FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
VOLUMEN VI, PÁGINAS 217-230
ISSN: 1885-2912

LUGARES GEOMÉTRICOS PINTORESCOS

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Con este trabajo pretendemos estudiar unas cuantas curvas cerradas, que tienen algún parecido con ciertos objetos o figuras de la vida real, como por ejemplo, el bicornio, la montera, la mariposa, el dirigible, etc.

Abstract

In this paper we study some closed curves that are similar to certain real life objects or figures, for example: the bicorn, the bullfighter's cap, the butterfly, the airship, etc.

Introducción

Mediante el Cabri-Géomètre II, trataremos de hallar unos cuantos lugares geométricos que tienen algún parecido con ciertos objetos de la vida real. Se trata de curvas planas cerradas, de 4º grado e incluso de mayor grado, que estudiaremos a continuación y que designaremos precisamente con el nombre del objeto real al que se asemejan.

Bicornio

En la fig. 1, se ha trazado una circunferencia de radio OA=a. M es un punto genérico de la misma. Las rectas EM y M'D se cortan en el punto Q. La perpendicular por Q a MD determina el punto P, cuyo lugar geométrico, cuando M recorre su trayectoria, es una figura denominada *bicornio.*

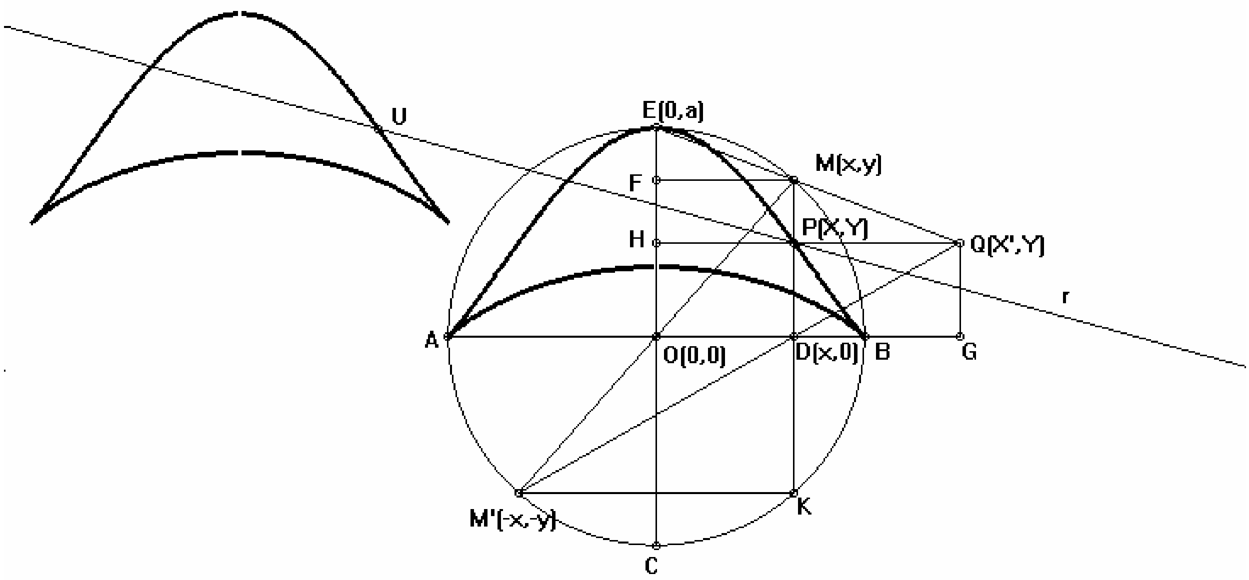

Fig. 1

La semejanza de los triángulos EHQ y EFM nos permite escribir:

$$\frac{a-Y}{a-y}=\frac{X'}{X}\rightarrow X'=\frac{X(a-Y)}{a-y}=\frac{X(a-Y)}{a-\sqrt{a^2-X^2}}; \qquad [1]$$

y la de los triángulos DM'K y QDG,

$$\frac{y}{2x}=\frac{Y}{X'-X}\rightarrow X'=\frac{X(2X+y))}{y}=\frac{X(2Y+\sqrt{a^2-X^2})}{\sqrt{a^2-X^2}}; \qquad [2]$$

igualando [1] y [2] y haciendo operaciones llegamos finalmente a la siguiente ecuación cartesiana del llamado bicornio:

$$Y^2(a^2-X^2)=(X^2+2aY-a^2)^2. \qquad [3]$$

<u>Nota interesante</u>: Los puntos de cualquier recta, sin ataduras previas, que pase por P, generan siempre el mismo lugar que P. En la figura anterior hemos elegido una recta cualquiera r y un punto genérico U de la misma. En realidad, esta operación equivale a trasladar el lugar geométrico generado por P mediante el vector PU.

