FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
VOLUMEN VII, PÁGINAS 141-157
ISSN: 1885-2912

RESOLVIENDO UN PROBLEMA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS UTILIZANDO LA CALCULADORA SIMBÓLICA VOYAGE 200: UN ESTUDIO DE CASOS

Matías Camacho Machín
Marta Rojas González
Universidad de La Laguna

Resumen

Presentamos en este trabajo, como parte de un proyecto más amplio sobre formación de profesores en el uso de CAS (Computer Algebra Systems), el análisis detallado de la resolución de un problema de optimización por alumnos de la Licenciatura de Matemáticas utilizando una herramienta tecnológica potente (la Calculadora Simbólica Voyage 200). Nuestro estudio muestra que existe un predominio del trabajo técnico sobre los aspectos conceptuales, lo cual debe ser considerado a la hora de formar profesores de Matemáticas. Es importante que los futuros profesores conozcan, de una parte, las dificultades que surgen principalmente cuando se enseña con estas nuevas herramientas tecnológicas y, de otra, que sean capaces de apreciar la importancia de combinar el trabajo técnico con el instrumentado.

Abstract

In the following research, and as a part of a more extensive project dealing with the training of teachers in the use of CAS (Computer Algebra Systems), we propose a detailed analysis of the solving of an optimization problem by pupils studying for a Degree in Mathematics, using a technologically potent tool (the Symbol Calculator Voyage 200).

Our study shows that there is a prevalence of technical work over conceptual work, an aspect which has to be considered in order to train teachers of Mathematics. It is important for future teachers, not only to be aware of the difficulties that might arise when teaching and using these new technological tools, but also to be able to assess the significance of combining technical and instrumental tasks.

Introducción

Los problemas de aprendizaje de los estudiantes y la continua inmersión en el mundo de las TIC (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) han llevado a los profesionales de la educación a buscar un aprovechamiento de la tecnología para la mejora tanto del rendimiento académico como de la imagen que poseen los alumnos de una asignatura que históricamente han considerado difícil.

Además, el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) estableció lo que se denomina "Principio tecnológico" y señala:

"Las calculadoras y los ordenadores son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer Matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y hacen cálculos con eficacia y exactitud. Pueden apoyar la investigación de los estudiantes en cada área temática, incluyendo Geometría, Estadística, Álgebra, Medida y Números. Cuando disponen de estas herramientas tecnológicas, los alumnos pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas"[**] (p. 26).

Ello pone de manifiesto la gran importancia que se le otorga internacionalmente al uso de la tecnología para la formación matemática de los estudiantes.

Tenemos que señalar que, en la mayoría de los casos, el uso de la tecnología aparece limitado a repetir esquemas que se aprenden en clase sin discusión, sobre todo en niveles superiores (últimos años de Secundaria y Bachillerato), por lo que debemos incidir en un uso centrado más en la enseñanza de los conceptos que en la enseñanza de las técnicas (Lagrange, 2005)

En este artículo se presenta una experiencia que se ha llevado a cabo dentro del programa de formación de futuros profesores de Matemáticas, en la Licenciatura de Matemáticas, como parte del curso de Didáctica de las

[**] NTCM (2003) Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de la SAEM Thales

Matemáticas II, en el que se incluyó un período de formación en el uso de la Calculadora Simbólica Voyage 200 con el objetivo principal de analizar sus posibilidades de uso y sus posibilidades didácticas. Es esencial el papel del profesor para que se realice un uso adecuado de las distintas herramientas tecnológicas, tal y como lo reflejan los Principios y Estándares de 2000:

"El uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende del profesor […]Los profesores deberían utilizar la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que se beneficien de lo que ella puede hacer bien y eficientemente: hacer gráficas, visualizar y calcular.[…]La tecnología no sustituye al profesor[…]El profesor desempeña varios papeles importantes en un aula bien equipada tecnológicamente; toma decisiones que afectan notablemente al aprendizaje de sus alumnos. En principio, puede decidir si emplea tecnología, cuándo y cómo hacerlo: Cuando los estudiantes utilizan calculadoras u ordenadores en clase, el profesor tiene oportunidad de observarlos y centrarse en su pensamiento". (NCTM, p. 27)

Conviene entonces, reconocer la necesidad de incluir dentro de los programas de formación de profesores una parte importante dedicada al trabajo con las TIC.

En este trabajo, nos proponemos:

- Analizar las destrezas adquiridas por nuestros estudiantes después de seguir el Programa de Formación con la calculadora simbólica.
- Analizar la capacidad de los estudiantes para resolver un problema de máximos y mínimos utilizando los diferentes entornos que nos ofrece la calculadora (algebraico-simbólico, gráfico, geométrico, numérico).

