Palarea Medina
Raquel Ruano Barrera
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se describe la experiencia realizada con alumnos de 4º de la ESO incluidos en el Programa de Diversificación Curricular que estudian los números enteros y las expresiones algebraicas utilizando el material didáctico "Puzzle Algebraico", como un registro analógico. Se presenta también el análisis de las producciones de un alumno en el pretest, postest, tareas de clase y entrevistas, con el fin de estudiar los significados personales que da a los números enteros y a las expresiones algebraicas y de valorar la secuencia de ejercicios que proponemos en formato de fichas.

El estudio es parte del trabajo que realizan los miembros del Seminario de Investigación e Innovación Matemática para Secundaria de la Universidad de La Laguna sobre el material didáctico: "Puzzle Algebraico".

Abstract

In this article, an experimental study carried out on four year old students of ESO is described. They are included in a Curricular Diversification Program and they study the integer numbers and the algebraic expressions using the teaching material known as "Algebraic Puzzle", as an analogical register. We also show the analysis of the productions of one of the students in the pretest, postest, diary tasks during the lessons and the interviews, in order to study the personal meanings that the student gives to the integer numbers and to the algebraic expressions and to value the sequence of exercises that we propose in the worksheets.

This study is part of the research developed by the members of the Seminar of Mathematical Research and Innovation for Secondary Education of the University of La Laguna about the teaching material known as "Algebraic Puzzle ".

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIII
E. Domínguez; J. Hernández; M. Muñoz; M. Palarea; R. Ruano; M. Socas (2007). *Investigación e innovación en el aula de matemáticas. Un ejemplo en la ESO con alumnos de un programa de diversificación curricular, pp. 105-134*

Introducción

El Seminario de Investigación e Innovación Matemática para Secundaria de la Universidad de La Laguna ha llevado a cabo diferentes experiencias didácticas en la ESO, utilizando el Puzzle Algebraico como un material didáctico que pretende ser un buen modelo de representación semiótica autosuficiente para los objetos matemáticos: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales y de segundo grado y otras cuestiones algebraicas elementales (Domínguez y otros, 2006).

En Domínguez y otros (2004), se presenta y analiza una de estas experiencias. Los resultados obtenidos permiten establecer una clasificación de los errores cometidos por los alumnos y analizar los significados que éstos dan a los números enteros y a las expresiones algebraicas. En Muñoz, Ruano y Socas (2005), se presenta el estudio biográfico de una alumna de 2º de ESO y se analizan sus producciones en el pretest, postest, tareas de clase y entrevistas, con el fin de conocer los significados personales que da a los números enteros y a las expresiones algebraicas, un estudio de los errores que la alumna comete y un procedimiento para determinar las causas y el origen de estos errores.

En este estudio se toman de nuevo en consideración las cantidades numéricas positivas y negativas y las expresiones algebraicas elementales, utilizando el Puzzle Algebraico, como un registro analógico de los contenidos matemáticos anteriores. Sin embargo, en este trabajo la población estudiada es un grupo de alumnos de 4º de la ESO y pertenecen al Programa de Diversificación Curricular del IES Puerto de la Cruz (Tenerife) del curso 2005-2006. Son alumnos que presentan algún tipo de dificultad en el aprendizaje, en expresión y comprensión escrita, falta de hábitos de trabajo, y hay que colaborar con ellos para atender la diversidad del grupo, para motivarles y para que realicen las tareas.

Conviene resaltar, igualmente, que esta experiencia se realizó utilizando una versión más elaborada de la Guía del Puzzle Algebraico, y que esta versión surge como resultado de los trabajos anteriormente referenciados y de otros, también realizados en el marco del Seminario sobre el Puzzle Algebraico. Se trata de una organización más completa de la Guía del Puzzle, con un nuevo conjunto de fichas que permiten al alumno un trabajo individualizado y que sugiere un modelo de actuación, pensado y experimentado para su uso por parte del profesorado (Domínguez y otros, 2007).

Los contenidos pre-algebraicos y algebraicos tratados en esta experiencia, números enteros y expresiones algebraicas, forman parte del Programa de Diversificación Curricular; no obstante, debemos indicar que el estudio de estos contenidos supone para los alumnos una fuente constante de errores que en numerosas ocasiones les impide seguir avanzando en el camino de las Matemáticas (Domínguez y otros, 2004; Muñoz, Ruano y Socas, 2005).

El Puzzle Algebraico se ha descrito en anteriores trabajos en los que se ha utilizado como una representación analógica de los objetos algebraicos, y se han observado las ventajas y los inconvenientes que se dan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos tópicos.

A modo de resumen, el Puzzle Algebraico está formado por 132 fichas que se distribuyen en 13 piezas de diferentes colores (azul claro y azul oscuro), dimensiones y signos. Es una representación semiótica de carácter bidimensional, no paradigmática, basada en la noción de magnitud orientada que permite abordar el tratamiento de los objetos algebraicos propios de la Educación Secundaria Obligatoria. Esta representación analógica respeta el principio de extensión algebraica, especialmente, la regla de los paréntesis, y en la que la operación de restar se aborda desde dos perspectivas: la resta como acción de quitar (formación de ceros, ceros relativos,…) y la resta como suma del opuesto; y la regla de los signos, lo que permite, en consecuencia, la formación de rectángulos.

Por último, esta convivencia sin contradicciones entre las cantidades positivas y negativas permite extender diferentes aspectos del Álgebra geométrica griega, y llegar hasta la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Como hemos comentado, en el marco del Seminario, el Puzzle Algebraico ha sido objeto de investigación y desarrollo y se han elaborado y organizado un nuevo conjunto de fichas de trabajo que permiten al alumno realizar un trabajo individualizado y sugiere un modelo de actuación, pensado y experimentado para su uso por parte del profesorado. El nuevo documento guía consta de dos tipos fundamentales de fichas: el primero, es el que hemos denominado fichas guiadas que plantean a los alumnos actividades parcialmente resueltas, y en el segundo tipo de fichas, actividades sin guiar, ponen en práctica sus conocimientos.

Sin embargo, conviene señalar que el Puzzle no constituye una propuesta de enseñanza predeterminada, sino que es una representación más del objeto algebraico que se quiere estudiar, y que puede ser utilizado con cualquier método, y bajo cualquier concepción que se tenga de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra.

En este sentido, es un material idóneo para atender las necesidades del aula ante la heterogeneidad de los alumnos y desarrollar estrategias de enseñanza que les permite ser autónomos en el proceso de aprendizaje, en la construcción mental de los objetos matemáticos. Al mismo tiempo permite al profesor dirigir este proceso tomando decisiones individuales para cada alumno acerca de la oportunidad de pasar a la siguiente página, introducir nuevos ejercicios…

En este trabajo se presenta, por un lado, el estudio global de los alumnos del Programa de Diversificación Curricular y, por otro, el estudio más detallado de un alumno del grupo. En el primer caso, se presentan los resultados globales y en el segundo se analizan las producciones del alumno en las diferentes tareas: pretest, postest, tareas de clase y entrevistas, seleccionando para ello algunas de las actividades propuestas que se adjuntan como Anexo.

Concretamente, los objetivos del trabajo son:

- Analizar los resultados obtenidos por el grupo de alumnos en términos de pretest y postest.
- Analizar las elaboraciones de un alumno, y estudiar la evolución de las producciones obtenidas en el pretest, postest, tareas de clase y entrevista.
- Valorar la experiencia didáctica seguida para los números enteros y las expresiones algebraicas elementales usando el Puzzle Algebraico mediante un proceso de enseñanza y aprendizaje, basado en el uso de las nuevas fichas de actividades propuestas.

