



LUGARES GEOMÉTRICOS PINTORESCOS (2)

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Este trabajo es una prolongación de otro publicado en 2004 por la ULL con el mismo título. En primer lugar, estudiaremos, como habíamos prometido, la ecuación cartesiana de la montera. A continuación veremos otras curvas tales como la paleta, el casco de motorista, los ojos de un insecto, una nueva cardioide (que tiene forma de corazón), una perla barroca, etc.

Abstract

This paper is an enlargement of another one, published in 2004 by the ULL with the same title. Firstly, we will study, as we had promised, the Cartesian equation of the montera (bullfighter's cap). Immediately afterwards, we will see other curves such as the palette, the motorist's helmet, the eyes of an insect, a new cardioid (meaning heart-shaped), a baroque pearl, and so on.

Introducción

Cualquier punto, P, del plano que esté ligado a otro punto, M, que se mueve sobre una circunferencia, genera siempre una figura, que no es otra cosa que el lugar geométrico descrito por el punto P.

Tanto el Cabri II como el Geómetra nos permitirá conseguir alguna que otra figura que nos era desconocida hasta el momento de su hallazgo. Hay en realidad una especie de emoción ante lo que va a ocurrir, emoción que crece de intensidad si la figura obtenida, además de desconocida, tiene un cierto parecido con la silueta de un objeto real. Si además, determinamos su ecuación cartesiana o polar, y con otros programas, capaces de representar funciones implícitas, como el Matlab 6.1 o el Derive 5, se obtiene la misma figura facilitada por el Cabri o el Geómetra, podemos asegurar que se ha hecho un verdadero estudio de dicha figura. Ni que decir tiene, que todas las representaciones gráficas de las ecuaciones cartesianas, que figuran en este trabajo, han sido validadas con los programas citados.

Ecuación cartesiana de la montera

Aprovecharemos la herramienta *Coord. o Ecuación* del Cabri II Plus para tratar de determinar, si fuera posible, la ecuación cartesiana de la montera, de un modo muy sencillo.

Para ello, empezaremos con los ejes que nos facilita el Cabri, mediante la herramienta *Mostrar los ejes*, construiremos luego la figura en cuestión y le iremos dando valores enteros al radio de la circunferencia con **el** fin de conseguir, si fuera posible, coeficientes enteros para la ecuación cartesiana que nos da el Cabri. De esta manera evitaremos los errores que suelen ocasionarse cuando se colocan los ejes después de haber obtenido la figura.

Así, de acuerdo con la figura 1 y moviendo convenientemente con el ratón el punto E (o la circunferencia si el punto no se ha marcado en el eje OY), los coeficientes de la ecuación del lugar irán tomando los valores que siguen,

$$a = 1 \rightarrow x^4 + 4x^2y^2 + 3y^4 - 2x^2y - 10y^3 - 2x^2 + 12y^2 - 6y + 1 = 0,$$

$$a = 2 \rightarrow x^4 + 4x^2y^2 + 3y^4 - 4x^2y - 20y^3 - 8x^2 + 48y^2 - 48y + 16 = 0,$$

$$a = 3 \rightarrow x^4 + 4x^2y^2 + 3y^4 - 6x^2y - 30y^3 - 18x^2 + 108y^2 - 162y + 81 = 0,$$

$$a = 4 \rightarrow x^4 + 4x^2y^2 + 3y^4 - 8x^2y - 40y^3 - 32x^2 + 192y^2 - 384y + 256 = 0$$

Por tanto, la ecuación del lugar, en función del radio a , será

$$x^4 + 4x^2y^2 + 3y^4 - 2ax^2y - 10ay^3 - 2a^2x^2 + 12a^2y^2 - 6a^3y + a^4 = 0. \quad (1)$$

Estas x , y representan a las X , Y del punto P.

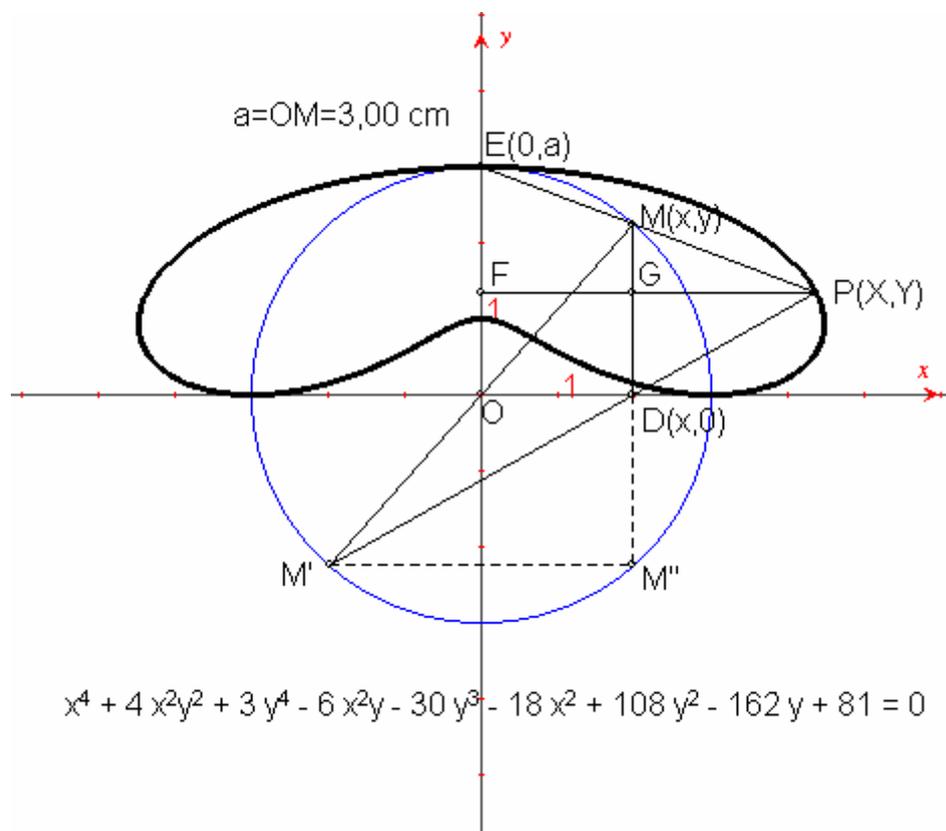


Fig. 1

Determinemos ahora, analíticamente, e independientemente del Cabri, la ecuación cartesiana de la curva para cualquier valor real y positivo de $OM = a$.

De los triángulos semejantes EFP y MGP, se deduce:

$$\frac{a-Y}{y-Y} = \frac{X}{X-x} \rightarrow \frac{a-y}{a-Y} = \frac{x}{X}, \text{ y de los DM'M'' y PGD, } \frac{Y}{y} = \frac{X-x}{2x}.$$

(Lógicamente, llegaremos a los mismos resultados mediante las ecuaciones de las rectas EP y M'P)

Eliminando x, y , entre estas dos relaciones y la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, se obtiene, después de un largo proceso, lo que sigue:

$$X^4 - (Y-a)^4 = -2(Y-a)\{2Y[X^2 + (Y-a)^2] + a[X^2 - (Y-a)^2]\} \quad (1 \text{ bis})$$

que coincide con la ecuación (1) una vez realizadas las operaciones pertinentes.

Por otro lado, como la ecuación no varía al cambiar X por $-X$ se demuestra que la curva que representa es simétrica respecto del eje OY, como puede observarse en la figura. También se observa que el primer miembro de (1) es un polinomio homogéneo en X, Y, a .

Paleta

Aprovecharemos, también, la herramienta *Inversión*, que nos proporciona el Cabri, para hallar la figura inversa de la montera.

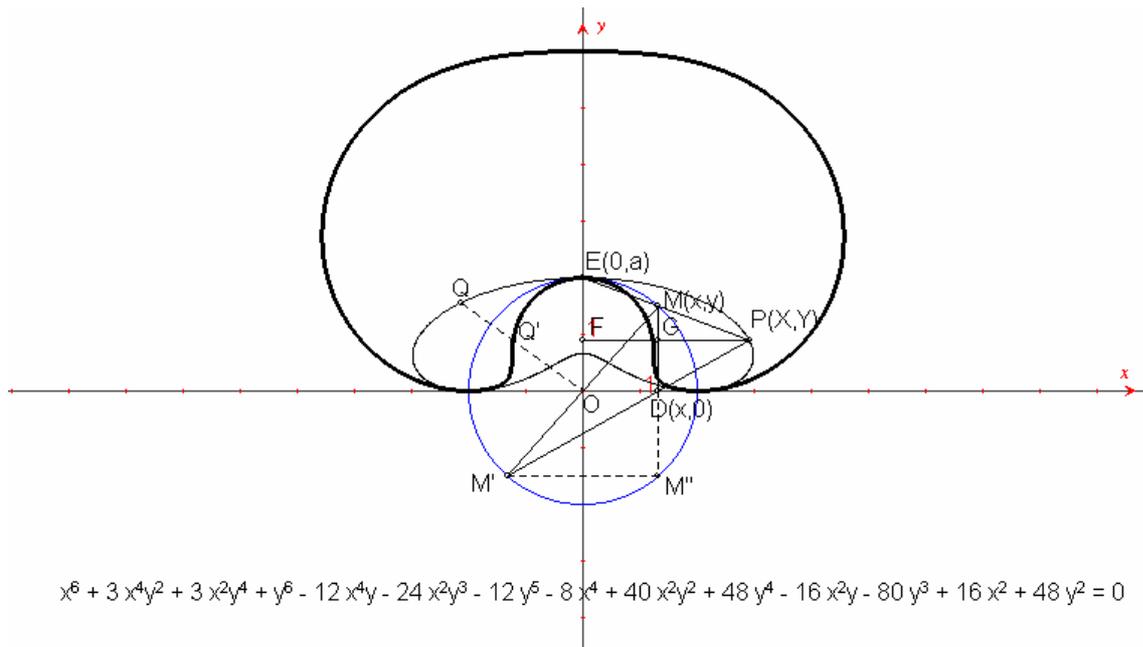


Fig. 2

En la figura 2 , el inverso del punto Q es Q'. Las distancias OQ y OQ' satisfacen la relación $OQ \times OQ' = \rho\rho' = a^2$ por la propia definición de inversión. Q' genera la paleta cuando Q se mueve sobre la montera.

Las coordenadas de los puntos $Q(x,y)$ y $Q'(x',y')$, alineados con O, satisfacen a las siguientes expresiones:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho^2}{\rho\rho'} = \frac{\rho\rho'}{\rho'^2}$$

de donde,
$$x = \frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2} \text{ e } y = \frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2}$$

Sustituyendo estos valores en (1), haciendo operaciones y suprimiendo las primas, queda, finalmente, para la ecuación cartesiana de la paleta,

$$(x^2 + y^2)^3 - 6ay(x^2 + y^2) - 2a^2(x^2 - 6y^2)(x^2 + y^2) - 2a^3y(x^2 + 5y^2) + a^4(x^2 + 3y^2) = 0. \tag{2}$$

En la figura 2 aparece, además, la ecuación (2) para $a=2$, facilitada por el Cabri.