Todo ello con el objetivo fundamental de establecer, como parte de la formación de los futuros profesores de Matemáticas, un programa de formación con la calculadoras simbólicas que responda a las necesidades actuales de la educación matemática para la Secundaria.

Marco Teórico

En algunos países, el impacto de estas tecnologías ha llevado a dedicar un espacio de discusión e investigación emergente en el que han surgido elementos teóricos que ayudan a interpretar las dificultades y potencialidades que aparecen al introducir las TIC en el aula.

Por ejemplo, en Francia M. Artigue directora del IREM de París, ha liderado un grupo de investigación que ha tratado de explicitar la complejidad que tiene el proceso de enseñanza y aprendizaje al utilizar diferentes tecnologías y en particular las Calculadoras Simbólicas Voyage 200 (o TI-92), las cuales llevan implementadas software de Cálculo Simbólico (Derive), software de Geometría (Cabri y Geometer's Sketchpad) y otras utilidades.

Desde ese punto de vista (Trouche, 2004), (Guin, Ruthven y Trouche, 2005), (Artigue, 2002), establecen las bases de lo que se viene llamando recientemente la *Teoría de la Instrumentación* como un elemento que ayuda a organizar la enseñanza e interpretar el aprendizaje de los estudiantes. En este artículo se utilizan algunos elementos y términos propios de la Teoría de la Instrumentación. Desde este punto de vista, el aprendizaje en un entorno de trabajo con ordenadores se hace efectivo mediante un proceso que se denomina Génesis Instrumental, que es el proceso mediante el cual un instrumento resulta de la construcción hecha por un individuo, en un entorno práctico, sobre las base de un "artefacto" dado, que sería en esta caso la Calculadora Simbólica. La génesis instrumental combina dos procesos: el de Instrumentalización, donde el "artefacto" adquiere potencialidades para un uso específico y el de Instrumentación, donde es el sujeto el que se apropia de esquemas de acción instrumentada a partir del trabajo técnico y conceptual (Para más detalles véase Guin, Ruthven y Trouche, 2005).

Vamos a distinguir, en el análisis de las tareas que hemos propuesto a los estudiantes, dos tipos de errores: los errores instrumentales, que son aquéllos que se evidencian por una falta de destreza en el manejo de calculadora, y los errores conceptuales, que se producen cuando el estudiante realiza una o varias acciones que muestran una compresión errónea del concepto matemático tratado.

Metodología

La experiencia se desarrolló con un grupo de 18 alumnos de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas II, perteneciente a la Licenciatura de Matemáticas.

El Programa de Formación con la calculadora se llevó a cabo en cuatro sesiones de 1 hora durante una semana (la última del cuatrimestre). Se trataba de que los estudiantes resolvieran una serie de tareas por parejas. Además, fuera de clase, los estudiantes podían disponer de la calculadora, dado que se les entregó hasta el final de la experiencia.

Posteriormente, para realizar nuestro análisis, se desarrolló una sesión de dos horas con dos de las alumnas participantes que voluntariamente se prestaron a participar en la investigación. En esta sesión se trataba de que las alumnas resolvieran una actividad concreta sobre máximos y mínimos.

Las sesiones de enseñanza constaban de un conjunto de actividades que se describen a continuación:

En las dos primeras sesiones realizaron algunas actividades técnicas para aprender a usar con soltura diferentes entornos de trabajo de que nos provee la calculadora: algebraico-analítico, gráfico, geométrico y numérico. En las siguientes figuras (1, 2, 3, 4) se presentan algunas de las actividades desarrolladas:

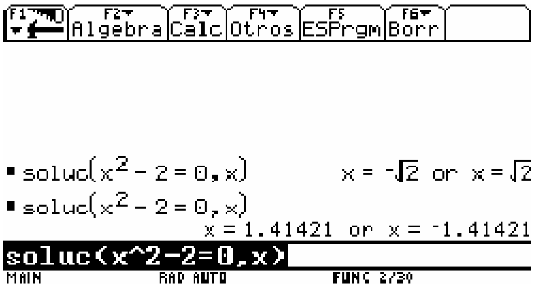


Fig. 1 Cálculo de las raíces de una ecuación de de 2º grado. (Entorno analítico-algebraico)