El bicornio ha sido estudiado, junto con otras cuárticas, por los matemáticos Sylvester en 1864, Cayley en 1867 y Longchamps en 1897. Personajes ilustres como el Marqués de Lafayette y Napoleón I, entre otros, usaban, en algunas ocasiones, el bicornio como sombrero.

En la fig. 2, representamos otro bicornio, más alargado, hallando el lugar geométrico de P' (HP=PP'), cuando M recorre la circunferencia.

El lugar geométrico del simétrico P respecto de P' dará otro mucho más alargado. Todos tienen dos puntos comunes, el punto E y el otro punto de intersección con OE.

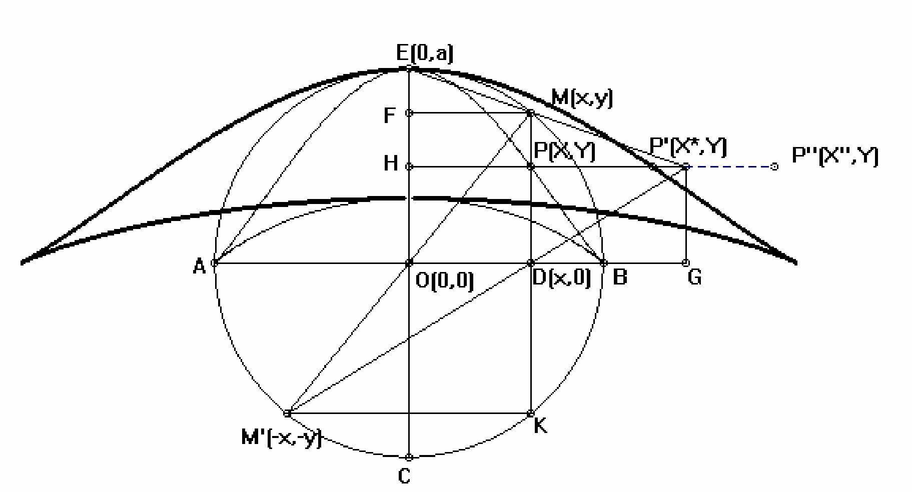

Fig. 2

Su ecuación cartesiana se deduce de la [3], al sustituir la variable *X* por *X/2*, ya que *X*=2X* , y dejando fija la *Y*. Por tanto, la ecuación tendría esta forma,

$$Y^2(a^2-\frac{X^2}{4})=(\frac{X^2}{4}+2aY-a^2)^2. \qquad [3\ bis]$$

A continuación daremos otro procedimiento gráfico para obtener el bicornio:

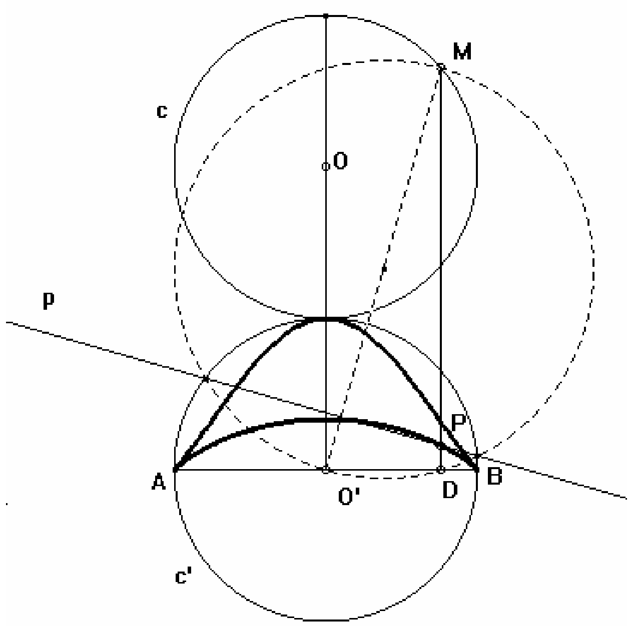

Fig. 3

Bastaría con trazar dos circunferencias tangentes exteriormente e iguales. Desde un punto cualquiera M de c trazamos una perpendicular al diámetro AB de la otra. La intersección de PD con la polar de P respecto de c' nos dará el punto P que va a generar el bicornio cuando M recorra c.

La montera

En la fig. 4 vemos como el punto Q genera una curva cerrada cuando M recorre la circunferencia y que recuerda a la *montera* de un torero.