Como puede observarse, la ecuación de la paleta es de orden 6, como se ha demostrado, y que, por otro lado, es el máximo orden que puede dar, por el momento, el Cabri.

Conviene advertir que no siempre el Cabri es capaz de dar la ecuación cartesiana de una curva de grado menor o igual que 6, pues algunas de las veces “contesta” diciendo que la curva no tiene una ecuación simple en coordenadas polares. Tampoco es posible que siempre los coeficientes tengan un valor entero, a pesar de ser entero a . Sin embargo, hay que reconocer que, pese a dichas restricciones, el avance obtenido por el Cabri II Plus, con la herramienta *Coord. o Ecuación*, ha sido, al menos, interesante.

Casco de motorista

En la figura 3, se representa la figura inversa del bicornio, cuya ecuación ha sido estudiada en un trabajo anterior

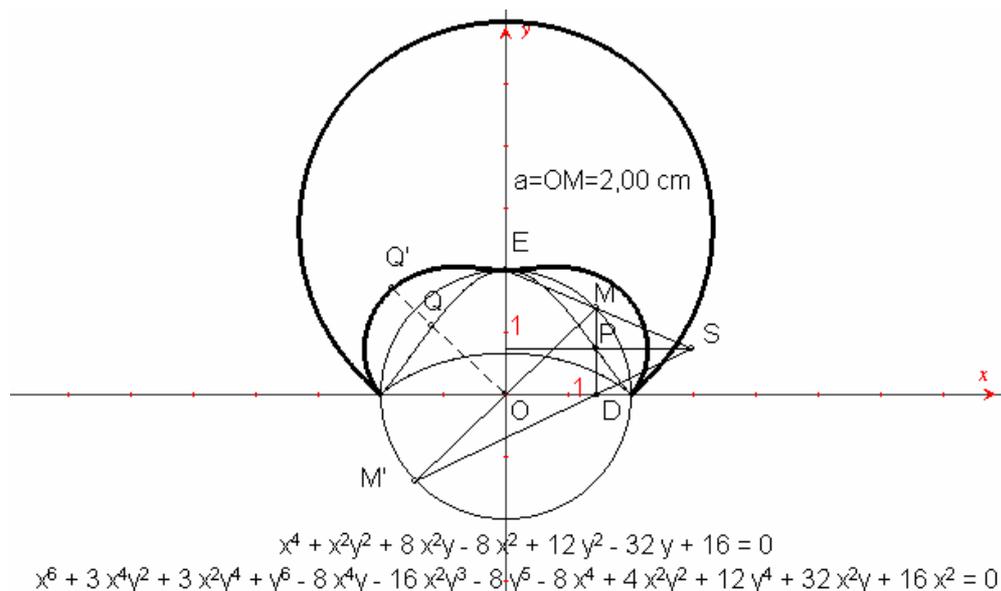


Fig. 3

Partiendo de la ecuación cartesiana del bicornio,

$$y^2(a^2 - x^2) = (x^2 + 2ay - a^2)^2,$$

hallaremos, de igual modo que en el caso anterior, la ecuación de la figura inversa,

$$(x^2 + y^2)^3 - 4ay(x^2 + y^2)^2 + a^2(3y^2 - 2x^2)(x^2 + y^2) + a^3x^2(4y + 2) = 0 \quad (3)$$

En la figura 3 aparecen, también para $a=2$, la ecuación cartesiana del bicornio y la del casco de motorista (3).

Conviene advertir que para valores enteros superiores a 2 el Cabri falsea los resultados, pues no sólo da coeficientes no enteros para la ecuación (3), sino que además aparece la x con exponentes impares, en contradicción con la simetría de la curva con respecto al eje OY, la cual es bien patente; por eso hay que tomar con mucha cautela los resultados que nos da, sobre todo con ecuaciones de quinto o sexto grados.

Unos ojos de insecto

El Cabri, en este caso, no proporciona coeficientes enteros para la cuártica de la figura 4, que sí que los tiene. Si dividimos por $0,12$ los coeficientes la ecuación, que está debajo de la circunferencia, tampoco da un resultado entero. Pero, afortunadamente, la ecuación cartesiana de la curva engendrada por P, se deduce fácilmente. Basta con hallar la ecuación de la recta EP, sabiendo que $x=X$, y que E tiene de coordenadas $(0,a)$, dando por resultado:

$$Y - a = \frac{X^2}{y} \rightarrow y = \frac{X^2}{Y - a}.$$

Eliminando, ahora, x e y en la ecuación $x^2+y^2=a^2$,

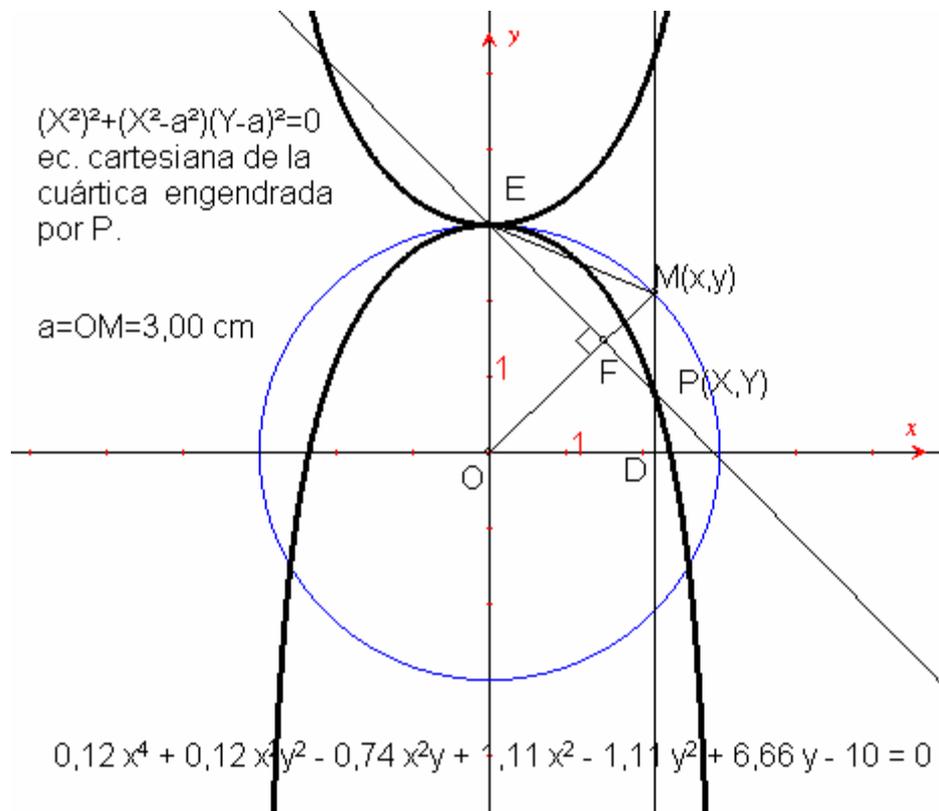


Fig. 4

se tiene, finalmente, para la ecuación cartesiana de esta curva:

$$X^4 + (X^2 - a^2)(Y - a)^2 = 0 . \quad (4)$$

En la figura 5 está representada la figura inversa de esta cuártica.

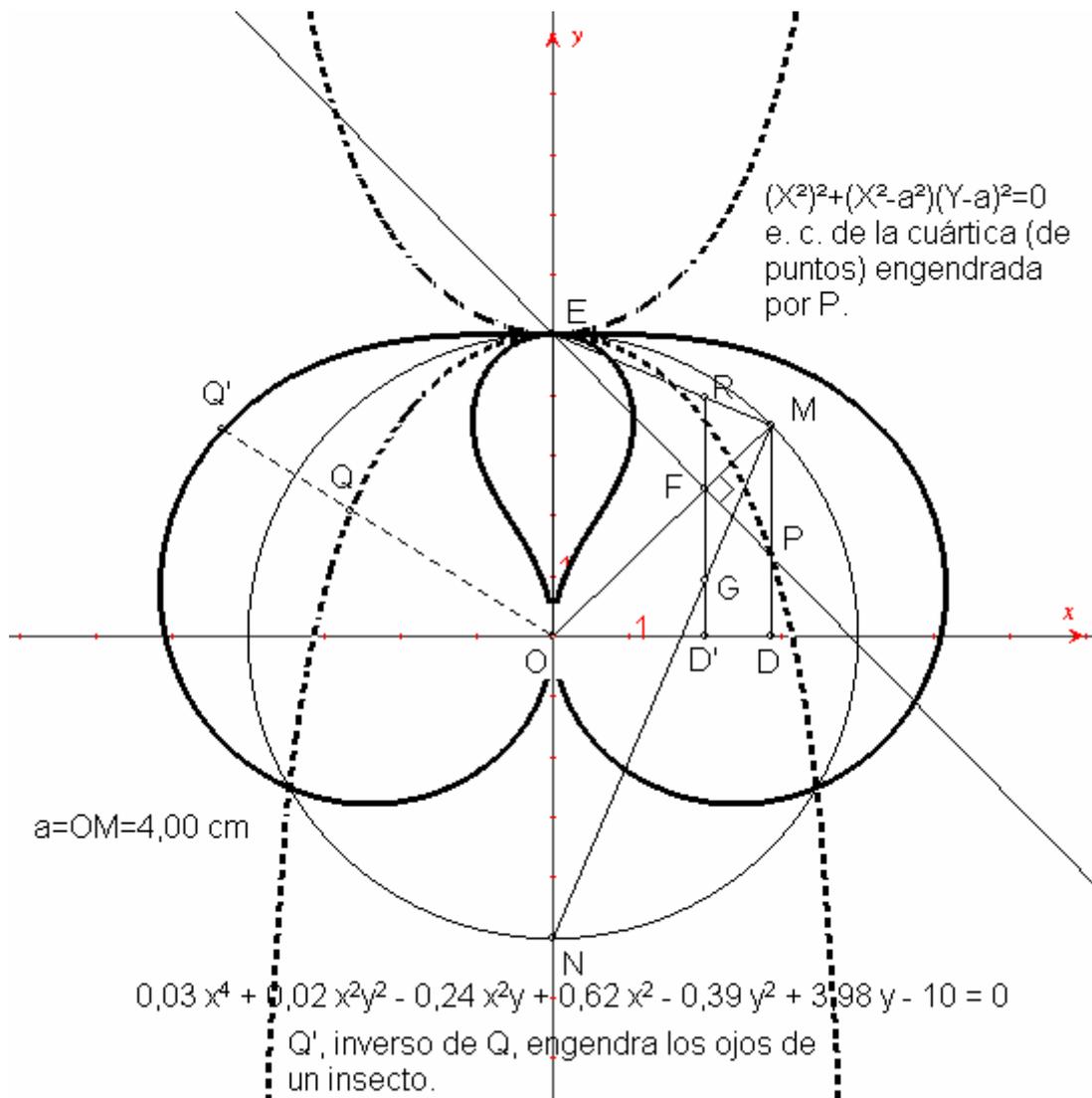


Fig. 5

Procediendo, como en casos anteriores, la ecuación de la figura inversa de la cuártica en cuestión es la que sigue,

$$(x^2 + y^2)^3 - 2ay(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^4 - y^4) + 2a^3x^2y - a^4x^2 = 0. \quad (5)$$

Tampoco, en este caso, da el Cabri la ecuación con coeficientes enteros para valores enteros de a ; sin embargo, no hay contradicción en las variables,

pues los exponentes de la variable x son pares, traduciendo así la simetría de la curva con respecto al eje OY.