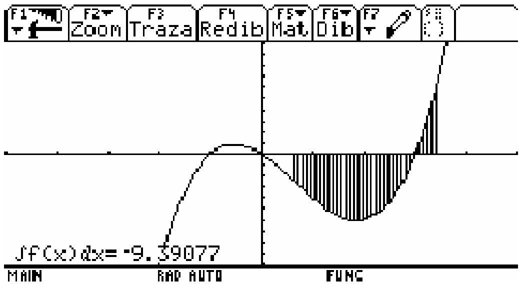


Fig. 2 Representación y cálculo de la integral definida de una función. (Entorno gráfico)

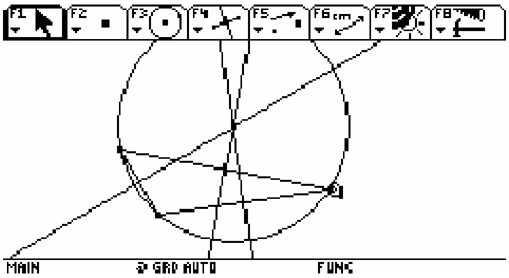


Fig. 3 Cálculo de la circunferencia circunscrita a un triángulo (Entorno geométrico)

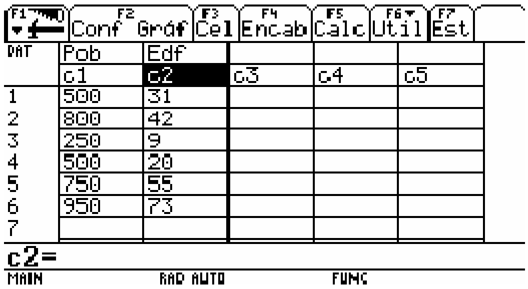


Fig. 4 Cálculo de la recta de regresión de dos variables (Entorno numérico)

La tercera y la cuarta sesión se dedicaron a realizar actividades de instrumentación, con la intención de que los estudiantes hicieran un uso "instrumentado" de la Calculadora Simbólica. En concreto, se resolvió un problema de optimización, en el que se pedía obtener, de todos los rectángulos isoperimétricos, el que posee mayor área.

Se resolvió primero el problema analíticamente en el **entorno algebraico-analítico** (*Fig. 5*), para posteriormente hacerlo en el **entorno geométrico**, haciendo la construcción de un rectángulo de dimensiones variables y de perímetro constante (*Fig. 6*).

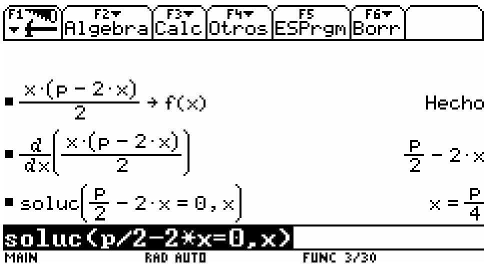


Fig. 5 Resolución analítica (Entorno algebraico-analítico)

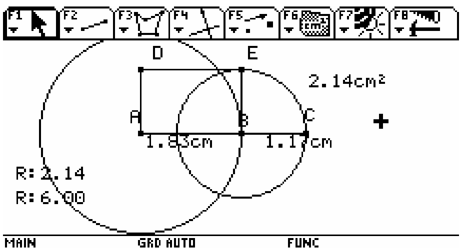


Fig. 6 Construcción de un rectángulo de perímetro constante. (Entorno geométrico)

Después de hacer una animación, se recogieron los datos de variación del área según el lado del rectángulo formando una tabla de valores (*Fig. 7*), para, a continuación, representar mediante una gráfica los valores de la tabla al objeto de obtener el valor máximo (*Fig. 8*). En trabajos anteriores de uno de los autores, se incluyen diversos problemas de variación cuya resolución está basada en argumentos similares destacándose en ellos la importancia de las diferentes representaciones del problema a la hora de obtener su solución (Camacho y González-Martín, 1998; Camacho y Santos, 2004).

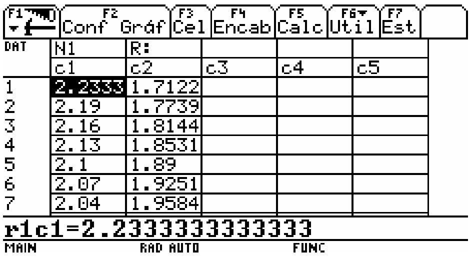


Fig. 7 Recogida de datos (Entorno numérico)

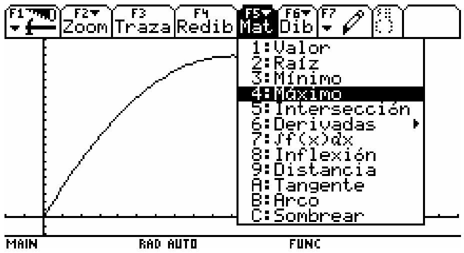


Fig. 8 Representación de los datos mediante una gráfica (Entorno gráfico)

Al final de la cuarta sesión se presentó a los estudiantes un cuestionario para analizar los estados de opinión sobre el uso de la Calculadora Simbólica, análisis del que nos ocuparemos aquí.