Marco Teórico

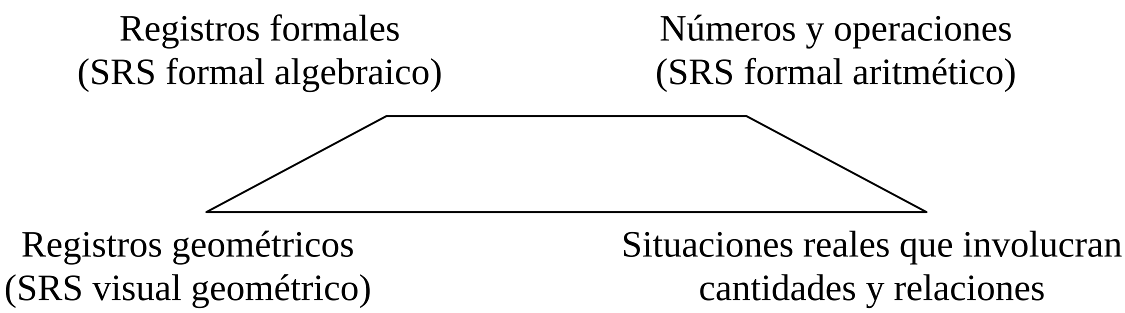
Los fundamentos teóricos en los que se basa nuestra investigación los indicamos a continuación.

Por un lado, tenemos el material didáctico Puzzle Algebraico y el papel que desempeña como sistema de representación para los objetos algebraicos. Podemos decir que los materiales didácticos se han utilizado en la clase de Matemáticas en un marco innovador, como mejora de la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina y que en la actualidad existe un gran interés tanto por los mediadores tecnológicos como por los materiales concretos con fines didácticos, debido a la diversidad cognitiva que nos encontramos en el aula.

En el trabajo con materiales didácticos, partimos del supuesto de que para que un material didáctico se constituya como un mediador que facilite la comprensión conceptual y de procedimiento de un objeto matemático en el alumno, debe usarse como una representación semiótica autosuficiente del objeto matemático (Socas, 1999).

En segundo lugar, mencionamos la propuesta de enseñanza y aprendizaje. Ésta se sustenta en la idea de que el uso correcto de, al menos dos representaciones, una analógica y otra digital, en términos de reconocimiento, transformaciones, conversiones y coordinación, entre representaciones de un objeto matemático, permite al alumno construir imágenes mentales adecuadas de dicho objeto (Socas, 2001).

De esta manera la propuesta de enseñanza y aprendizaje del Lenguaje Algebraico se puede resumir de la siguiente forma:



Se trata de modelizar en un esquema los dos caminos seguidos para construir los registros formales del Álgebra. Éstos parten de situaciones reales que involucran cantidades y relaciones numéricas o de magnitudes, para, a partir de ellas, llegar a los registros formales por registros geométricos (Puzzle Algebraico) de naturaleza analógica, y mediante situaciones que permiten desarrollar los procesos de sustitución formal, generalización o modelización, en las operaciones o estructuras numéricas.

Como se puede observar, la propuesta amplía las fuentes de significado para el Lenguaje Algebraico con representaciones de procedencia analógica y visual, en los ámbitos numérico y geométrico, tal y como se describen en Palarea y Socas (1994a y 1994b).

En esta experiencia se utiliza como representación visual analógica el Puzzle Algebraico y, como registro digital, las representaciones formales del Álgebra recogidas en el texto de Matemáticas desarrollado para la adaptación curricular.

Las actividades relativas al registro visual analógico Puzzle Algebraico, se toman, como hemos indicado, de la nueva versión de la Guía del "Puzzle Algebraico" (Domínguez y otros, 2007), texto que aporta nuevas actividades y sugerencias didácticas para su uso en el contexto escolar.

En tercer lugar, consideramos las dificultades y errores de los alumnos al trabajar con números enteros y expresiones algebraicas elementales. Tomaremos como referencia el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: obstáculos, ausencia de sentido y actitudes afectivas.

Metodología

La experiencia didáctica sigue las pautas de experiencias anteriores que se han ido desarrollando en el marco del Seminario. Éstas se desarrollan siguiendo un modelo de diseño preexperimental con pretest-postest con intervención, en un primer momento, de un mediador curricular como el Puzzle Algebraico, para continuar avanzando luego con el libro de texto y estudiar su conexión con las representaciones generadas por el material didáctico.

Describimos brevemente los pasos seguidos. Se administró un test elaborado a partir del cuestionario de Palarea (1998) en el que se seleccionaron las actividades más adecuadas para que su resolución pudiera llevarse a cabo con el Puzzle Algebraico, y se incluyeron algunas otras actividades elaboradas para la ocasión. En él se incluyen, operaciones con números enteros, expresiones algebraicas elementales y operaciones (sumas, restas y multiplicaciones), cuestiones relacionadas con el área y el perímetro de figuras geométricas planas sencillas, ecuaciones de primer grado y actividades de sistemas de ecuaciones, además de algún problema. El cuestionario nos permite, por una parte, analizar el conocimiento previo de los alumnos sobre dichos conceptos y, por otra, medir el progreso que realizan. También pretendemos extraer información del efecto causado por los diferentes mediadores que intervienen en el proceso de enseñanza/aprendizaje, especialmente del Puzzle Algebraico. Como Anexo, al final de este artículo se añaden las nueve primeras cuestiones del test con sus cincuenta ítems.

Juntos con el pretest y postest se usan otros instrumentos de recogida de información: diario de observaciones, producciones de los alumnos y entrevistas audiograbadas.

La experiencia se llevó a cabo en el curso 2005-2006 en el IES "Puerto de la Cruz" (Tenerife) con 8 alumnos de 4º de ESO, incluidos en el Programa de Diversificación Curricular; como hemos dicho se utilizó el Puzzle Algebraico como una representación semiótica de los contenidos algebraicos, números enteros y expresiones algebraicas.

Como ya hemos señalado la experiencia se realizó con alumnos de 4º de la ESO del Programa de Diversificación Curricular, con un determinado perfil. El de nuestros alumnos se puede concretar en que presentan, en general, dificultades en el aprendizaje, no tienen hábitos de trabajo, tienen dificultades en expresión y comprensión escrita y en la realización de las tareas o ejercicios que se les proponen, por lo que hay que ayudarles y facilitarles su realización. A pesar de ser alumnos del último curso de la

ESO en el que los contenidos tratados corresponden curricularmente a cursos anteriores, se valoró que el uso del Puzzle Algebraico como representación analógica de los objetos matemáticos: números enteros y expresiones algebraicas, podría generar una mayor motivación y atender a su diversidad, así como evaluar los efectos de este material didáctico. En este grupo se diversifica el currículo, de manera que una de las materias que cursan es el Ámbito Científico-Tecnológico, en la que se imparten conceptos de Ciencias de la Naturaleza y de Matemáticas. Mientras duró la experiencia sólo se trataron conceptos matemáticos. El número de clases, seis horas a la semana, se agrupó en dos horas en determinados días.

La experiencia didáctica se desarrolló durante tres semanas y media, desde el 9 de enero de 2006 hasta el 31 del mismo mes. Durante ese período, los conceptos tratados con el Puzzle Algebraico fueron: operaciones con números enteros, expresiones algebraicas y operaciones con ellas, valor numérico de una expresión algebraica e iniciación a las ecuaciones.