Un nuevo corazón

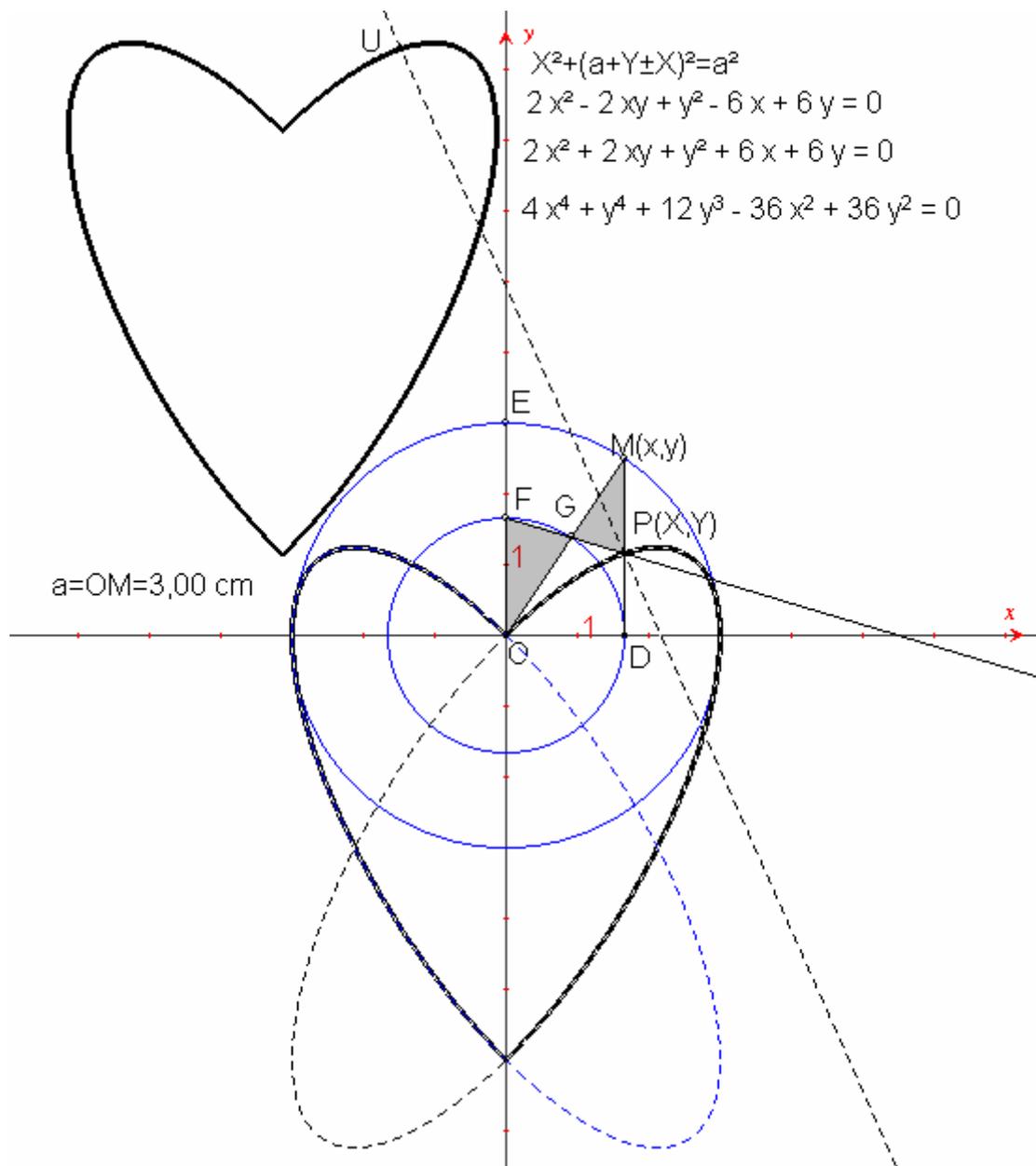


Fig. 6

El punto P engendra un corazón más estilizado que la ya clásica cardioide. Pero, no nos engañemos, en realidad está formado por dos arcos de elipse que están punteadas y simétricamente dispuestas respecto de OY.

En la figura 6, $x=X$. Los triángulos semejantes MGP y GFO, nos permiten escribir,

$$\frac{MP}{FO} = \frac{MG}{GO} \rightarrow \frac{y-Y}{X} = \frac{a-X}{X} \rightarrow y = a + Y - X,$$

ya que $OF=OG=OD=x=X$. Sustituyendo x e y en la ecuación de la circunferencia de radio a , tendremos, para la elipse que pasa por P, la siguiente ecuación:

$$X^2 + (a + Y - X) = a^2.$$

Para la ecuación de la otra elipse, bastará con sustituir $X \rightarrow -X$; por lo que, las dos elipses quedarán representas del siguiente modo,

$$X^2 + (a + Y \pm X) = a^2.$$

Las ecuaciones que da el Cabri, indicadas en la parte superior derecha de la fig. 6, no son otra cosa que las de las dos elipses y su producto para $a=3$.

Es sorprendente el comportamiento irregular del Cabri en este ejemplo; puesto que, tanto el Geómetra (al dibujar el lugar), como el Matlab 6.1 y el Derive 5, entre otros programas, al representar la ecuación de la “pretendida” cuártica, dan las dos elipses completas; pero gracias a esta irregularidad podemos disfrutar de esta singular figura.

Por otro lado, hemos elegido un punto genérico U de una recta cualquiera, sin ligaduras, que pase por P. El lugar geométrico engendrado por U

es también un corazón igual al primero, resultado de una traslación de vector PV. La recta se puede girar alrededor de P mediante el ratón.

Existen diversos modos de obtener una cardioide. En la figura 7 se ha representado mediante la inversión de la parábola. Esta última la hemos

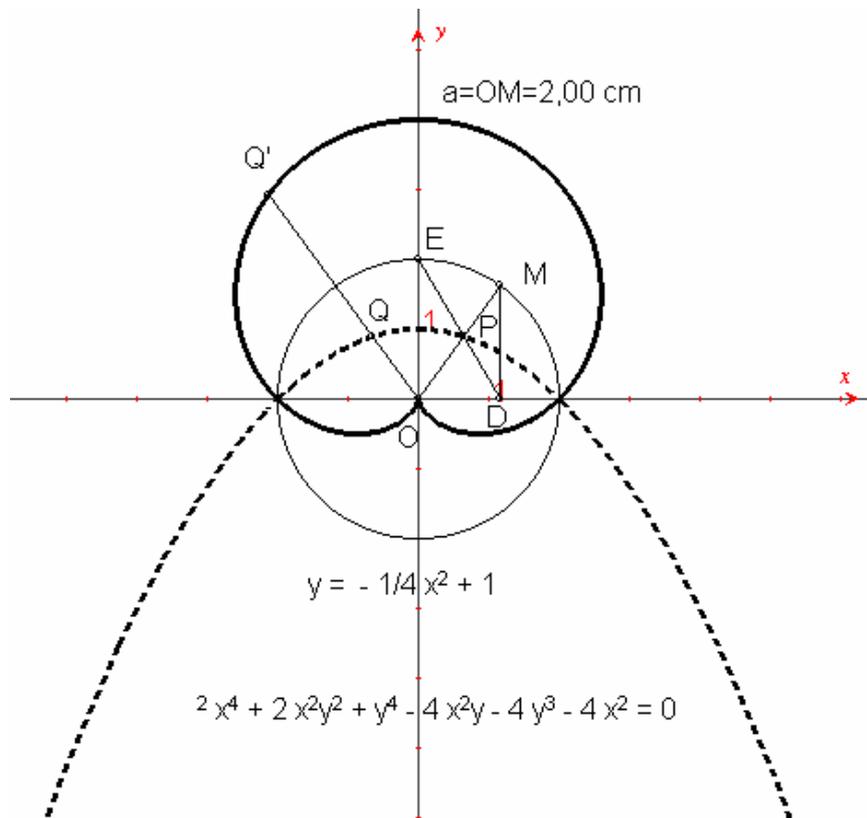


Fig. 7

construido como el lugar geométrico engendrado por P, intersección de los segmentos OM y ED. El inverso, Q', de un punto cualquiera Q de la parábola, respecto de una circunferencia que tiene por centro el foco de la misma, engendra una cardioide. Si el centro fuese el vértice se generaría una cisoide.