En la quinta y última sesión (2 horas), en la que sólo participaron las dos alumnas anteriormente mencionadas, se proporcionó un problema más complejo que el realizado en la sesión anterior para que lo resolviesen utilizando los diferentes entornos de trabajo utilizados, al objeto de analizar la capacidad de las estudiantes para resolverlo utilizando los diferentes entornos que nos ofrece la calculadora. El problema propuesto fue:

Cortando una soga de longitud L en dos trozos, construimos un cuadrado y una circunferencia. ¿Dónde debe hacerse el corte para conseguir que la suma de las áreas del cuadrado y el círculo sea máxima/mínima?

La resolución geométrica del problema no es del todo sencilla desde el punto de vista técnico. En las pantallas que se muestran en las figuras 9 y

10 se observan el cuadrado y el círculo construidos con los datos de las mediciones.

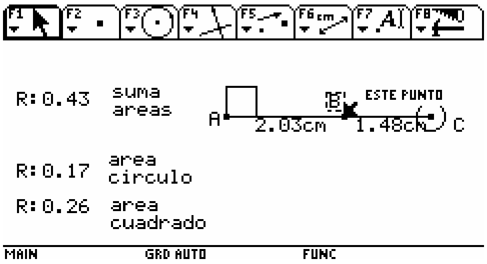


Fig. 9 En este momento la suma de áreas mínima.

Fig. 10 En este momento la suma de áreas es máxima.

Esta solución permite observar, desde un punto de vista intuitivo, cuándo se produce la suma de áreas máxima y mínima.

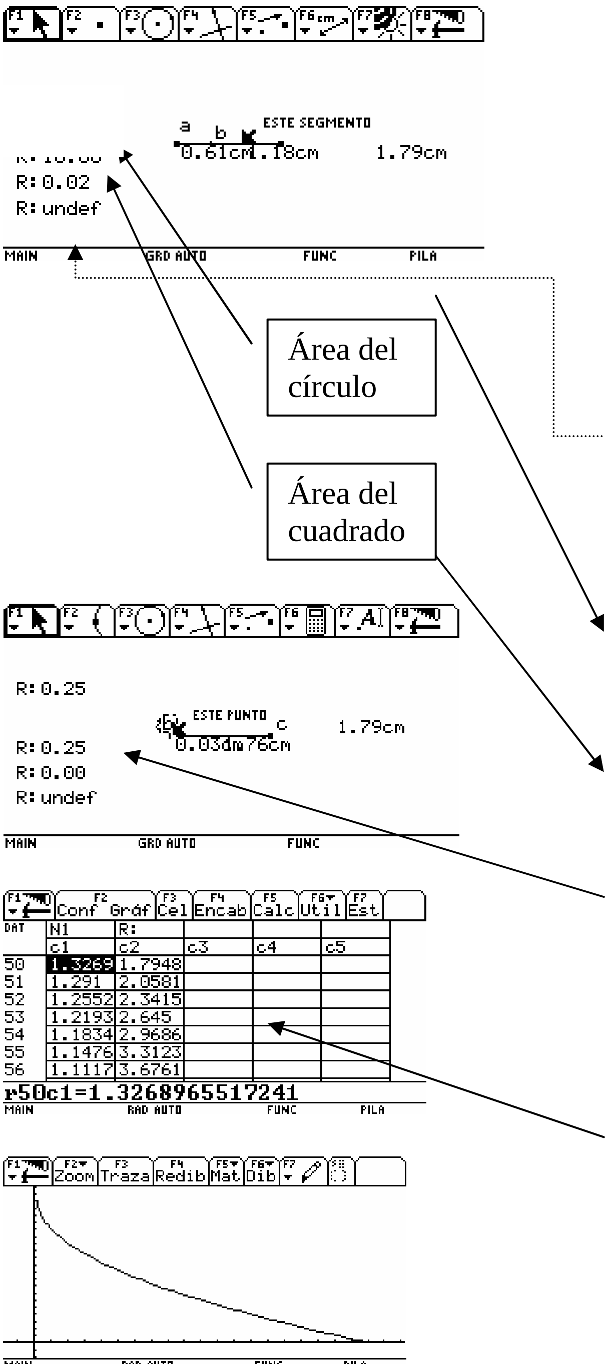
Análisis y discusión de los resultados

Se analizan aquí las respuestas de las 2 alumnas que accedieron a participar en la experiencia. Para resolver la actividad las estudiantes podían anotar las operaciones que fueran necesarias así como las dudas que les fueran surgiendo tanto sobre el uso de la calculadora como sobre el propio problema. Para analizar las respuestas dispusimos de:

- Las producciones de las alumnas, tanto el material guardado en la calculadora como las notas presentadas en el papel.
- Las video grabaciones hechas por 3 cámaras de video (una general y las otras dos para cada una de las calculadoras, una de las cuales estaba retroproyectada).
- Notas de la observación directa del trabajo de las estudiantes mientras resolvían la actividad propuesta en la cuarta sesión usando un guión de observación.

Utilizando la video-grabación, la observación directa del investigador y las pantallas de la calculadora hemos preparado la secuenciación del proceso de resolución. Posteriormente, con la ayuda de la video-grabación y de las anotaciones del investigador se analizan las dificultades, errores y correcciones hechas por la alumna al utilizar la calculadora. Observando también las anotaciones hechas por ella se establecen y clasifican los errores, y se explicitan los resultados y conclusiones que apunta.

Análisis de la resolución de la actividad: AL-1



Comienza a resolver la actividad utilizando la calculadora.

Dibuja un segmento que representa la soga y en ella dibuja un punto que se identifica con el corte que se le va a hacer; a partir de ahí, utilizando lápiz y papel, dibuja el segmento y lo parte en dos trozos y deduce el área del cuadrado.

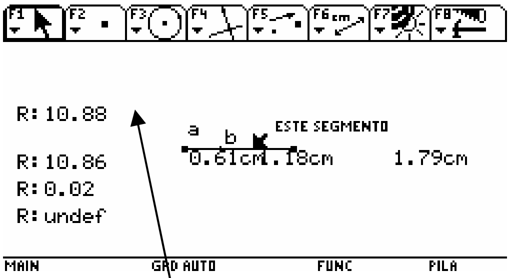
Error de manejo
En lugar de señalar las cantidades que va a sumar escribe directamente "a" y "b", por lo que la máquina le devuelve ***R: undef***

A partir de la longitud de los dos trozos de cuerda calcula el área del cuadrado y del círculo por separado en el papel y en la calculadora.

Conjetura la solución
Moviendo el punto "b" sobre el segmento indica que el área máxima se produce cuando sólo se construye una circunferencia con la soga

Error de manejo y de concepto
Sin haber calculado la suma de las áreas quiere guardar los datos de cada trozo de la cuerda con el área correspondiente.

Los representa gráficamente en unos ejes coordenados.



Suma de áreas

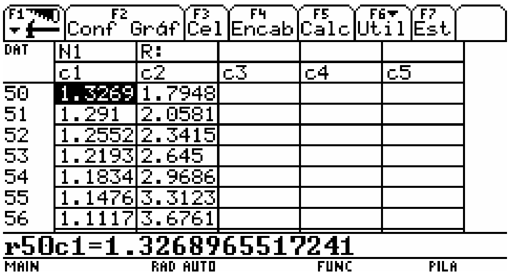
Error de concepto

Hace una consulta al investigador y se da cuenta de que no ha calculado la suma de las áreas, que es lo que le interesa.

Calcula la suma de las áreas del cuadrado y del círculo.

Error de manejo

Una vez calculada la suma quiere almacenar los datos obtenidos, pero en el proceso se olvida que, después de seleccionar los datos, debe dar la orden de almacenarlos y la calculadora le muestra los últimos que guardó, es decir, los correspondientes a un trozo de segmento y el área del círculo.

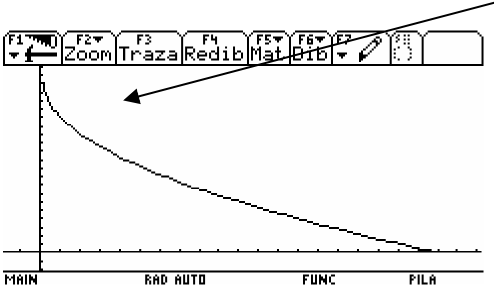


Datos anteriores

Pensando que ha almacenado los datos correctamente los representa en unos ejes coordenados.