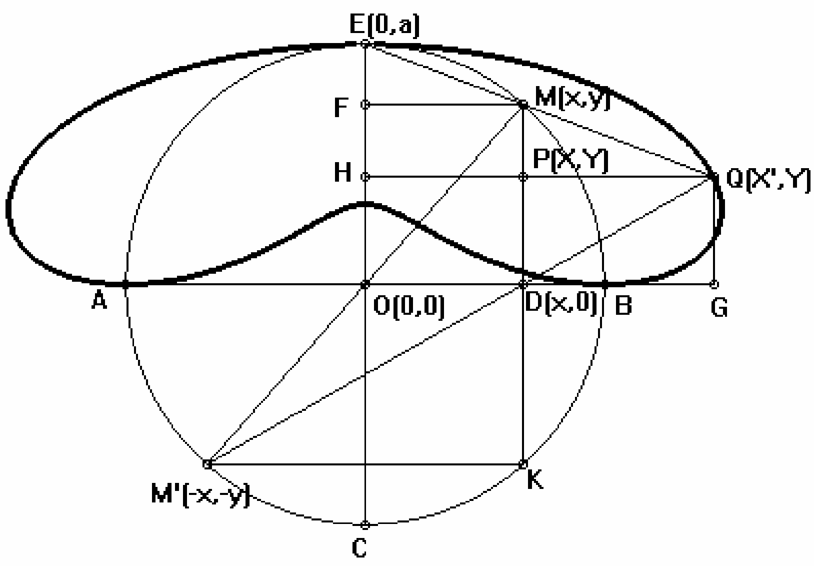

Fig. 4

Del mismo modo que en el caso anterior, el simétrico Q' de H respecto de Q genera una montera alargada (fig. 5).

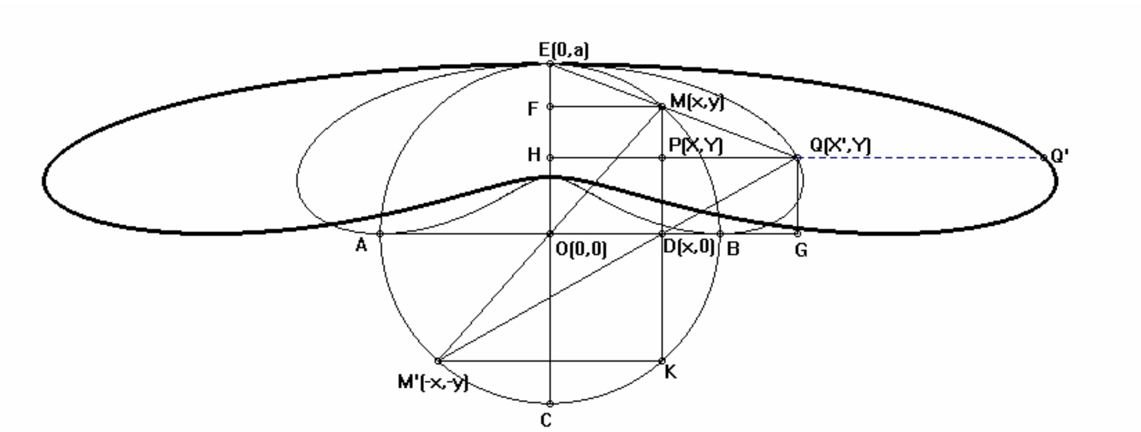

Fig. 5

La ecuación de la montera la abordaremos en un próximo trabajo.

El dirigible

En la fig. 6, el lugar geométrico está generado por los puntos Q y Q'.

O'A=O'Q'=O'Q= $\sqrt{(a+x)^2+y^2}$; $X = x+\sqrt{(a+x)^2+y^2}$;

$Y=-y$; $x=\sqrt{a^2-y^2}=\sqrt{a^2-Y^2}$;