Demos ahora otros valores a a, distintos de 2,

$$a = 3 \rightarrow y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}; (x^2 + y^2)^2 - 6y(x^2 + y^2) - 9x^2 = 0,$$

$$a = 4 \rightarrow y = -\frac{1}{8}x^2 + 2; (x^2 + y^2)^2 - 8y(x^2 + y^2) - 16x^2 = 0.$$

Estos valores numéricos de los coeficientes de las ecuaciones de la parábola y la cardioide, dados por el Cabri, nos permiten determinar los coeficientes de estas curvas en función de a ,

$$y = -\frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}; (x^2 + y^2)^2 - 2ay(x^2 + y^2) - a^2x^2 = 0.^1 \quad (6)$$

Una perla barroca

Al ser $x=X$ (fig. 8), la ecuación de la recta AN (fig. 8) viene dada por

$$Y = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{a+X}{2} + a} (X+a) \rightarrow Y = \frac{2y}{X+3a} (X+a), \text{ de donde:}$$

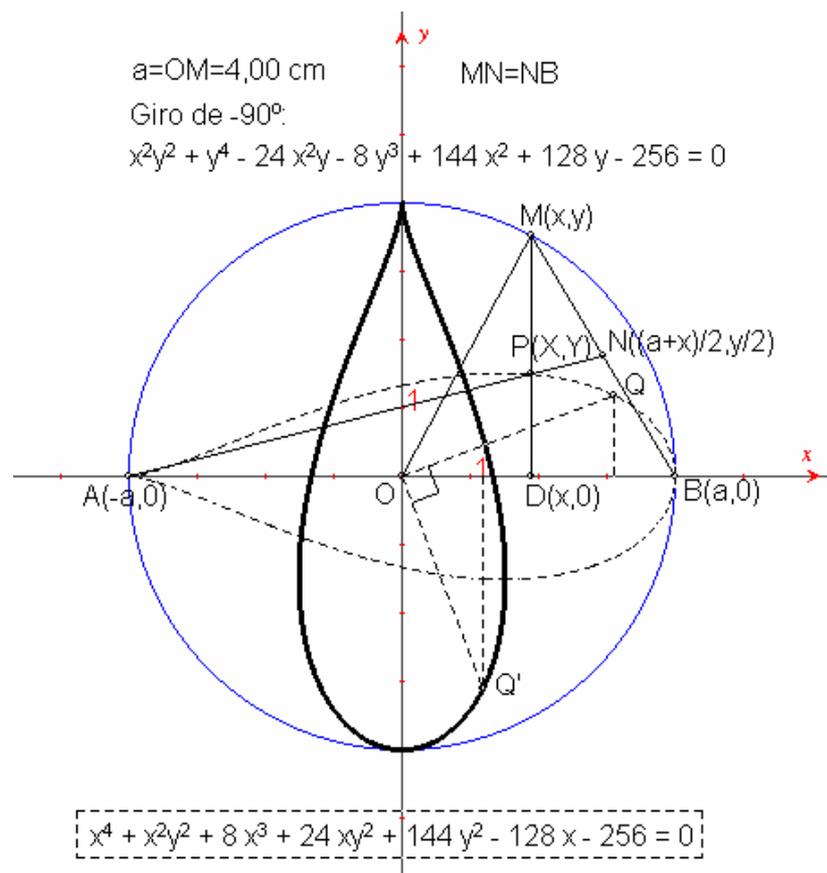


Fig. 8

¹ Esta cuártica puede transformarse en esta otra: $(x^2+y^2)^2 + f_2(x,y) = 0$, (donde $f_2(x,y)$ es un polinomio de 2º grado en x, y), mediante una traslación apropiada, que en este caso sería $T(0, a/2)$). De esta manera tendría la forma de las cuárticas bicirculares más conocidas.

$$y = \frac{Y(3a + X)}{X + a}.$$

Sustituyendo los valores de x e y en la ecuación $x^2+y^2=a^2$ de la circunferencia, tendremos para la ecuación de la perla (de puntos):

$$Y^2(3a + X)^2 = (a^2 - X^2)(a + X)^2 \quad (7)$$

Mediante un giro de -90° alrededor de O , las coordenadas de un punto $Q(X, Y)$ de la curva punteada pasarían a ser las del punto $Q'(Y, -X)$; esto es, $X=-Y'$ e $Y=X'$. Sustituyendo en (7) y suprimiendo las primas, la curva girada (de trazo grueso) tendría esta otra forma:

$$X^2(3a - Y)^2 = (a^2 - Y^2)(a - Y)^2. \quad (7bis)$$

De esta manera, estando la curva erguida, se parece más a una perla colgante.

En la fig. 8, están también las ecuaciones (7), la que tiene un marco punteado, y la (7bis), ambas para $a=4$. Tomando otro par de valores enteros para a , al mover convenientemente la circunferencia, se pueden determinar, fácilmente, en función de a , las ecuaciones referenciadas, con la ventaja de tenerlas ordenadas de mayor a menor en cuanto a las potencias de las variables se refiere. Así, la ecuación (7) tomaría, a partir del Cabri, esta otra forma:

$$x^4 + x^2 y^2 + 2ax^3 + 6ay^2 x + 9a^2 y^2 - 2a^3 x - a^4 = 0, \quad (7^*)$$

que, como se puede comprobar, es la misma (7), ordenada, y una vez hechas las distintas operaciones.

El antifaz

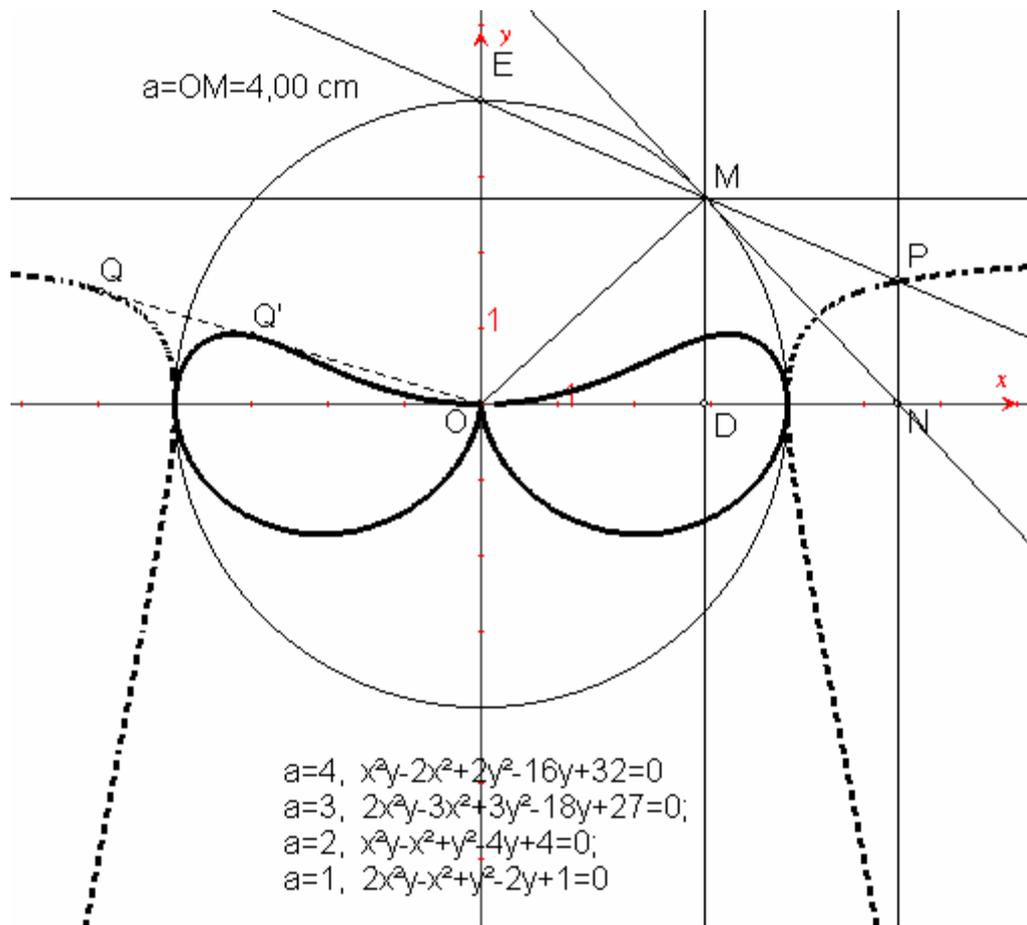


Fig. 9

El punto P de esta figura genera una cúbica. Determinaremos su ecuación cartesiana dándole a a , como en casos anteriores, valores enteros, y, mediante la herramienta *Coord. o Ecuación*, conseguir las ecuaciones de coeficientes numéricos que aparecen en la parte inferior de la fig. 9. Una vez observadas, escribiremos para la ecuación de la cúbica lo que sigue:

$$x^2y - \frac{a}{2}(x^2 - y^2) - a^2y + \frac{a^3}{2} = 0 \rightarrow$$

$$2x^2y - a(x^2 - y^2) - 2a^2y + a^3 = 0. \quad (8)$$

Conviene tener en cuenta que el parámetro a homogeneiza la ecuación; esto es, que todos los términos de la misma son del mismo grado en x , y , a ; lo que nos indica el exponente que debe llevar a en cada término.

La figura inversa de esta cúbica obtenida, como el lugar geométrico de Q' cuando Q se mueve sobre la cúbica, tiene forma de antifaz o de gafas de sol. Su ecuación cartesiana se obtiene, sin dificultad alguna, mediante las formulas de transformación de la inversión o aplicando la ya conocida herramienta de *Coord. o Ecuación*. Con uno u otro recurso la ecuación cartesiana de esta curva es,

$$(x^2 + y^2)^3 - 2ay(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^4 - y^4) + 2a^3x^2y = 0. \quad (9)$$

Un nudista

En la fig. 10, el punto P genera una cuártica (punteada y con trazo grueso). Su ecuación cartesiana es inmediata teniendo en cuenta la homogeneización ya comentada. Observando la ecuación que da el Cabri para $a=4$, sale para su ecuación general:

$$x^2y^2 - 2ax^2y + a^2x^2 + 2a^3y - a^4 = 0. \quad (10)$$

El Cabri, no es capaz de hallar la ecuación cartesiana de la figura inversa de la cuártica anterior. Se limita sólo a indicar que '*no hay ecuación "simple" en coordenadas polares*'. Sin embargo, las fórmulas de transformación de la inversión, tantas veces mencionada, nos da para la ecuación cartesiana del nudista (o, quizás, la cabeza de una vaca marina) lo que sigue:

$$(x^2 + y^2)^4 - 2ay(x^2 + y^2)^3 - a^2x^2(x^2 + y^2)^2 + 2a^3x^2y(x^2 + y^2) + a^4x^2y^2 = 0 \quad (11)$$

Ya hemos mencionado en otra ocasión que el Cabri, por el momento, tiene como techo el grado sexto para la ecuación cartesiana de una curva. La (11) es, como se ve, de grado 8.