Nueva conjetura

Viendo la gráfica concluye que existe un máximo cuando la cuerda se utiliza sólo para la circunferencia y un mínimo cuando se utiliza sólo para el cuadrado.



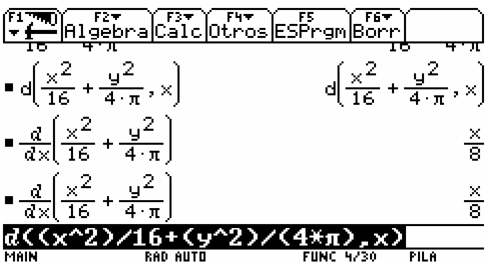
Vuelve a usar lápiz y papel y define la función suma de áreas.

$$Suma = \frac{l_1^{\,2}}{16} + \frac{l_2^{\,2}}{4\pi}$$

Error de concepto

No relaciona los dos trozos de la soga con su longitud, l.

Recurre a la calculadora para calcular la derivada de la función.



Error de concepto

Sigue sin relacionar las longitudes de los trozos de soga con la longitud total l.

Calcula varias veces la derivada e intenta dar sentido a lo que encuentra.

Conclusión de la alumna 1

"Si derivamos respecto de x e igualamos a cero, obtenemos que x =0. Luego, tendrá el valor de "suma máxima" cuando x=0, es decir, cuando el área del cuadrado sea 0 y la soga se utilice sólo para la circunferencia"

Observando de nuevo la gráfica añade: "El valor de "suma mínima" se obtendrá cuando el área del círculo sea 0, es decir, cuando toda la longitud de la soga sea para el cuadrado".

En definitiva y como síntesis de nuestros análisis se observa que:

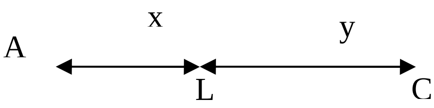
- La alumna comienza a resolver la actividad utilizando la calculadora para hacer una construcción geométrica. Prosigue con lápiz y papel para deducir las relaciones algebraicas entre los datos.
- Vuelve a la calculadora para obtener datos numéricos y trata de analizar y emitir conjeturas. Utiliza la calculadora para almacenar datos y representarlos gráficamente.
- Por último, recurre al lápiz y papel para definir la función que está utilizando y usa la calculadora en el entorno algebraico-analítico para resolver el problema analíticamente.

Se observa que la alumna tiene algunas dificultades con el manejo de la calculadora lo que provoca que cometa errores (**errores instrumentales**).

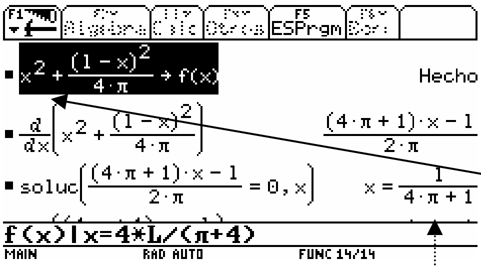
En este caso estos errores se han visto reforzados por otros cometidos en la resolución analítica (**errores conceptuales**).

La confianza en la máquina y en sus cálculos le llevan a persistir en el error.

Análisis de la resolución de la actividad: AL-2



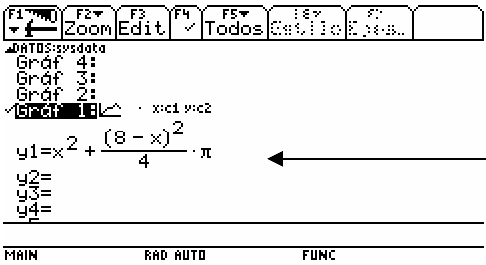
La alumna comienza a resolver la actividad con lápiz y papel, dibujando el segmento AC que representa la soga.



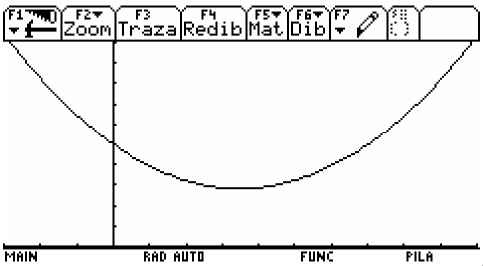
A continuación, haciendo uso de la calculadora, define la función suma de las áreas del cuadrado y del círculo.

***Error de concepto**: En el área del cuadrado.*
Calcula la derivada de la función e iguala la derivada a cero para obtener sus raíces.