En la primera sesión de la experiencia se aplicó la primera parte del test que se finalizó en la primera hora de la siguiente sesión. Durante la segunda hora de la clase del día 10 de enero se introdujo el Puzzle Algebraico para que se fueran familiarizando con él. Se comenzó con las fichas de trabajo de números enteros, actividades que seleccionamos de la Unidad de Aprendizaje diseñada para esta experiencia. Cuando los alumnos acabaron las fichas de trabajo relativas a números enteros ya tenían cierta soltura con el Puzzle, y se inició el trabajo con expresiones algebraicas (16 de enero), hasta finalizar con las fichas previstas. Se continuó con el estudio del valor numérico de ciertas expresiones para pasar a trabajar las ecuaciones aunque, a partir de este momento, se realizó sin el uso del Puzzle Algebraico.

Los números enteros habían sido estudiados con anterioridad por los alumnos, pero se decidió comenzar con la secuencia diseñada de estas actividades para que se familiarizaran con el uso del Puzzle.

En el desarrollo de las clases de Matemáticas los alumnos usaron el material diseñado para el grupo de diversificación curricular, cuaderno en el que realizaban los ejercicios y tomaban notas, y fichas de trabajo y, en esta ocasión, el recurso del Puzzle Algebraico, que les permitió resolver las actividades matemáticas manipulando el material y representarlas. Las clases comenzaban recordando lo trabajado el día anterior y corrigiendo los ejercicios que habían quedado pendientes; revisando algunas cuestiones sobre el manejo del Puzzle, para continuar con las nuevas actividades, de modo que cada alumno trabajara a su ritmo. Anotaban en sus cuadernos los nuevos conceptos aprendidos y los resultados de cada ejercicio, incluida la representación gráfica de lo trabajado con el Puzzle. Se les sugirió que primero obtuviesen el resultado manipulando el Puzzle y luego plasmaran esa representación.

El postest se realizó una semana después de la experiencia y sirvió como control para evaluar las competencias numérico-algebraicas de los alumnos. Se les administró, también, en dos sesiones: una primera hasta ecuaciones y una segunda, para el resto de los contenidos.

Como hemos indicado, además de recoger la información mediante los test inicial y final, se diseñaron instrumentos para llevar a cabo el análisis cualitativo en la investigación, tales como el diario de observaciones, las producciones de los alumnos y las entrevistas audiograbadas; todos ellos nos facilitaron el estudio y nos ayudaron a realizar un análisis de carácter descriptivo-interpretativo, centrado más en el proceso y no únicamente en los resultados iniciales y finales.

Para este estudio se tomaron en consideración algunos de los alumnos dentro de su propio contexto de ubicación, con la finalidad de reflejar la situación de manera más completa y profunda mediante la descripción de la multiplicidad de dimensiones presentes en él, pero considerada como un todo, sin dejar de enfatizar los detalles y circunstancias específicas que se dan en ella (Cohen y Manion, 1990).

Se realizaron entrevistas a ocho alumnos, de las que se seleccionaron tres, una de un alumno de nivel bajo y dos de nivel medio. Esta elección se hizo en función de los resultados del pretest y postest, de la disposición en la clase de Matemáticas, del interés en realizar las entrevistas y de las notas obtenidas en dicha materia.

El protocolo de las entrevistas fue elaborado a partir de una serie de actividades previamente seleccionadas del test pasado a los alumnos, antes y después de la experiencia, relativas a cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas y ecuaciones.

Se prepararon sesiones cuya duración fue, aproximadamente, de entre 40 y 50 minutos. En cada sesión se le pasaron al alumno las actividades correspondientes para que las resolviera y contestara.

Resultados y discusión

Presentamos y discutimos los resultados de la experiencia realizada. En primer lugar, se describe de forma muy resumida la propia experiencia realizada con los 8 alumnos de 4º de la ESO incluidos en el Programa de Diversificación Curricular y en segundo lugar, se presenta el estudio de un alumno y se analiza sus producciones en el pretest, postest, tareas de clase y entrevistas. La valoración de la secuencia de ejercicios que proponemos en formato de fichas se realizará en el último apartado, consideraciones finales.

Estudio del grupo

Los resultados globales de los 8 alumnos nos muestran que en general, las actividades 1 y 2 (ítems 1 - 18) relativas a números enteros no presentan grandes dificultades para los alumnos, y se observa cierta mejoría en los alumnos identificados como 1, 6, 7 y 8.

Veamos brevemente otros resultados: el alumno identificado como 1 mejora no sólo en las actividades relativas a números enteros sino también en las actividades de operaciones con expresiones algebraicas, ya que pasa de no contestar a contestarlas aunque, en algunos casos, erróneamente como ya se ha indicado. El alumno identificado como 2, mejora en la actividad 4 (ítems 21-32) de expresiones algebraicas y, sin embargo, muestra peores resultados en la actividad 5 (ítems 33-36) y en las que se refieren a expresiones algebraicas, y es el único de los ochos alumnos que no se atreve a dar una respuesta a la actividad 8 relativa al perímetro de figuras planas. El alumno 3 mejora notablemente en las actividades relativas a operaciones con expresiones algebraicas y continúa relativamente igual en el resto de las actividades. El alumno 4 mejora notablemente en las actividades relativas a operaciones con expresiones algebraicas; además intenta resolver, aunque en algunos casos mal, los ítems 33- 36 de la actividad 5, que había dejado sin contestar en el pretest. El alumno 5 mejora en las actividades relativas a operaciones con expresiones algebraicas, y contesta a los ítems 47- 50, de la actividad 9, sobre perímetros que había dejado sin contestar en el pretest, lo que nos indica una mayor confianza y seguridad en el trabajo con el Lenguaje algebraico. El alumno 6, deja sin contestar las actividades 4 y 5, sobre expresiones algebraicas, cuando en el pretest las había contestado; no sabemos las causas, aunque sí hemos de señalar que este alumno mejora en las actividades relativas a ecuaciones, que no estamos analizando de forma explícita. El alumno 7 mejora notablemente en casi todas las actividades, especialmente en las 4 y 5, y también en las relativas al uso de las expresiones algebraicas en contextos geométricos. Por último, el alumno 8 contesta a todos los ítems que había dejado sin contestar, en muchos casos sin dificultad, aunque presenta algunas de ellas en las actividades relativas a ecuaciones.

Como resumen, podemos señalar, que los alumnos, no tuvieron dificultades, en general, ni en el pretest ni en el postest, en relación con las operaciones con números enteros; sobre las operaciones con expresiones algebraicas, hay que destacar que sólo el alumno 6 deja de contestar algunos ítems, y el resto mejora. Se observa, también, mejores resultados en el uso de las expresiones algebraicas en contextos geométricos, aunque varios alumnos muestran algunas dificultades a la hora de expresar situaciones geométricas mediante expresiones algebraicas.

Estudio de un alumno

Mostramos a continuación, a título de ejemplo, datos relativos al alumno de nivel medio que hemos identificado como 1. Como hemos indicado en los datos sobre el estudio del Grupo, en este alumno se observa una cierta mejoría en las actividades 1 y 2 (ítems 1 - 18) relativas a números enteros. Igualmente, el alumno mejora también en las actividades de operaciones con expresiones algebraicas, ya que pasa de no contestar a contestarlas, aunque en algunos casos erróneamente.

Analizamos ahora, con más detalles, algunas de sus producciones. Comenzamos, con una comparación entre el pretest y postest, para pasar, posteriormente, al análisis de la entrevista de este alumno.

Se trata de un alumno que tiene problemas en el aprendizaje, carece de hábitos de estudio y tiene pendiente las Matemáticas del curso anterior. Sin embargo, durante el período de instrucción mostró mucho interés por el uso del Puzzle Algebraico, ya que observaba que podía resolver las distintas actividades sin demasiada dificultad. Vemos, por ejemplo, que las actividades del postest, las realiza con la ayuda de la representación del Puzzle.