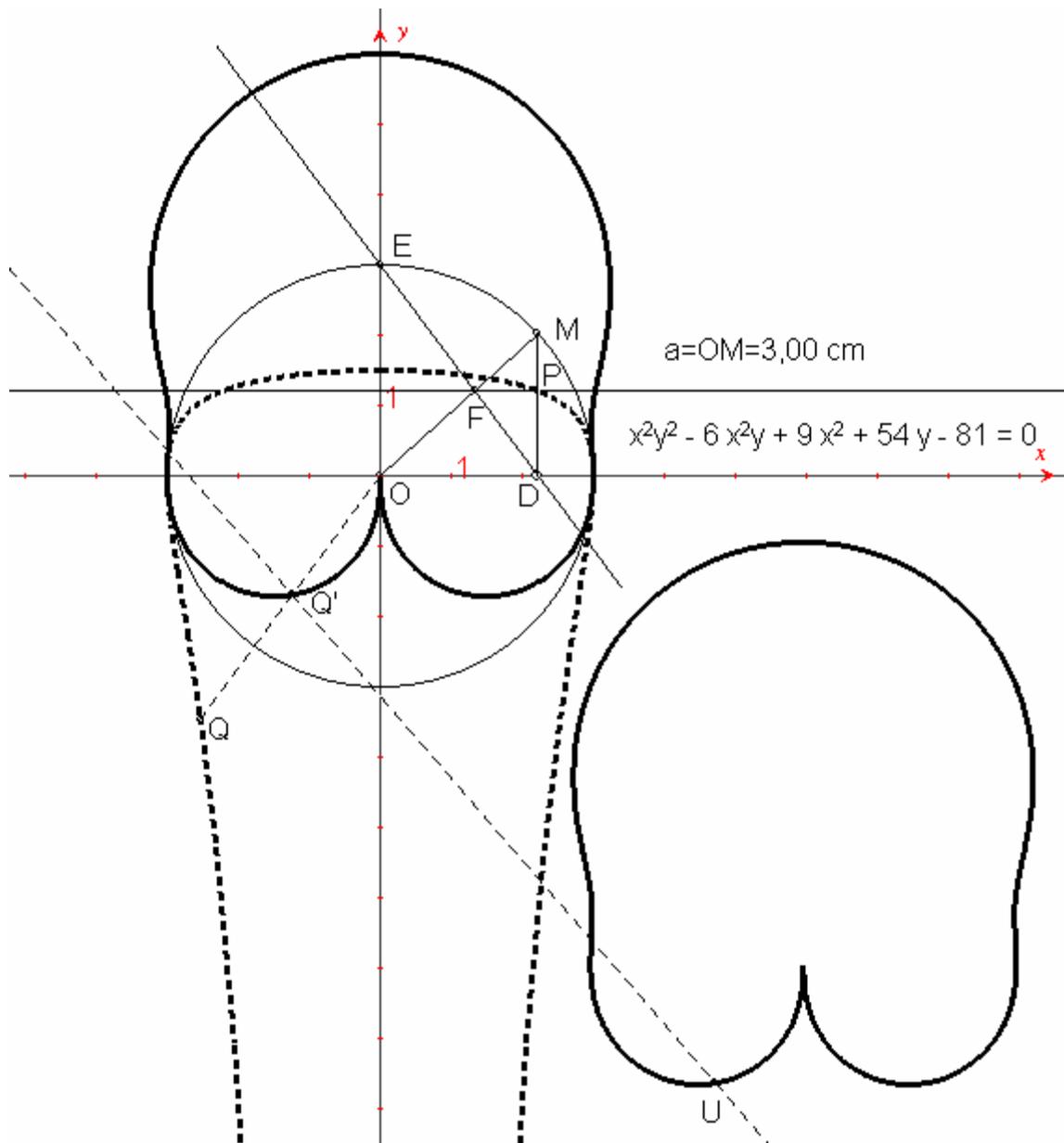


Fig. 10

Lazo de niña

En la fig. 11, está representado el lugar geométrico de P cuando M se mueve sobre la circunferencia. El triángulo MVM' es equilátero, por lo que P hará de ortocentro, incentro, circuncentro y baricentro. Este lugar, que recuerda a un lazo de niña, tiene una ecuación muy sencilla en coordenadas polares, donde $\rho=OP=ON+NP$; S, es un punto que varía sobre el eje OX; la distancia SO, la llamaremos k , con lo que hemos introducido un nuevo parámetro. El triángulo ONS es rectángulo, de donde $ON=k\cos\alpha=k(-\cos\omega)=-k\cos\omega$. El lado, l , del triángulo equilátero, es igual

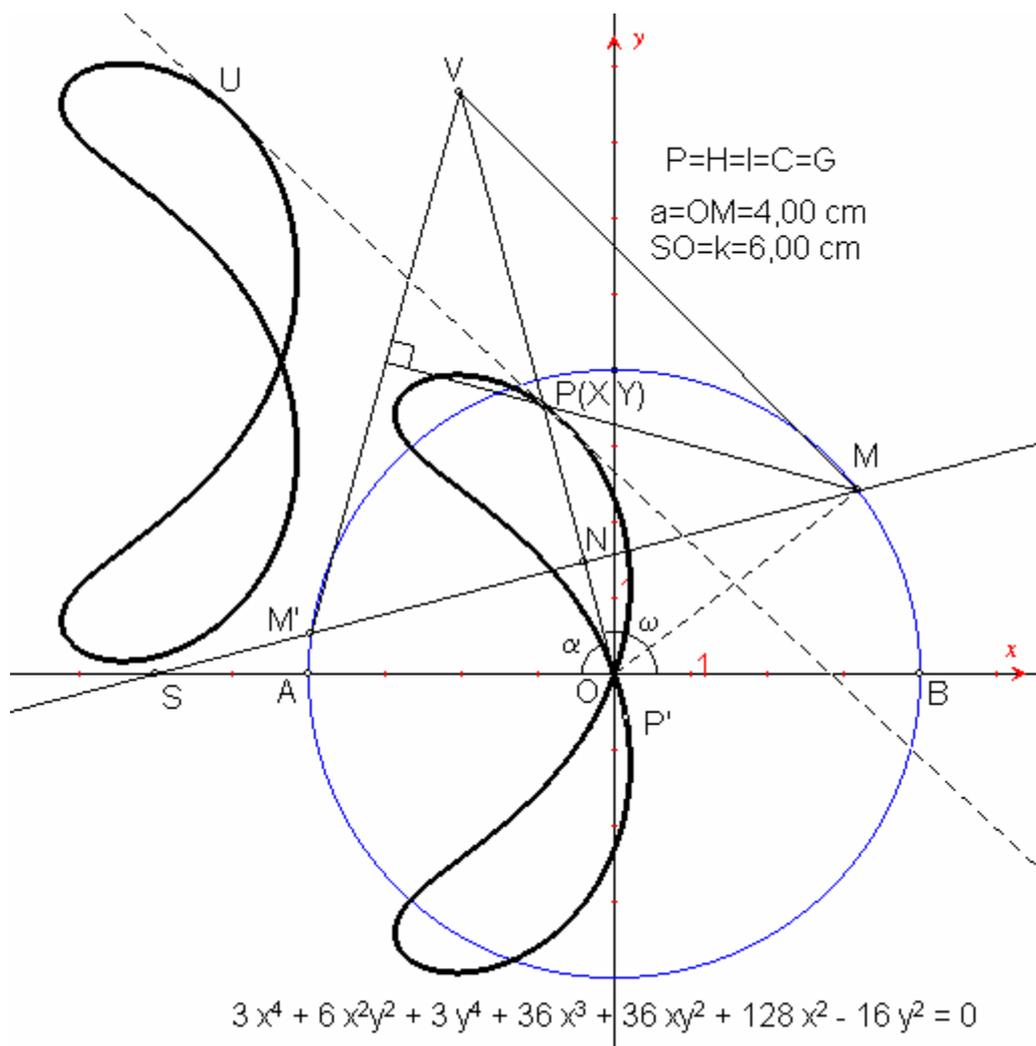


Fig. 11

$$a \quad M'M=2NM=2\sqrt{a^2 - k^2 \cos^2 \omega}, \text{ y}$$

$$NP = \frac{l\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{a^2 - k^2 \cos^2 \omega} \times \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Con estos datos,

$$\rho = -k \cos \omega + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2 - k^2 \cos^2 \omega}. \quad (12)$$

Esta ecuación pasará a cartesiana, mediante las sustituciones consabidas,

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \cos \omega = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

con lo que (12), una vez hecha las operaciones, toma la forma:

$$3(X^2 + Y^2 + kX)^2 = (a^2 - k^2)X^2 + a^2Y^2, \quad (13)$$

que puede ponerse de esta otra forma:

$$3(X^2 + Y^2)^2 + 6kX(X^2 + Y^2) + (4k^2 - a^2)X^2 - a^2Y^2 = 0^2 \quad (13\text{bis}),$$

que, como puede comprobarse, coincide con la que da el Cabri para $a=4$ y $k=6$.

La ecuación de la figura inversa es

$$(4k^2 - a^2)X^2 - a^2Y^2 + 6ka^2X + 3a^4 = 0, \quad (14),$$

² Diríamos lo mismo que en la nota 1. La traslación en este caso sería $T(-3k/2, 0)$.

que, como se ve, es la ecuación de una cónica.

Veamos, ahora, las formas que va tomando el lazo y su inversa para los distintos valores de k .

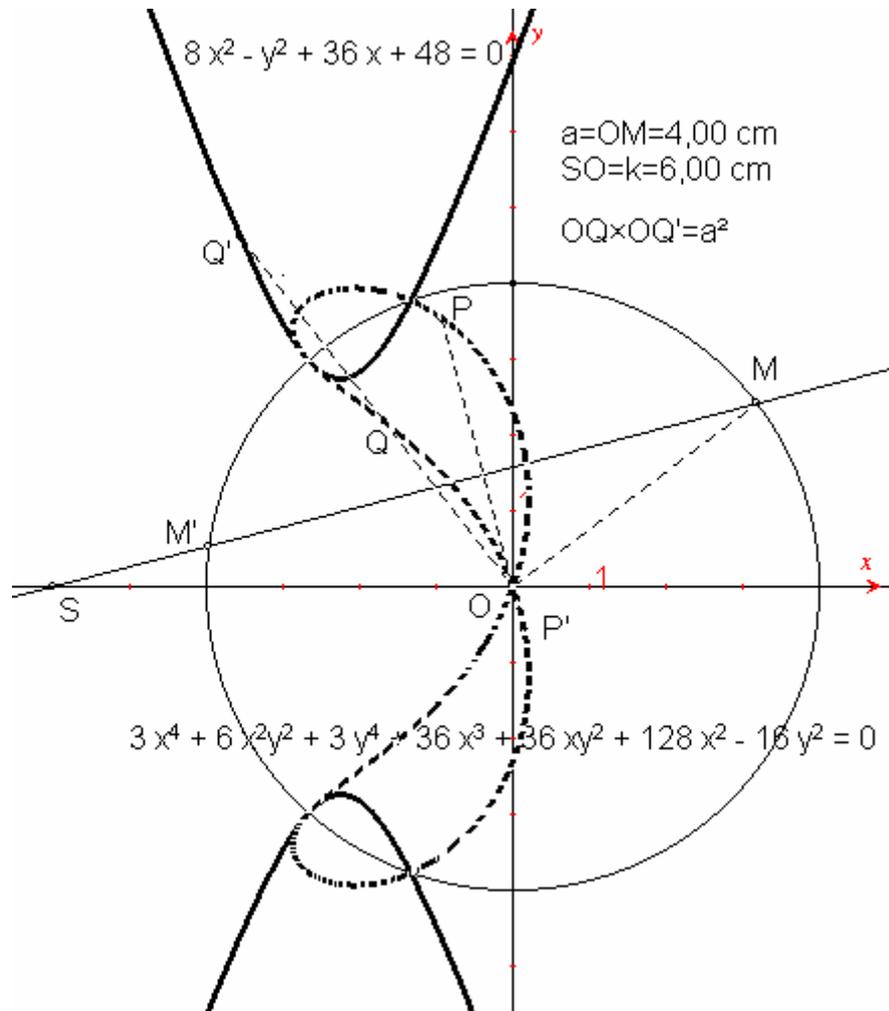


Fig. 12

1. $k > a$, figura 12.