***Error de concepto:** Anota en la hoja que busca el máximo de la función (solamente)*

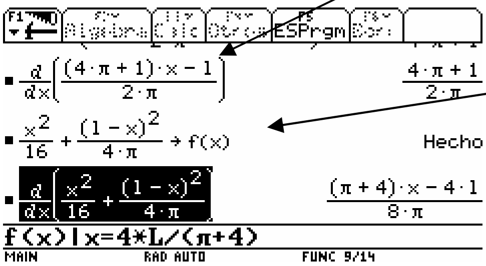


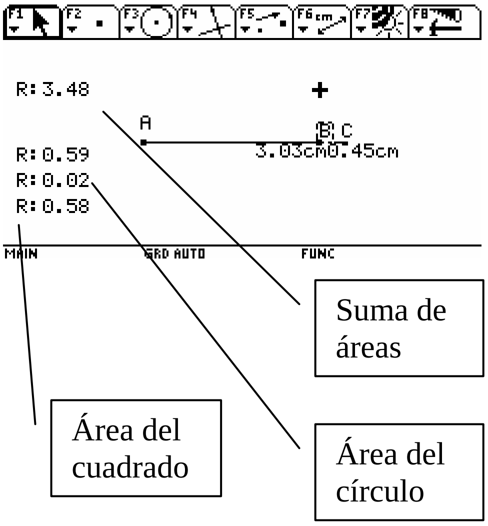
Representa la función definida por la suma de las áreas particularizado para l=8, pero con el error cometido al principio.



Calcula la segunda derivada de la función.

En ese momento se da cuenta. Corrige el error y define de nuevo la función, calcula su derivada y sus raíces.
Error de visualización
*Por unos momentos confunde la letra **l** con el valor **1**(uno).*





Utilizando el Cabri, calcula el área del cuadrado y del círculo y las suma.

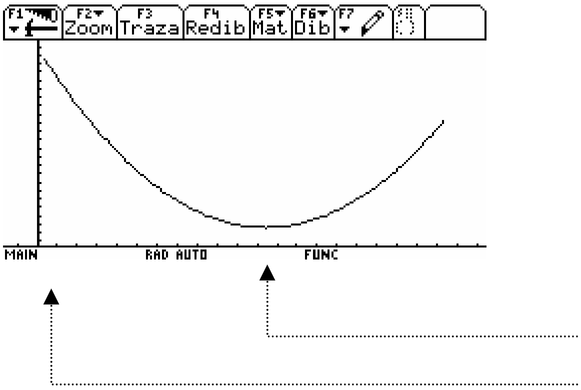
Almacena los datos de la longitud de una parte de la soga y la suma de las áreas. En este proceso tiene algunas dificultades y es necesaria la intervención de la observadora.

DAT	N1	R:					
	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
1	1.58	.445					
2	1.62	.441					
3	1.64	.438					
4	1.67	.436					
5	1.7	.434					
6	1.73	.432					
7	1.76	.43					

r1c1=1.5764065335753

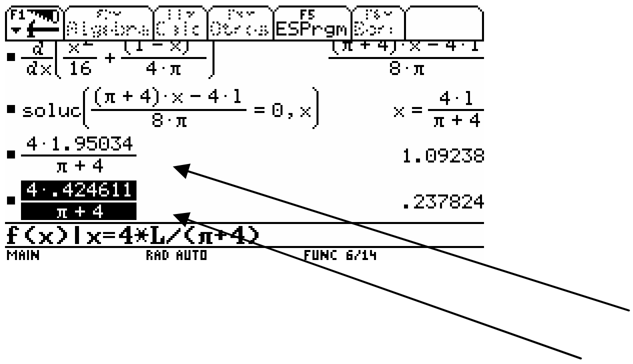
Representa gráficamente los datos almacenados.

*Viendo la gráfica, observa que tiene un **máximo** y un **mínimo** pero no entiende que en la resolución analítica haya obtenido sólo un punto crítico.*



En este momento quiere comprobar que el mínimo obtenido en esta gráfica coincide con el mínimo obtenido analíticamente.

Mide en el Cabri el trozo de cuerda y obtiene L=3,48, y en la gráfica comprueba que el mínimo se obtiene para el valor x=1,95034 y el máximo cuando x=0,424611.