Actividad 1 del postest:

1. Realiza las siguientes operaciones:

$\boxed{1}$ a) (+5) + (-20) =

$\boxed{2}$ b) (-2) · (-3) =

$\boxed{3}$ c) (-2) · (+5) =

$\boxed{4}$ d) (+24) : (-6) =

$\boxed{5}$ e) (+4) - (+2) =

$\boxed{6}$ f) (+2) - (-3) =

$\boxed{7}$ g) (-9) + 3 =

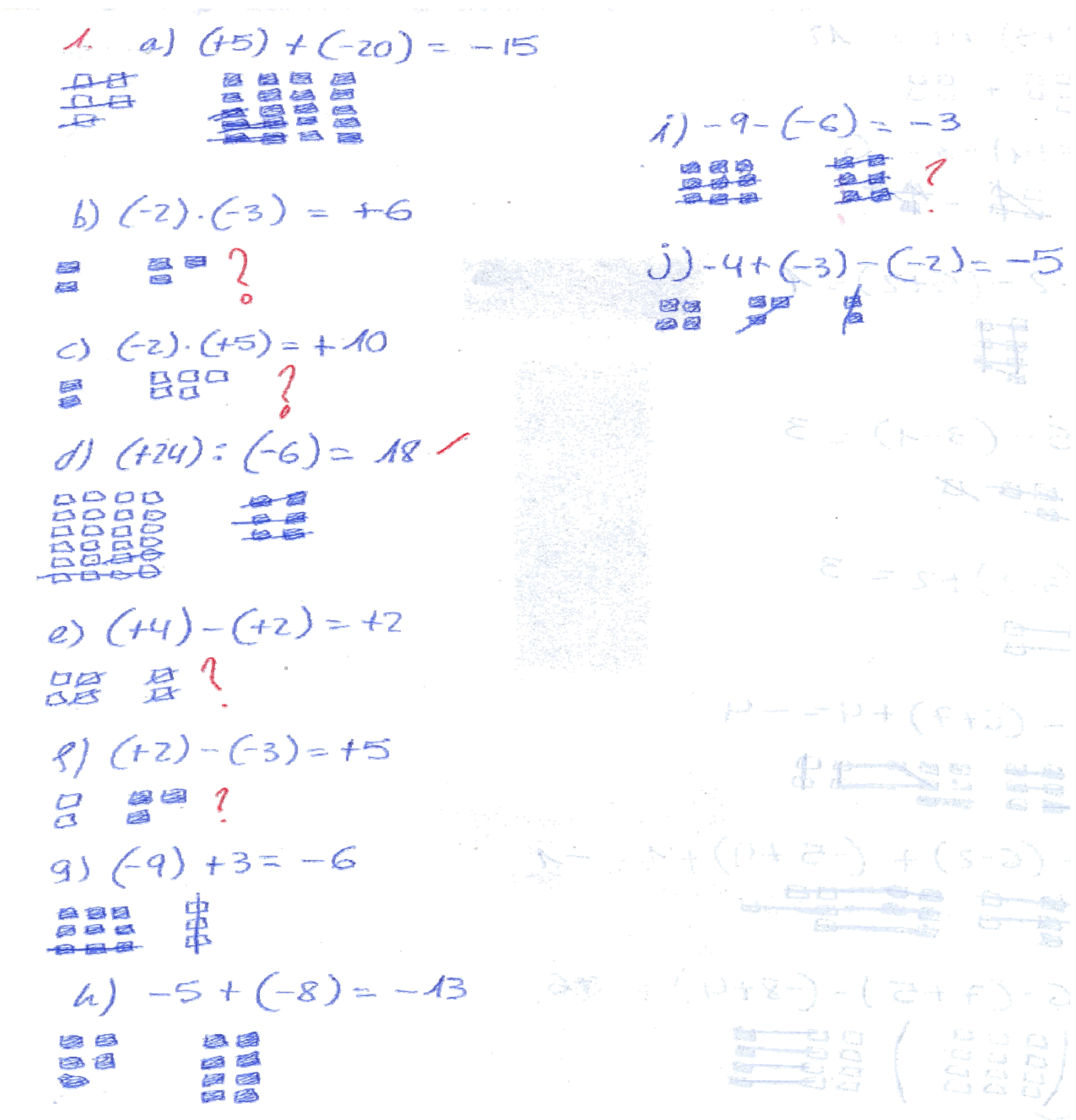
$\boxed{8}$ h) –5 + (-8) =

$\boxed{9}$ i) -9 - (-6) =

$\boxed{10}$ j) –4 + (-3) - (-2) =

En esta actividad realiza todas las operaciones, y comete sólo dos errores debido a que utiliza mal la regla de los signos y, en el ítem 4 confunde la división con una resta:

A continuación se muestran algunas producciones del alumno.

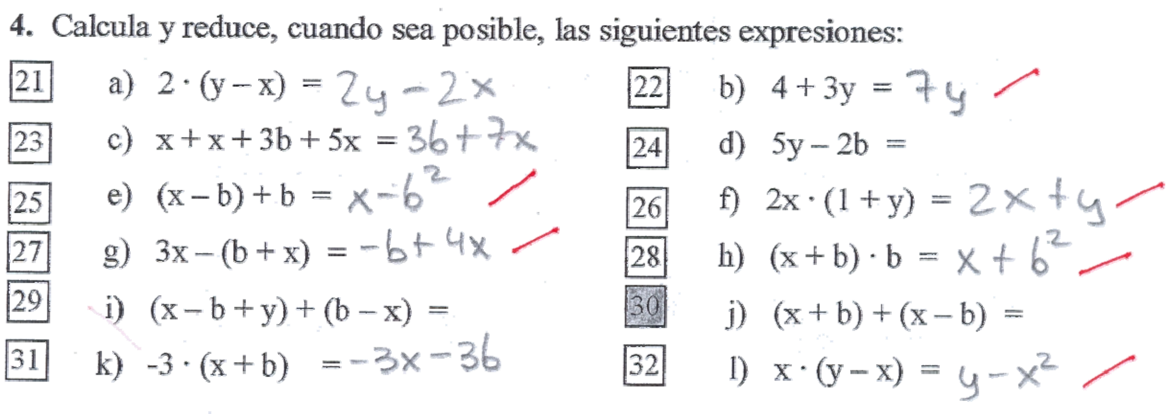


Se pone de manifiesto el uso de la representación gráfica del Puzzle Algebraico para resolver los distintos ítems. En general el alumno resuelve con él, sin dificultad, todos los ítems de sumas y restas con números enteros e intenta hacer lo mismo con la multiplicación y división, pero sin éxito.

Por esta razón, en la entrevista no se incluyeron estas actividades, ya que se observó que el alumno no tenía dificultades con las mismas.

En relación con los ejercicios de expresiones algebraicas, ítems 21-36, 41-44 y 47-50, observamos que mejora entre el pretest y el postest, considerando que los ítems del 41 al 44 en el pretest no los contestan o los contesta mal, y en el postest sí, aunque, en algunos casos, también comete errores. Los ítems del 47 – 50 no los contesta en el pretest y sí en el postest.