Se conserva el lazo, que se va estrechando a medida que S se vaya alejando de A. La inversa es siempre una hipérbola de eje paralelo a OY, que también se va estrechando en consonancia con el lazo.

2. $k=a$, figura 13.

El lazo se convierte en dos circunferencias, simétricas respecto del eje OX, que pasan por A y O. Sus respectivas inversas son rectas que pasan por los puntos de corte de dichas circunferencias con la de inversión (la de centro O y radio a). El inverso de O es el punto del infinito de cada recta; una de ellas, la SC', no la representa el Cabri.

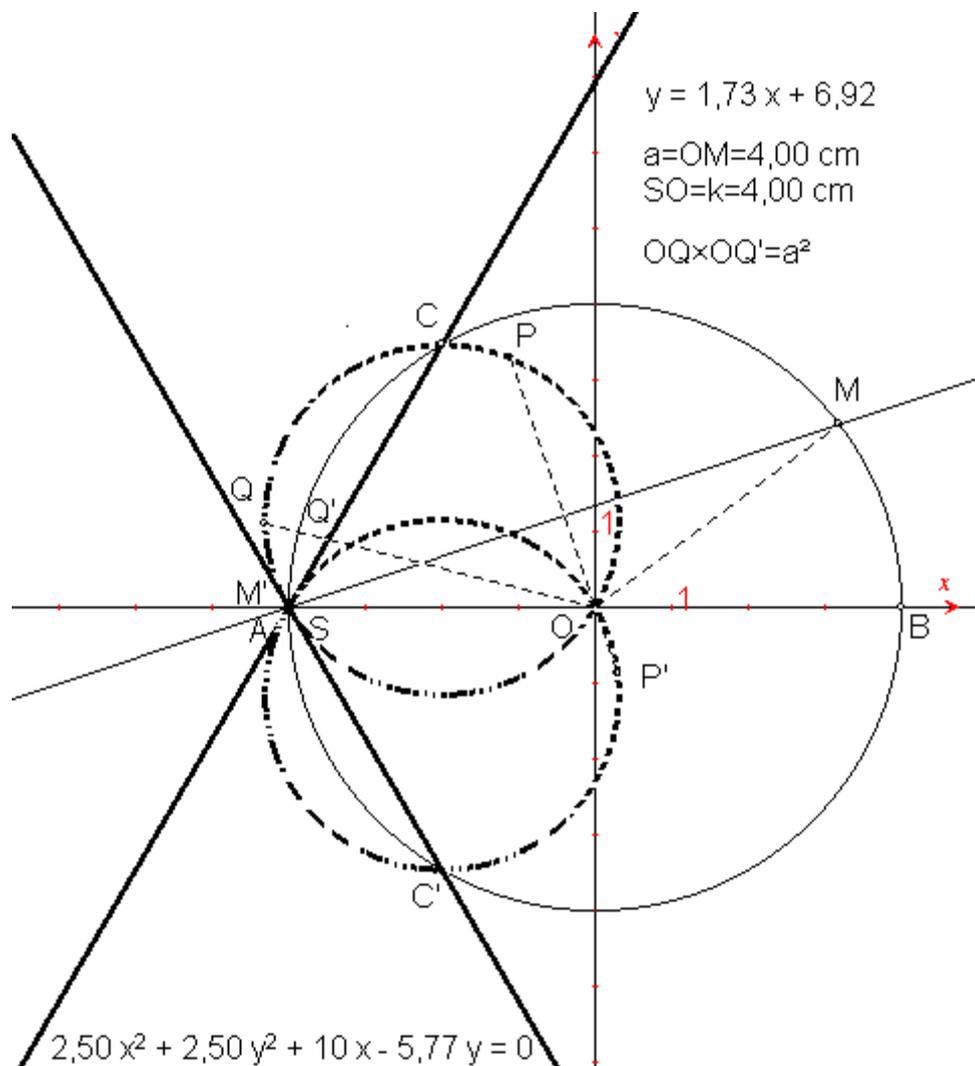


Fig. 13

3. $a > k > a/2$, figura 14.

El lazo se transforma en un caracol de Pascal (concoide de la circunferencia). Siguen siendo hipérbolas las inversas de los distintos caracoles que se forman cuando k toma los valores del intervalo señalado.

Las hipérbolas tienen, ahora, como eje transverso el OX. El punto O hace de uno de sus focos.

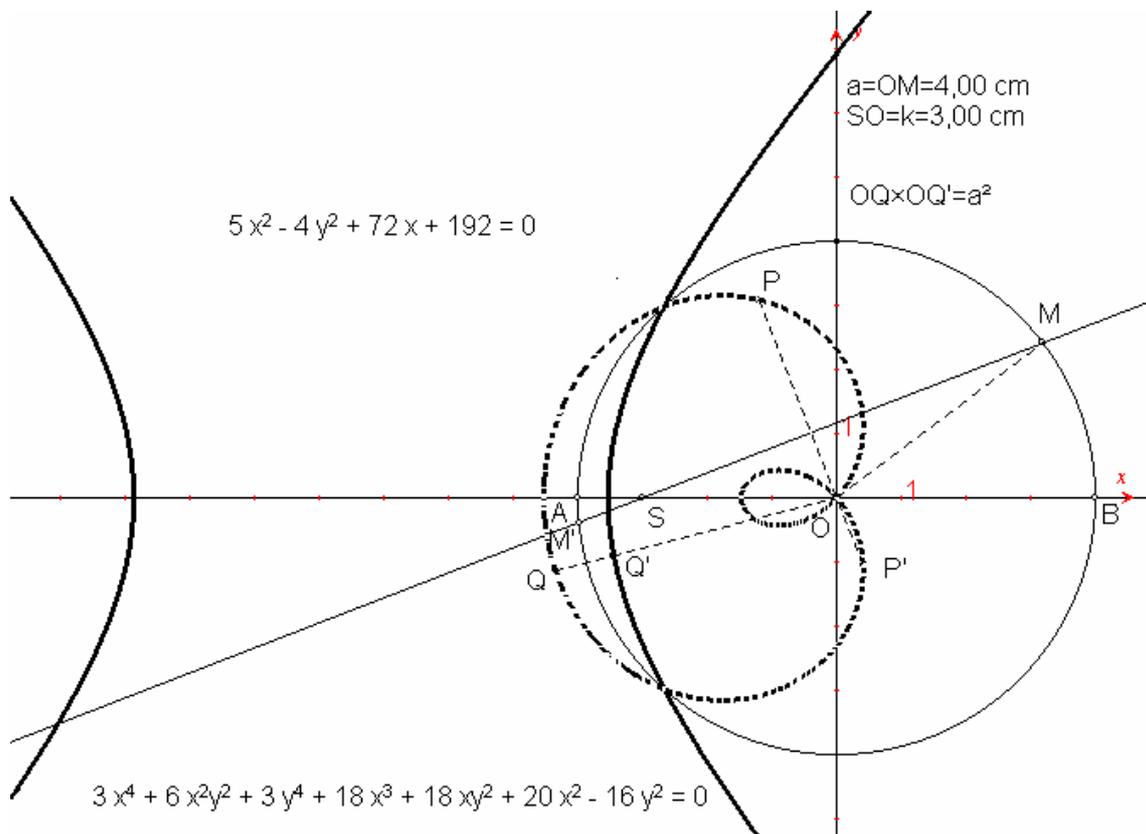


Fig. 14

4. $k=a/2$, figura 15.

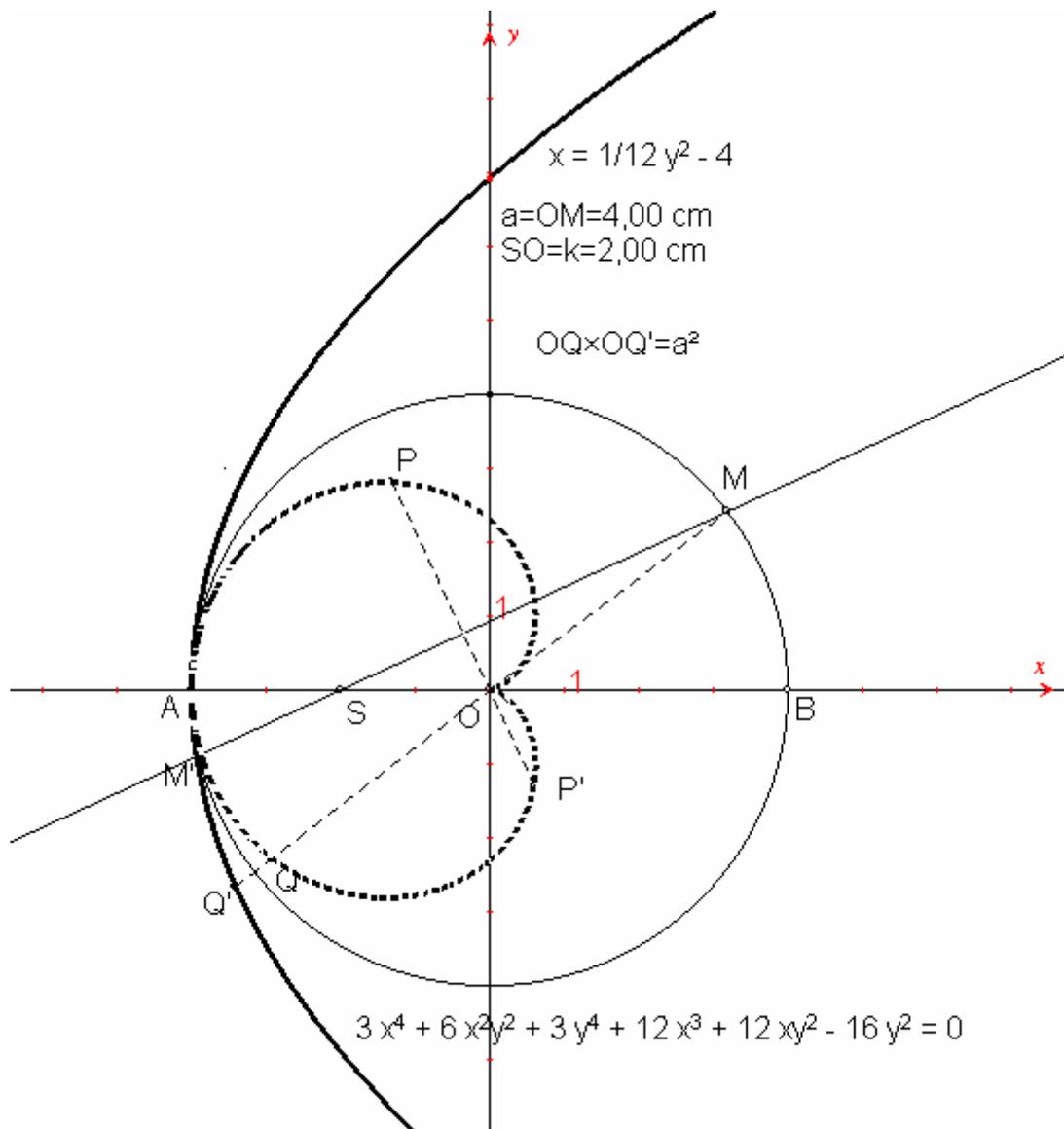


Fig. 15

Aparece, para este único valor de k , un caso particular del caracol de Pascal: la cardioide. Su figura inversa, a la que ya nos hemos referido en

apartados anteriores, es una parábola. El punto O, polo o centro de la inversión, hace de foco de la misma. A su vez, este punto que también pertenece, en este caso, a la cardioide, se transforma en el punto del infinito de la parábola.