La alumna ha obtenido analíticamente que $x = \dfrac{4L}{\pi + 4}$ *es un punto crítico, y gráficamente los valores x =1,95034 y x =0,424611 de máximo y mínimo. Debería sustituir la L por 3,48 y obtener que x =1,95034, pero sustituye L por 1,95034 y posteriormente por 0,424611.*

En definitiva y como síntesis de nuestros análisis se observa que:

- La alumna comienza a resolver la actividad utilizando lápiz y papel, pero solamente para dibujar un segmento que representará la soga; a continuación define las funciones y hace todos los cálculos usando la calculadora en el entorno algebraico-analítico. Posteriormente representa la función con ayuda de la calculadora y emite una conjetura sobre la solución del problema.
- Por un error de concepto debe volver sobre sus pasos y corregir la función definida. Con este paso resuelto pasa a la construcción geométrica del problema utilizando la calculadora. Con esta construcción, el almacenamiento de los datos en una tabla y su posterior representación llega a la conclusión que la función que se desea optimizar posee un máximo y un mínimo.
- Por último comprueba lo obtenido geométricamente con la función previamente definida en el entorno algebraico.

Con todo esto concluimos que la alumna tiene pocas dificultades con el manejo de la calculadora y ésta le permite, en el entorno geométrico, descubrir que el problema tiene una solución máxima y otra mínima, que en el entorno analítico no había sido capaz de encontrar.

Podemos resaltar algunas diferencias entre el comportamiento de ambas alumnas:

	Alumna 1	Alumna 2
Comienzo de la actividad	Calculadora	Lápiz y papel
Resolución de la actividad	Geométricamente	Analíticamente
Manejo de la calculadora	Dificultades	Con soltura
Conjetura la solución	Mínima	Máxima y mínima

La alumna 1 no es muy diestra con la calculadora (se equivoca en varias ocasiones), pero geométricamente conjetura una de las soluciones (la máxima). Posteriormente, y debido a una serie de errores debidos, tanto a la mala utilización de la calculadora como a errores conceptuales, da como válidos resultados erróneos

Conclusiones y recomendaciones

Del análisis de la experiencia desarrollada y dentro de las limitaciones propias de un estudio de estas características podemos establecer las siguientes conclusiones.

Pensamos que el período de formación debe ser más largo y espaciado, dejando a los estudiantes tiempo para familiarizarse con la calculadora y proponer ejercicios más sencillos en su resolución antes del problema propuesto. Como recomendación general, pensamos que no basta con dedicar solamente 4 horas a la formación y aprendizaje del manejo de la calculadora.

Del análisis de la resolución del problema observamos que la influencia de la instrucción anterior recibida por el estudiante es muy fuerte, dado que los alumnos tienen muy interiorizado el método de resolución analítico, del que les es difícil deshacerse. Tomamos como ejemplo el hecho de que las alumnas únicamente buscasen la solución mínima o máxima (en la mayoría de los problemas de optimización propuestos a los alumnos se busca la solución máxima o mínima exclusivamente, y no se contempla la posibilidad de que existan ambas).

Además, hemos podido observar que los alumnos se sienten más seguros resolviendo el problema en el entorno analítico.

Conviene señalar que la misma experiencia se llevó a cabo cuatro meses antes con otro grupo de alumnos con las mismas características, y en ese caso, la resolución de la actividad en el período de formación se hizo en orden inverso, es decir, primero se hizo la construcción geométrica de la figura y se resolvió geométricamente para después resolverlo de forma analítica, y sin embargo, no se han observado diferencias en la forma de abordar la resolución del problema propuesto (Camacho y Rojas, 2005).

Pese a que en un principio consideramos que era relevante para la resolución de la tarea empezar trabajando en el entorno geométrico para construir el cuadrado y el círculo, hemos optado por no prestar atención a tal hecho debido a las dificultades técnicas que acarreaba esta tarea concreta. Sin embargo, pudimos constatar que dos estudiantes que habían participado en la experiencia anterior (Camacho y Rojas 2005) fueron capaces de realizar la construcción geométrica esperada.

Agradecimientos

Los autores agradecen la colaboración de Mireia Saboya, alumna de doctorado de la Université du Québec à Montreal en el desarrollo y análisis de la parte experimental de esta investigación.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the dialectics between Technical and Conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7: 245-274.

Camacho, M.; Santos, L.M. (2004). El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 37:105-122.

Camacho, M.; González-Martín, A. (1998). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92 *Aula. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa.* 10: 137-152.

Camacho, M; Rojas, M. (2005). Una experiencia en formación de profesores de Matemáticas haciendo uso de Calculadoras Simbólicas. *XII JAEM* (pendiente de publicar).

Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (eds.) (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. Springer. New York.

Lagrange, J. B. (2005). Using symbolic calculator to study mathematics. En Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (eds.) (2005) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*, pp. 113-135. Springer. New York.

Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques : quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics* 55: 181-197.