Por ejemplo, los ítems 21-32, de la pregunta 4 los resuelve en el pretest de la siguiente manera:

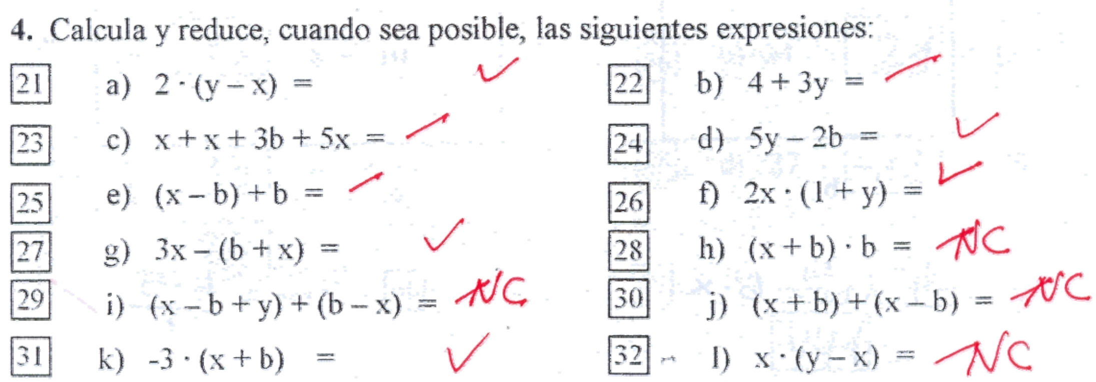


4. Calcula y reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones:

21 a) $2 \cdot (y - x) = 2y - 2x$	22 b) $4 + 3y = 7y$
23 c) $x + x + 3b + 5x = 3b + 7x$	24 d) $5y - 2b =$
25 e) $(x - b) + b = x - b^2$	26 f) $2x \cdot (1 + y) = 2x + y$
27 g) $3x - (b + x) = -b + 4x$	28 h) $(x + b) \cdot b = x + b^2$
29 i) $(x - b + y) + (b - x) =$	30 j) $(x + b) + (x - b) =$
31 k) $-3 \cdot (x + b) = -3x - 3b$	32 l) $x \cdot (y - x) = y - x^2$

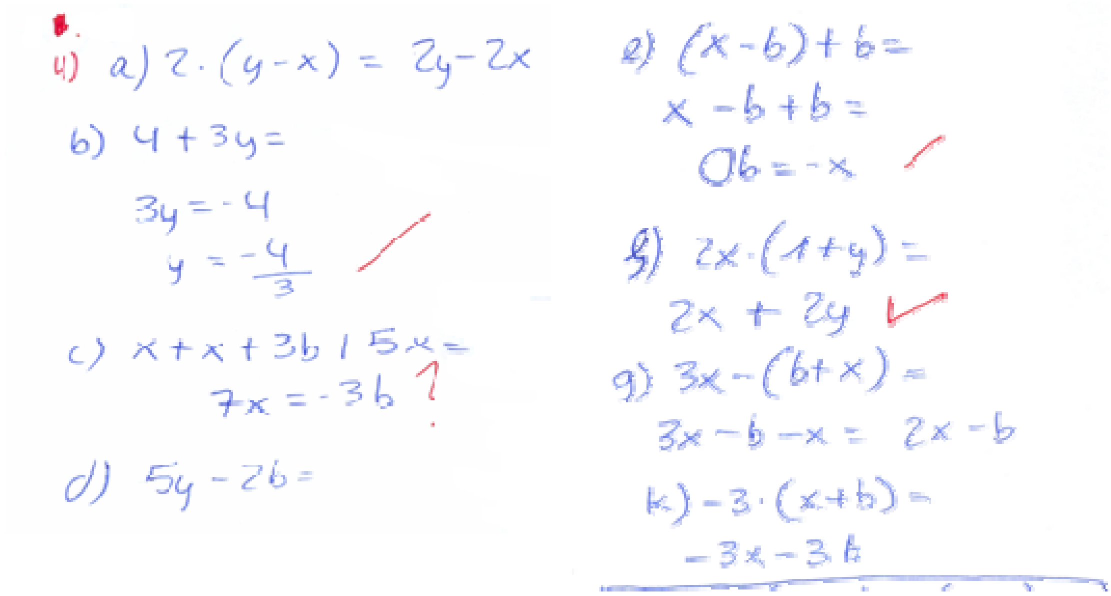
Vemos como el alumno realiza con éxito tres apartados, deja tres sin contestar y el resto los hace mal. Si nos fijamos en los tres apartados (26, 28 y 32) que son relativos a multiplicaciones los resuelve mal, ya que sólo multiplica por uno de los términos del paréntesis, en concreto por el que tiene la misma letra. En el ítem 25 confunde la suma con una multiplicación, en el 27 no distribuye el signo menos dentro del paréntesis y en el 22 tiene el problema de no aceptar la falta de clausura.

Si ahora, observamos el postest, vemos que el alumno mejora en los ítems 24, 26 y 27 y falla en los ítems 23 y 28, en los que interpreta la operación de expresiones algebraicas como una ecuación y así los resuelve.



4. Calcula y reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones:

21 a) $2 \cdot (y - x) =$	22 b) $4 + 3y =$
23 c) $x + x + 3b + 5x =$	24 d) $5y - 2b =$
25 e) $(x - b) + b =$	26 f) $2x \cdot (1 + y) =$
27 g) $3x - (b + x) =$	28 h) $(x + b) \cdot b =$ NC
29 i) $(x - b + y) + (b - x) =$ NC	30 j) $(x + b) + (x - b) =$ NC
31 k) $-3 \cdot (x + b) =$	32 l) $x \cdot (y - x) =$ NC


4) a) $2\cdot(y-x) = 2y-2x$

b) $4+3y=$

$3y=-4$

$y=\frac{-4}{3}$

c) $x+x+3b+5x=$

$7x=-3b$?

d) $5y-2b=$

e) $(x-b)+b=$

$x-b+b=$

$0b=-x$

f) $2x\cdot(1+y)=$

$2x+2y$

g) $3x-(b+x)=$

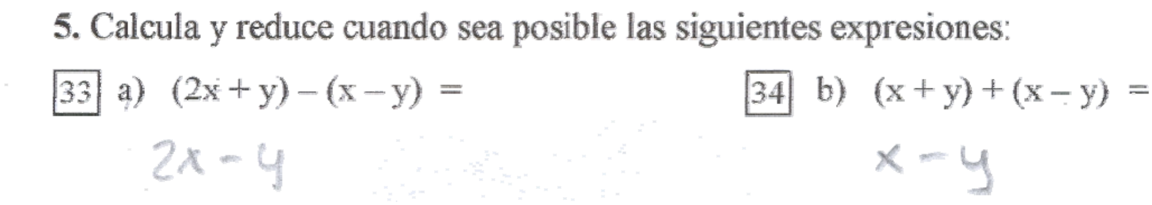
$3x-b-x= 2x-b$

h) $-3\cdot(x+b)=$

$-3x-3b$

En las entrevistas, como ya se ha comentado, se ponen algunos ítems del pretest y postest que nos permitirán obtener datos para estimar mejor el avance del alumno así como la influencia del Puzzle.

En los ítems 33 y 34 de la pregunta 5, observamos que realiza mal los dos apartados; sin embargo, conviene decir que en el postest no tuvo ningún fallo y los resolvió con la representación gráfica del Puzzle. Veamos a continuación un fragmento de la entrevista:


5. Calcula y reduce cuando sea posible las siguientes expresiones:

$\boxed{33}$ a) $(2x+y)-(x-y) =$ $2x-y$

$\boxed{34}$ b) $(x+y)+(x-y) =$ $x-y$

…

A: No, estoy multiplicando primero el segundo y luego éste con éste. Multipliqué el 2x con el “x” y el “y” con el …, sabes, multipliqué los signos + · - = - y, después, puse “y”.

E: ¿Con el ítem 34 hiciste lo mismo?

A: Sí.

E: Si te pongo este ejercicio, ¿cómo lo resolverías?

c) $2x+y-x+y$

$1x+2y$

d) $(2x+y)+x+y$

$2x+y+x+y$

$3x+2y$

e) $x+y-(2x+y)$

$x+y-2x-y$

$1x-0y$

A: ¿Lo hago directamente?

E: Vale, como tú creas, te pedía sumar o restar. ¿Cuál es la diferencia entre el ítem 33 y éste (apartado c)?