5. $a/2 > k > 0$, figura 16.

Para este intervalo, los caracoles de Pascal tienen como figuras inversas las elipses. El punto O es uno de los focos de la elipse representada; el otro es el simétrico de O respecto del punto medio del eje mayor de la misma.

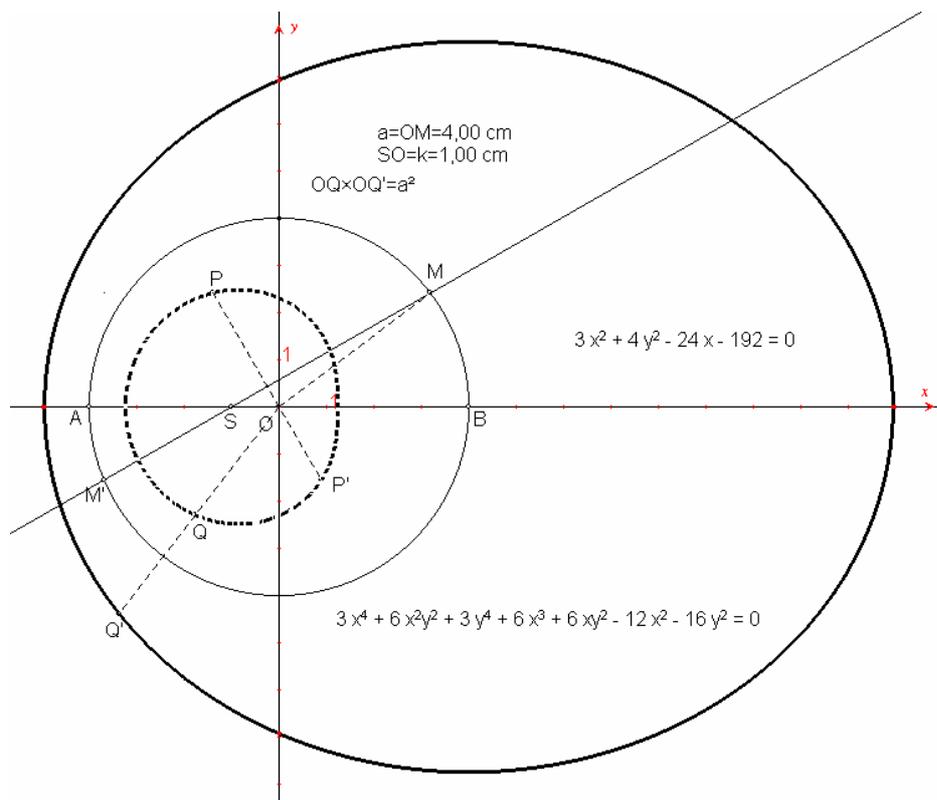


Fig. 16

6. $k=0$, figura 17.

Se obtiene, finalmente, como figura inversa de la circunferencia, de centro O y $r=OQ=a/\sqrt{3}$, la circunferencia del mismo centro y $r=\sqrt{3} \times a$. Los focos de la elipse se han ido acercando hasta confundirse con el polo.

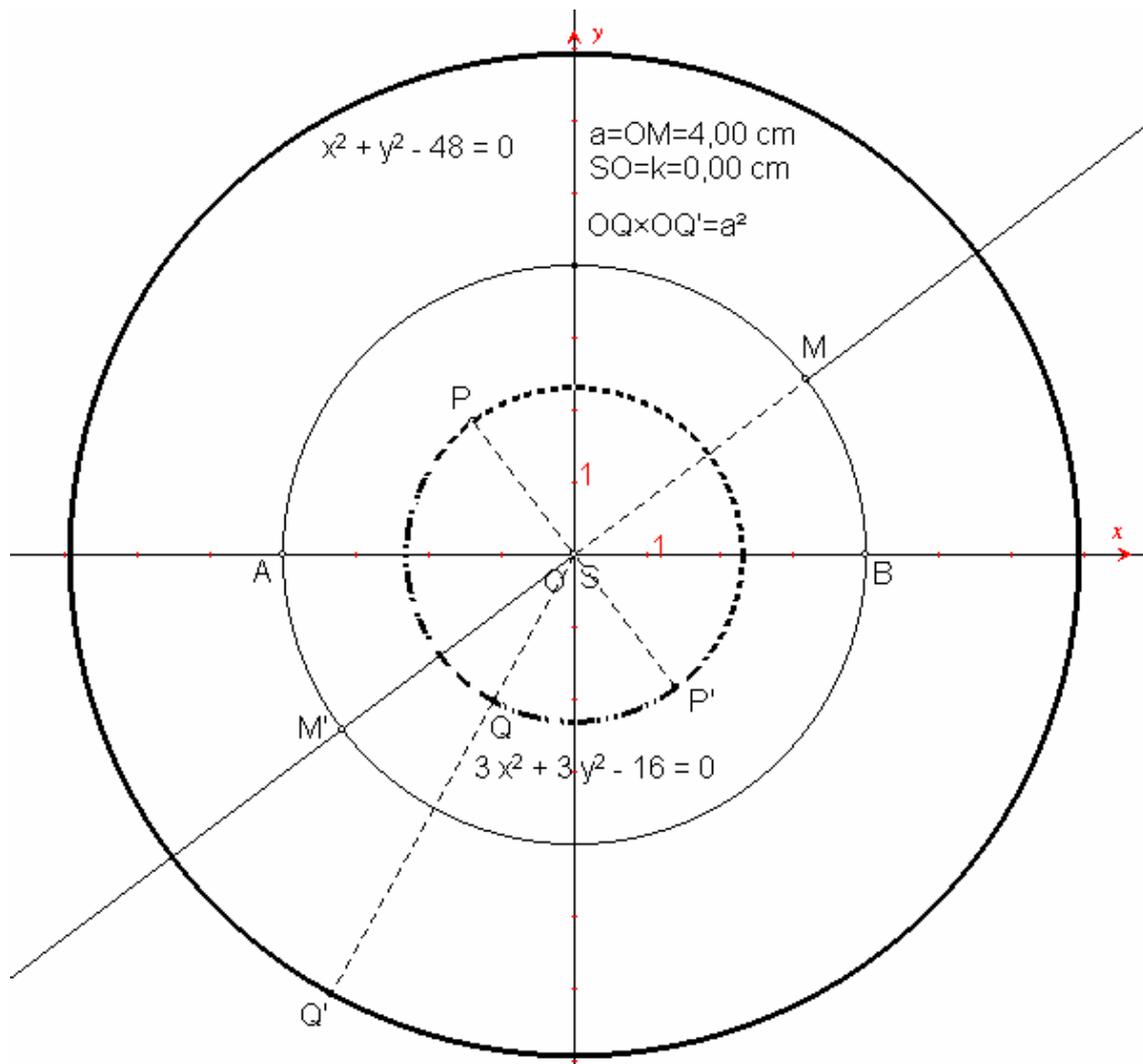


Fig. 17

Todo lo obtenido para los diferentes valores de k se puede comprobar, analíticamente, mediante las ecuaciones (13) y (14). Si el punto S se moviese a la derecha de O, se irían formando las mismas figuras, aunque cambiadas de sentido.

El punto $V(x, y)$ de la figura 13, que es un vértice del triángulo equilátero, genera también figuras análogas a las del punto P. Con el fin de no prolongar demasiado este apartado, transcribiremos a continuación las ecuaciones que se corresponden con la (12), la (13), la (13 bis) y la (14):

$$\rho = -k \cos \omega + \sqrt{3(a^2 - k^2 \cos^2 \omega)} \quad (15)$$

$$(x^2 + y^2 + kx)^2 = 3(a^2 - k^2)x^2 + 3a^2 y^2 \quad (16)$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2kx(x^2 + y^2) + [4k^2 - 3a^2] - 3a^2 y^2 = 0 \quad (16 \text{ bis})$$

$$(4k^2 - 3a^2)x^2 - 3a^2 y^2 + 2ka^2 x + a^4 = 0 \quad (17)$$

Esta última, al igual que la (14), es la ecuación de una cónica.

El Cabri representa, para un valor fijo de a , varias elipses y también varias hipérbolas (teóricamente el número de ambas sería infinito), para distintos valores de k ; pero, no es capaz de representar la única parábola que se puede generar para un solo valor de k , y, como a los ojos del Análisis nada escapa, este valor se deduce de la ecuación (17), para el caso en que la cónica sea una parábola, resultando ser:

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} a .$$

Se explica, ahora, porque el Cabri no pueda representar un número irracional. Incluiremos, a continuación, un ejemplo en el que se genera una elipse (fig. 18) y otro en que aparece una hipérbola (fig. 19).