A: Oh, que… Yo creo que es el mismo, pero le quitaste los paréntesis.

E: Vale y en el apartado c) ¿tuviste que multiplicar?

A: No, en el c) al final no, ¿no?

E: No sé, pregunto, porque tú me dijiste que aquí (en el ítem 33), multiplicaste.

A: Yo aquí (ítem 33) multipliqué. Sí.

E: OK, y si dices que c) es lo mismo pero sin paréntesis, ¿se supone que tenías que haber multiplicado? o ¿no?

A: Entonces está mal el de arriba (ítem 33).

E: ¿Sí? ¿Por qué?

A: Porque si éste está bien así, pues será sumarlo en lugar de multiplicarlo.

E: ¿Y si te digo que los dos están bien?

A: ¿Éste y éste? (ítem 33 y apartado c)

E: ¿Sí?, ¿puede ser?

A: Puede ser, porque éste tiene paréntesis y el otro no. No sé.

E: Fíjate otra vez en el ítem 33, ¿qué pide? ¿Sumar, restar, multiplicar o dividir?

A: ¡Oh! Reducir.

E: Sí, calcula y reduce es lo que dice el ejercicio 5, ahora nos fijamos aquí (ítem 33).

A: Restar.

E: ¿Restar?

A: Quitarle al primero esto, será…

E: Vale, ¿y tú que hiciste?

A: Yo lo que hice fue multiplicar éste por éste… o sea, 2x por el x.

E: Vale, hacemos otro apartado.

E: ¿Para hacer estos ejercicios estás usando mentalmente las fichas del Puzzle o no?

A: No, directamente los que recordaba.

E: De acuerdo. Haz este otro.

A: Esto sería - 0 y, ¿se puede poner?

E: Sí.

A: $+ \cdot - = -$ y puse - 0 y.

Pasamos ahora a analizar los ítems 33- 44 del pretest.

En estas actividades del pretest el alumno tiene dificultad con las multiplicaciones, sólo realiza el ítem 41 en el que aparece un número multiplicando al paréntesis. Con respecto a las sumas y restas de expresiones algebraicas parece tener dificultad cuando hay un signo menos delante de un paréntesis, ya que no lo distribuye dentro.

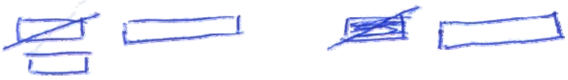
Conviene recordar que en el postest, el alumno resolvió las operaciones propuestas en la pregunta 5 de la siguiente manera:

5. Calcula y reduce cuando sea posible las siguientes expresiones:

$\boxed{33}$ a) $(2x + y) - (x - y) =$ $\boxed{34}$ b) $(x + y) + (x - y) =$

$\boxed{35}$ c) $2x + (x - y) =$ $\boxed{36}$ d) $(x + y) + 2y =$

5. a) $(2x+y)-(x-y) = 1x+2y$



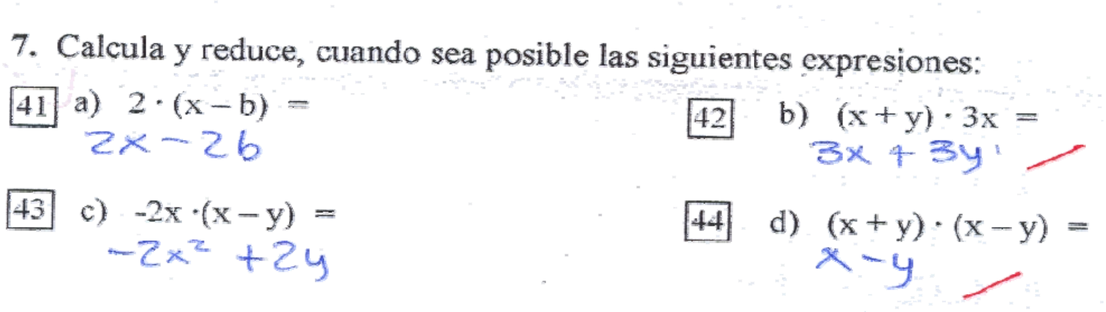
b) $(x+y)+(x-y) = 2x$

c) $2x + (x-y) = 3x-y$

d) $(x+y)+2y = x+3y$

El alumno realiza correctamente los ítems de la pregunta 5 con la representación gráfica del Puzzle y mejora en relación con el pretest.

En la actividad 7 de naturaleza multiplicativa (ítems 41-44) del postest, el alumno (1) mejora, ya que contesta aquellos ítems que no había contestado en el pretest y hace bien el ítem 43, que había tenido mal en el pretest.



7. Calcula y reduce, cuando sea posible las siguientes expresiones:

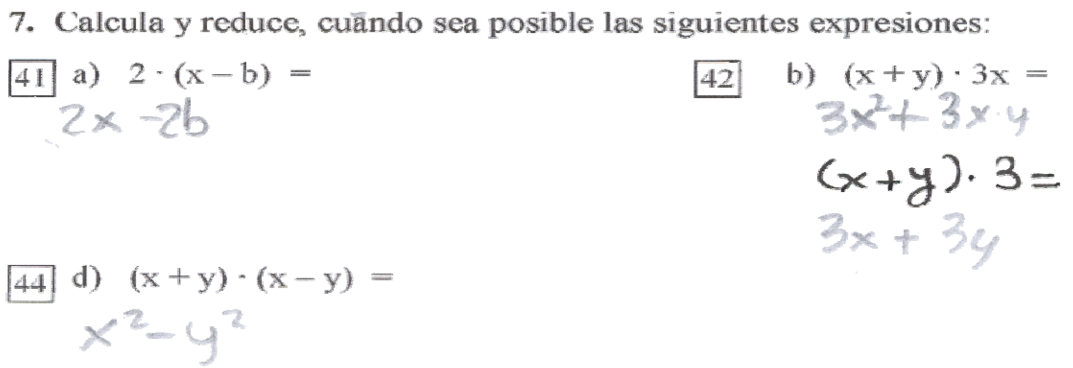
41 a) $2 \cdot (x - b) =$
$2x - 2b$

42 b) $(x + y) \cdot 3x =$
$3x + 3y$

43 c) $-2x \cdot (x - y) =$
$-2x^2 + 2y$

44 d) $(x + y) \cdot (x - y) =$
$x - y$

Analizamos, ahora, la actividad 7, por ejemplo, los ítems 41, 42 y 44, en la entrevista:



7. Calcula y reduce, cuando sea posible las siguientes expresiones:

41 a) $2 \cdot (x - b) =$
$2x - 2b$

42 b) $(x + y) \cdot 3x =$
$3x^2 + 3x \cdot y$
$(x + y) \cdot 3 =$
$3x + 3y$

44 d) $(x + y) \cdot (x - y) =$
$x^2 - y^2$

El alumno no tiene dificultad para realizar los ítems 41 y 44, pero en el ítem 42 duda sobre el resultado correcto. Veamos un fragmento de la entrevista.

…

E: Pasamos al ítem 42.

E: ¿Qué tienes que hacer ahí?

A: ¡Oh!, yo primero multipliqué esto por esto, o sea, el 3x por x y después no sé si poner +x o multiplico por el 3.

E: ¿Qué hiciste en el ítem 41?

A: Multipliqué el 2 por todo lo que está dentro del paréntesis.

E: Pues mira lo que tienes que hacer ahí.

A: Es que no sé si…, no sé si da 3x por y, o así…

E: ¿Qué crees?

A: Ni idea… Yo creo que 3x + y. No sé.

El alumno duda, no sabe qué hacer, así que se decide poner otra actividad del producto sin la x, (x + y) · 3 = El alumno la resuelve bien y a partir de ahí se le realizan preguntas que le permiten reflexionar sobre lo que ha hecho en el ítem 41 al compararlo con el nuevo ítem que se le ha puesto. Estas reflexiones hacen que el alumno sea capaz de llegar al resultado adecuado:

…

E: Bien ¿Y si yo te lo pongo de esta forma? ¿Sabrías hacerlo?

A: ¡Oh! así sí.

E: ¿Da el mismo resultado que en el ítem 42?

A: Lo mismo, pero sin la x.

E: Vale. Fíjate que en los dos apartados te ha dado 3x, pero en el ítem 42 era multiplicar por 3 x y aquí por 3.

A: Yo creo que puede ser así, pero ahora no sé si éste (ítem 42) puede ser x^2 o… No sé.

E: ¿Por qué?

A: Porque se multiplica x · x.

E: ¿Y x · x que da?

A: Um … x^2, ¿no?

E: De acuerdo, ¿entonces?

A: Entonces aquí va x^2 (ítem 42).

El alumno llega al resultado correcto en el ítem 42. La entrevistadora decide indagar sobre el uso que el alumno ha hecho y hace del Puzzle.

…

E: ¿Y en cuáles de estas preguntas usas el Puzzle?

A: Oh, yo que sé. En éste podría usarlo, pero no…

E: Pon un ejemplo en el que utilizarías la representación del Puzzle. Cuando lo usas ¿lo haces dibujando o sólo pensando en él?

A: A veces lo dibujo, y a veces…, cuando lo hacíamos en clase lo dibujaba.

E: Por ejemplo, el ítem 33 me dices que podrías haberlo hecho con el Puzzle, pero no lo hiciste porque sabías hacerlo, pero ¿pensaste en algún momento en el Puzzle?

A: No, pensar no, porque pensando no se me queda lo de las fichas, tendría que dibujarlas.

E: ¿Cuándo tienes alguna duda como lo de x^2?

A: Debería haberlo hecho con el Puzzle.

E: ¿Sí? ¿Por qué?

A: Oh, porque con el Puzzle sé que son…, sabes, lo hubiera visto más claro que es x^2.

E: Entonces, ¿por qué no recurres al Puzzle cuando tienes dudas? Recuerdas que yo les dije que el Puzzle era para este tipo de dudas.

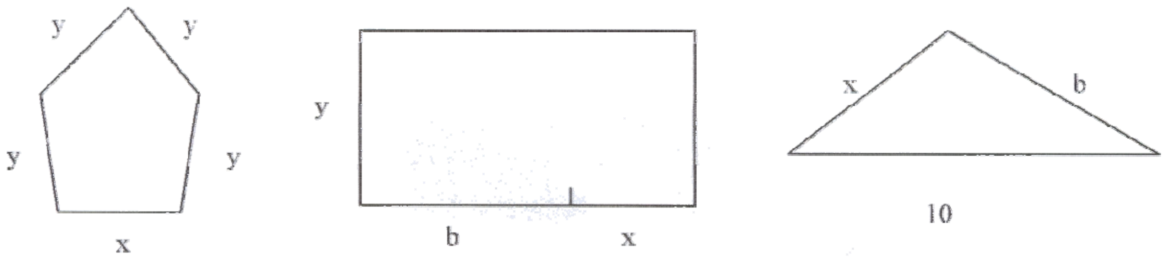
A: ¡Oh! yo pensaba que haciéndolo así lo tenía bien.

El alumno tiene la creencia de que pensar mentalmente en el Puzzle para un determinado ítem es resolverlo mentalmente y dar la respuesta, y no en pensar en la representación gráfica o apoyarse en ella como conversión de la representación formal algebraica.

Analizamos, finalmente, la actividad 9 relativa al perímetro de figuras planas, que el alumno (1) la deja sin resolver en el pretest y que sí se siente con seguridad para responder en el postest.

Su comportamiento en la entrevista es correcto respecto a las cuestiones planteadas. Sólo en el ítem 47, no sabe si debe poner y^4 o 4 y.

9. Sabiendo que el perímetro de un polígono se calcula sumando las longitudes de todos sus lados, ¿cómo expresarías el perímetro de cada una de las siguientes figuras?:



$\boxed{47}$ Perímetro = $x + y^4$
$x+y+y+y+y$

$\boxed{48}$ Perímetro = $(b+x)\cdot y$
$b+x+y+b+y$

$\boxed{50}$ Perímetro = $10+x+b$

Transcribimos, por último, el ítem 47.

…

A: Aquí (ítem 47) no se puede poner y^4, ni nada de eso, ¿no?

E: Empieza paso a paso.

A: Porque si no, aquí dice se suma todo y para no poner x + y + y + y + y.

E: Hazlo paso a paso.

E: Hasta aquí estaría bien (x + y + y + y + y). ¿Tú qué haces ahora? ¿Reducir todo esto?

A: Sí y poner así ($x + y^4$).

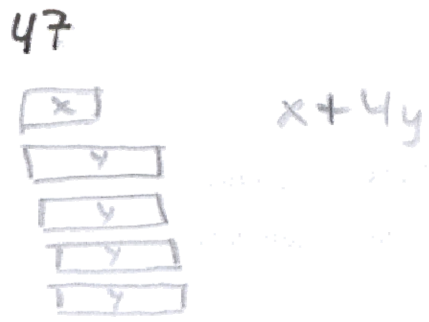
E: Vale. Yo te pido ahora otra cosa, que resuelvas este ítem 47 con el Puzzle Algebraico. Si no haces la representación gráfica piensa en el Puzzle.

A: ¿Lo dibujo con el Puzzle?

E: Esto que haz hecho con la representación gráfica del Puzzle, represéntalo algebraicamente.

A: ¿El qué?

E: El resultado



A: Sería 1x y 4y, el + no lo pondría.

E: Fíjate ahora, con las fichas del Puzzle te dio x + 4y y antes era $x + y^4$. ¿Cuál está bien?

A: La del Puzzle.

E: ¿Por qué?

A: Porque sumando las cuatro y da 4y y no “al cuadrado”.

El alumno (1) usa las representaciones del Puzzle sin dificultad y realiza las actividades con cierta seguridad, sin embargo no acepta fácilmente el material didáctico como una forma apropiada para pensar en los objetos matemáticos del Álgebra que está estudiando o repasando.

Consideraciones finales

En el desarrollo de las distintas sesiones se pudo observar que el alumnado en general, en el poco tiempo de la experiencia, manejaba sin dificultad y realizaba las actividades con el Puzzle Algebraico, sin embargo, no aceptó fácilmente el material didáctico como una forma apropiada para ellos de representación de los objetos matemáticos del Álgebra que se estaban estudiando o repasando. No obstante, en algunos casos, el uso del material didáctico, permitió afianzar y en otros, reconstruir ciertos aspectos algebraicos tratados.

De los resultados obtenidos y de la observación del aula, podemos afirmar que para estos alumnos de 16 o más años, que tenían cierta experiencia en el trabajo con números enteros y expresiones algebraicas, la presencia del material didáctico no lo consideraron seriamente como una representación adecuada de los objetos estudiados, sino más bien se convirtió en un "objeto más de estudio", que incorporaba la profesora a sus clases y, en consecuencia, es más valorado como un instrumento de juego que como una ayuda efectiva para estudiar las Matemáticas a su edad y que ya creían conocer.

Sin embargo, a pesar de estos inconvenientes y del tiempo limitado que el material se usó en la experiencia, podemos decir que, en general los alumnos:

- Han mejorado en muchos aspectos de los conceptos trabajados a lo largo de la experiencia, principalmente en operaciones con números enteros y expresiones algebraicas.