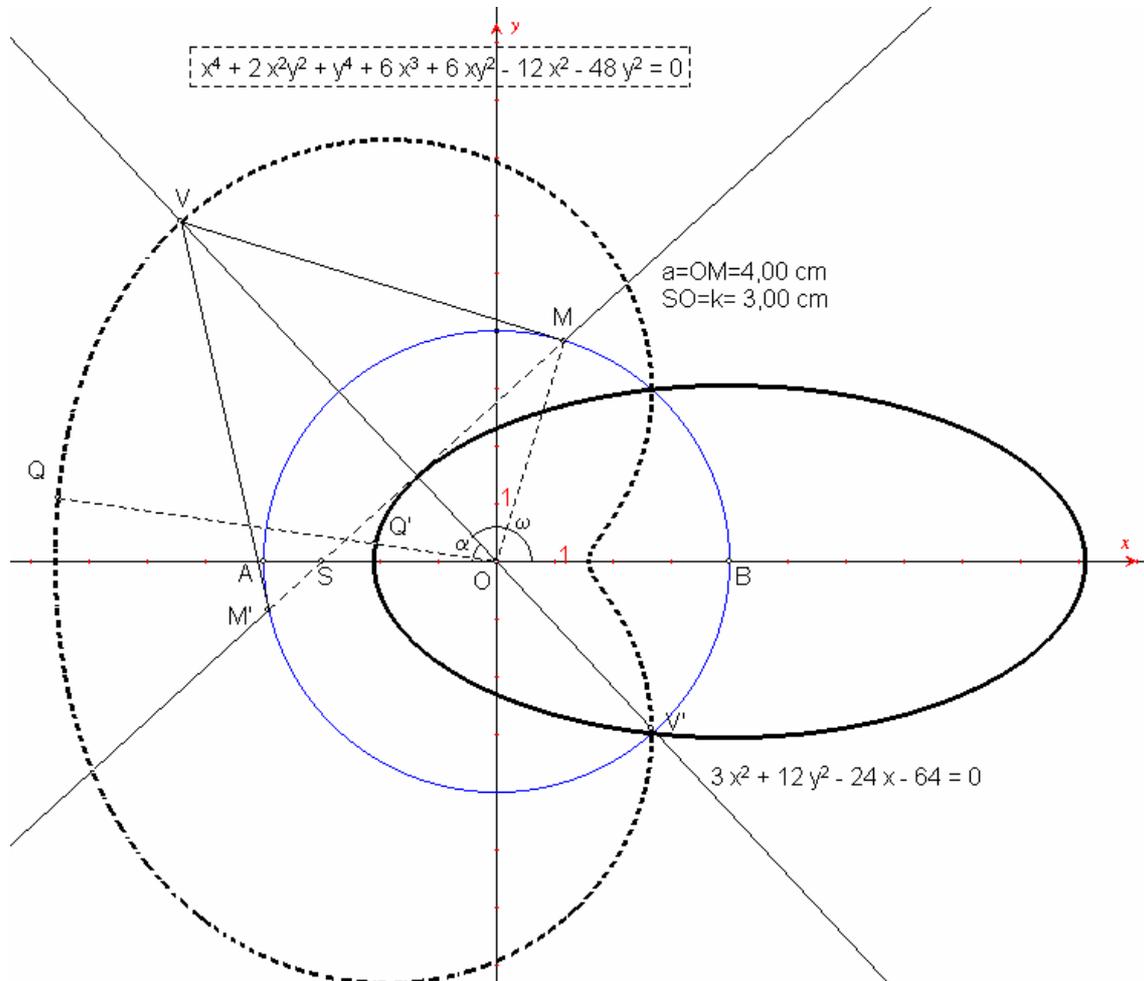


Fig. 18

Obsérvese como los puntos de corte de la cuártica con la circunferencia de inversión son también puntos de la elipse, y que la parte de curva que está dentro de dicha circunferencia se transforma en parte exterior de la elipse. Y, recíprocamente, la parte exterior de dicha cuártica se transforma en el trozo que la elipse tiene en el interior de la circunferencia de inversión.

Con respecto a la fig. 19, se puede observar, además de lo dicho para la 18, que el punto doble que tiene la cuártica en el polo se transforma en los dos puntos impropios de la hipérbola.

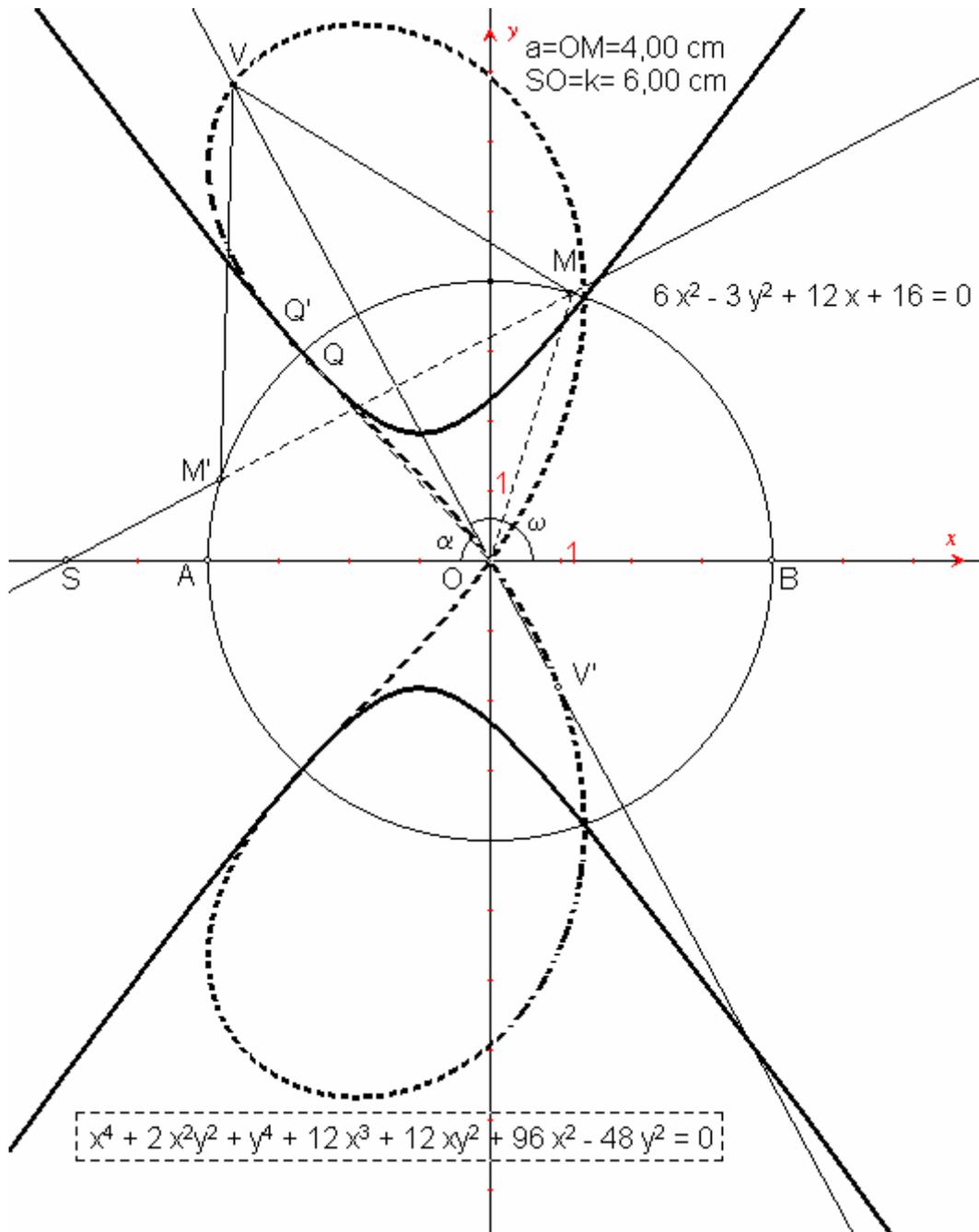


Fig. 19

Consideraciones finales

1. Hemos conseguido una muestra de las figuras que se pueden lograr haciendo que un punto del plano dependa de otro que se pueda mover, libremente, a lo largo de una circunferencia. Confiemos en que alguno de los posibles lectores de este trabajo se anime a seguir buscando figuras que tengan cierto parecido con la silueta de algún objeto real conocido, y como decíamos en la Introducción, de seguro, que se va a sentir gratamente sorprendido por el descubrimiento.

2. Por otro lado, con la herramienta *Coord. o Ecuación* del Cabri Plus, es posible que, en algunos casos, se pueda determinar la ecuación cartesiana de una curva que previamente haya dibujado como resultado de un lugar geométrico. Ecuación que dará en forma algebraica; esto es, que las coordenadas de sus puntos satisfagan a un polinomio en las variables x , y , una vez igualado a cero dicho polinomio. Los coeficientes numéricos de dicha ecuación son , las más de las veces, aproximados. Pero conviene que seamos cautos, pues cuando se trata de una curva, cuya ecuación sea trascendente, el Cabri la dará (siempre que la pueda dar) como algebraica. También tiene otras limitaciones en cuanto al grado de la ecuación, como ya se ha dicho, pues no sólo no pasa del grado 6, sino que a veces, modificando el radio de la circunferencia, modifica también el grado. En aquellos casos en que no puede dar la ecuación, se limita a indicar, con un cartelito, que «no hay ecuación “simple” en coordenadas polares». Sin embargo, también tiene sus ventajas, pues como ya hemos aclarado, a lo largo de estas páginas es posible conseguir, con su ayuda, la ecuación cartesiana de ciertas curvas en función de uno o más parámetros.

3. Y ya, para terminar, nos vamos a referir a la operación inversión. El Cabri permite, con sólo saber la definición de inversión, adentrarse en el interesante mundo de las figuras inversas de otras dadas. Así, con saber que dos puntos homólogos P y P' , alineados con el centro O de una circunferencia de radio a , satisfacen la relación, $OP \times OP' = a^2$, podrá descubrir, mediante la herramienta *Inversión*, las cuestiones que vamos a reseñar a continuación:

4. Todos los puntos de la circunferencia de inversión son dobles, o sea, que $P=P'$. Toda figura interior a la circunferencia se transformará en otra que estará fuera de la misma y viceversa. En particular toda circunferencia de centro O , interior a la de inversión, se transformará en otra exterior y con el mismo centro, y viceversa (fig. 17).

3.2 Toda recta que pase por O se transformará en ella misma.

3.3 El inverso de O es un punto del infinito. Recíprocamente, todo punto impropio tendría por inverso el punto O (fig. 7).

3.4 Toda circunferencia que pase por O se transformará en una recta perpendicular al diámetro de la misma que pase por O . Si la circunferencia corta además a la de inversión, la recta pasará por los dos puntos de corte (fig. 13).

Dado que toda recta se puede considerar como una circunferencia de radio infinito, podemos colegir que toda circunferencia se transforma en otra circunferencia mediante la inversión.

3.5 Toda figura que corte a la de inversión se transformará en otra que ha de pasar por los puntos de corte (fig. 18).

3.6 Toda figura que tenga un punto doble en el polo se transformará en otra que tendrá dos puntos impropios (figs. 9, 12, 14, 19). Y así para más puntos dobles.

3.7 Como el inverso de P' es P , la inversa de la inversa de una figura es la figura de partida, lo que quiere decir que la inversión es involutiva (que da

marcha atrás), o dicho de otro modo, es una transformación cuyo cuadrado es la identidad, que se suele expresar, de forma más concisa, así: $I^2=I$.

En fin, teniendo en cuenta estas pocas indicaciones, es posible dibujar, *grosso modo*, la inversa de cualquier curva, sin necesidad de recurrir a ningún programa.

Referencias bibliográficas

- Aubert, P. y Papelier, G. (1944). *Ejercicios de Geometría Analítica*. 2º tomo. J. G. Perona, editor. Madrid.
- Cámara Tecedor, S. (1945). *Elementos de Geometría Analítica*. 3ª edición. Madrid.