- Tenían confianza y seguridad en el Puzzle Algebraico, especialmente, en aquellas situaciones problemáticas en las que la profesora les sugería usar el Puzzle. Esta confianza y seguridad se mostraba en los resultados en los que valoraban más el resultado obtenido con la representación gráfica del Puzzle que el obtenido sin ella, cuando éstos no coincidían.

No obstante, los alumnos:

- No han utilizado de manera explícita las representaciones del Puzzle en todas las tareas propuestas, aún cuando éstas presentaban dificultades para ellos, sino en aquellas ocasiones que la profesora se lo sugería.

Los indicios de mejora obtenidos no son necesariamente atribuibles al trabajo con materiales didácticos como el Puzzle, especialmente con alumnos de edad tan avanzada y sin experiencias en el uso de otras representaciones de los objetos algebraicos que no sean los puramente formales. El material necesita, como ya hemos referenciado en otros trabajos, de un período de adaptación y de un uso no tan tardío para, posiblemente, obtener beneficios de su uso en el aprendizaje de las Matemáticas.

Referencias Bibliográficas

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Domínguez, E, Muñoz, M, Ruano, R. y Socas, M. M. (2004). Números enteros y expresiones algebraicas. Estudio Biográfico. *Formación del Profesorado* e *Investigación en Educación Matemática* 6, 107-134.

Domínguez, E.; Hernández, J.; Palarea, M. M.; Muñoz, M.; Ruano, R.; Socas, M. M. (2006). Investigación e innovación matemática. Un ejemplo: El puzzle algebraico. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, 2006, Monografía IV*, 59-77.

Domínguez, E.; Hernández, J.; Muñoz, M.; Palarea, M. M.; Ruano, R. y Socas, M. M. (2007). *Puzzle Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Muñoz, M., Ruano, R. y Socas, M. M. (2005). Números enteros y expresiones algebraicas en 2° de ESO. Experiencia Didáctica con el Puzzle Algebraico. *Formación del Profesorado* e *Investigación en Educación Matemática* 7, 299-320.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis Doctoral. Secretariado de Publicaciones. Universidad de La Laguna.

Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1994 a). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma,* 16, 91-98.

Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1994 b). Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignements-apprentissage de l'Algèbre scolaire. (12-16 ans). *Actas de la 46 CIEAEM* (vol. 2, pp. 111-119). Toulouse.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap. V, pp. 125-154). En L. Rico y otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (1999). Perspectivas de investigación en Pensamiento Algebraico. *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de*

Investigación en Educación Matemática, pp. 261-282. Valladolid: Diputación de Valladolid.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencias. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

ANEXO

1. Realiza las siguientes operaciones:

1	a) (+5) + (-20) =	2	b) (-2) · (-3) =
3	c) (-2) · (+5) =	4	d) (+24) : (-6) =
5	e) (+4) - (+2) =	6	f) (+2) - (-3) =
7	g) (-9) + 3 =	8	h) –5 + (-8) =
9	i) -9 - (-6) =	10	j) –4 + (-3) - (-2) =

2. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

11 a) (3 + 5) + 4 =

12 b) (5 + 4) – 3 =

13 c) 4 · 2 - (5 + 2) =

14 d) 5 - (3 - 1) =

15 e) (3 - 2) + 2 =

16 f) 5 - (6 + 7) + 4 =

17 g) 3 - (6 - 2) + (-5 + 4) + 1 =

18 h) 6 · (7 + 5) - (-8 + 4) =

3. 4 sumado a x se escribe x + 4,

19 a) ¿cómo se escribiría 4 sumado a 3x?

20 b) ¿cómo se escribirá 2x sumado a 5y?

4. Calcula y reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones:

21	a) 2 · (y – x) =	22	b) 4 + 3y =
23	c) x + x + 3b + 5x =	24	d) 5y – 2b =
25	e) (x – b) + b =	26	f) 2x · (1 + y) =
27	g) 3x – (b + x) =	28	h) (x + b) · b =
29	i) (x – b + y) + (b – x) =	30	j) (x + b) + (x – b) =
31	k) -3 · (x + b) =	32	l) x · (y – x) =

5. Calcula y reduce cuando sea posible las siguientes expresiones:

33	a) (2x + y) – (x – y) =	34	b) (x + y) + (x – y) =
35	c) 2x + (x – y) =	36	d) (x + y) + 2y =

6. Si x es un número cualquiera:

$\boxed{37}$ a) Escribe el número que es 3 más x.

$\boxed{38}$ b) Escribe el número que es 5 menos x.

$\boxed{39}$ c) Escribe el número que es dos veces tan grande como x.

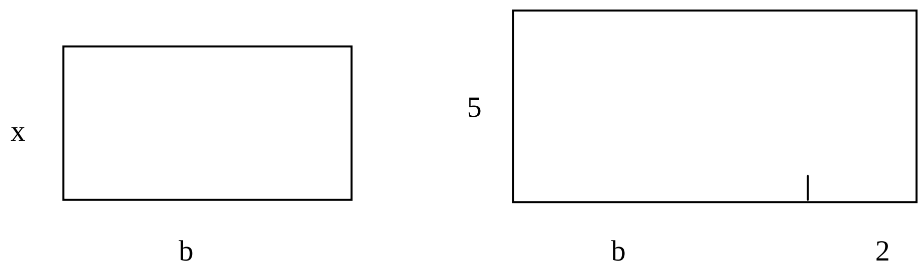
$\boxed{40}$ d) Escribe el número que es el 50% mayor que x.

7. Calcula y reduce, cuando sea posible las siguientes expresiones:

$\boxed{41}$ a) $2 \cdot (x - b) =$ $\boxed{42}$ b) $(x + y) \cdot 3x =$

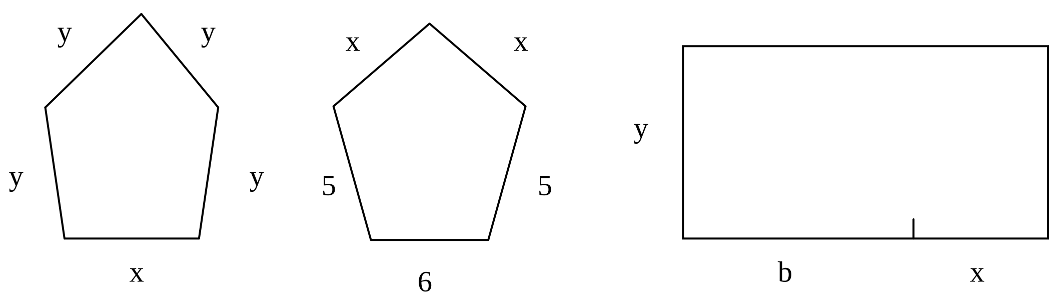
$\boxed{43}$ c) $-2x \cdot (x - y) =$ $\boxed{44}$ d) $(x + y) \cdot (x - y) =$

8. Sabiendo que el área de un rectángulo es base por altura, ¿cómo expresarías el área de las siguientes figuras?

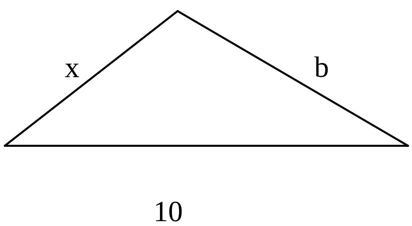


$\boxed{45}$ Área = $\boxed{46}$ Área =

9. Sabiendo que el perímetro de un polígono se calcula sumando las longitudes de todos sus lados, ¿cómo expresarías el perímetro de cada una de las siguientes figuras?:



$\boxed{47}$ Perímetro = ______ $\boxed{48}$ Perímetro = _______ $\boxed{49}$ Perímetro =



$\boxed{50}$ Perímetro = _______