$$(X-\sqrt{a^2-Y^2})^2=(a+\sqrt{a^2-Y^2})^2+Y^2 ;$$

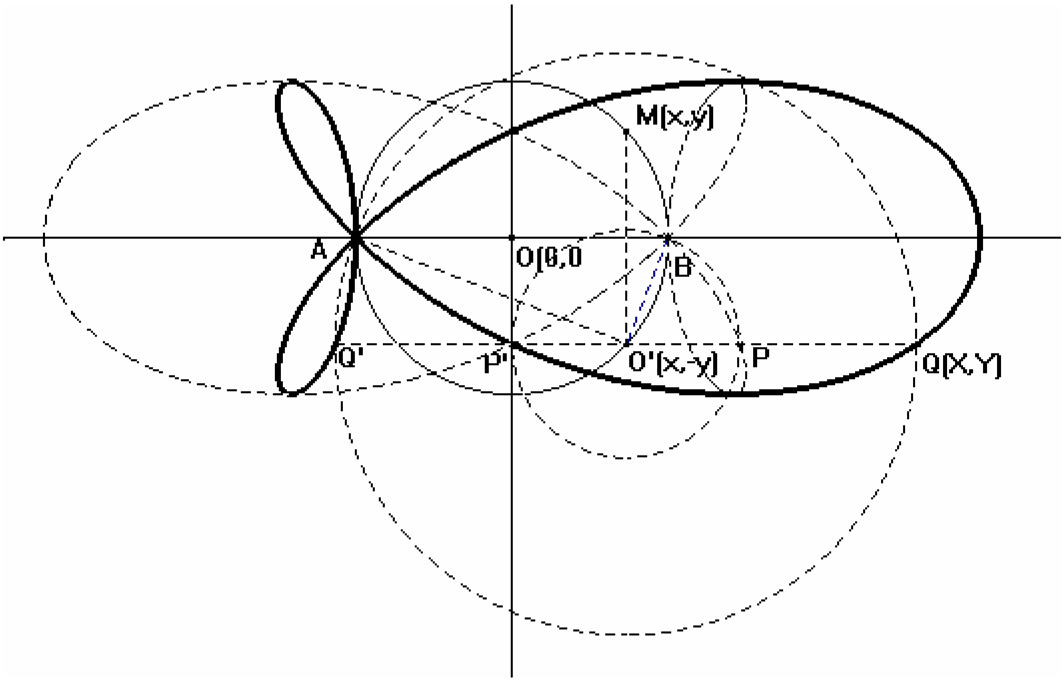

Fig. 6

haciendo operaciones, simplificando y quitando los radicales, queda finalmente para la ecuación cartesiana del lugar,

$$4(a+X)(a^2-Y^2)=(X^2-Y^2-a^2)^2 \qquad [4]$$

Los puntos P y P' dan la misma figura, pero simétricamente dispuesta respecto al eje de las ordenadas.

El pez

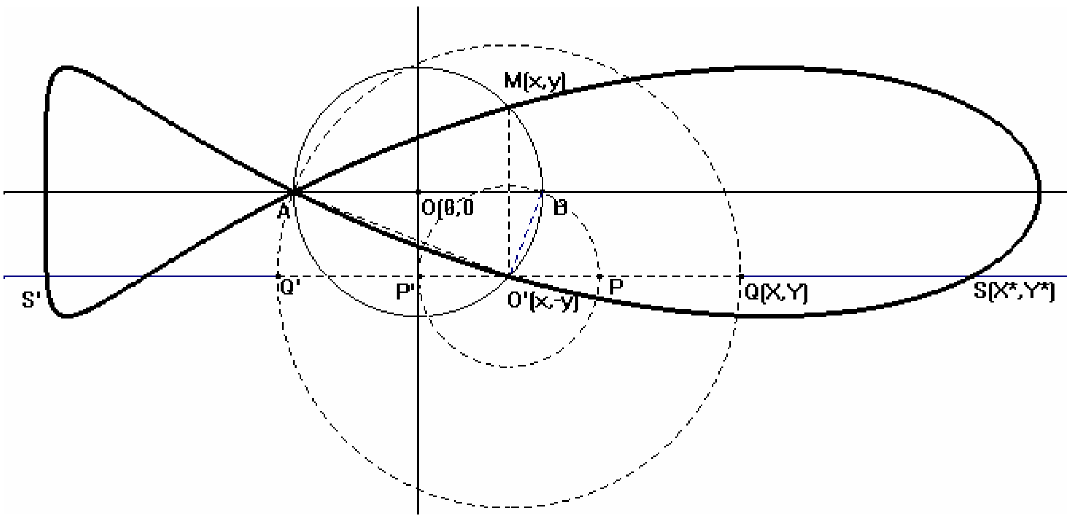

Fig. 7

S y S’ son los simétricos de O’ respecto de Q y Q’

Tanto S como S’ generan al pez cuando M recorre su trayectoria circular.

Siguiendo un camino análogo al anterior tendremos,

$Y^* = Y = -y;$

$X^* = x + 2\sqrt{(a+x)^2 + y^2}; x = \sqrt{a^2 - Y^{*2}};$

$(X^* - \sqrt{a^2 - Y^{*2}})^2 = 4((a + \sqrt{a^2 - Y^{*2}})^2 + Y^{*2})$; resultando

finalmente, $(X^{*2} - Y^{*2} - 7a^2)^2 = 4(4a + X^*)^2(a^2 - Y^{*2})$

[5]

que es la ecuación cartesiana del denominado pez.

En otros trabajos anteriores nos hemos referido a otras cuárticas: la peonza, la bala, los óvalos de Cassini, la lemniscata, etc., por lo que no las vamos a estudiar aquí: pero si vamos a considerar, para terminar, unas pocas curvas más que son de un grado superior al cuarto, concretamente de sexto grado.

La mariposa

Como se observa en la fig. 8, el punto P ha generado una figura, que recuerda a un par de alas de una mariposa, cuando M recorre la circunferencia c.

La semejanza de los triángulos OMD y SOG nos permite escribir la

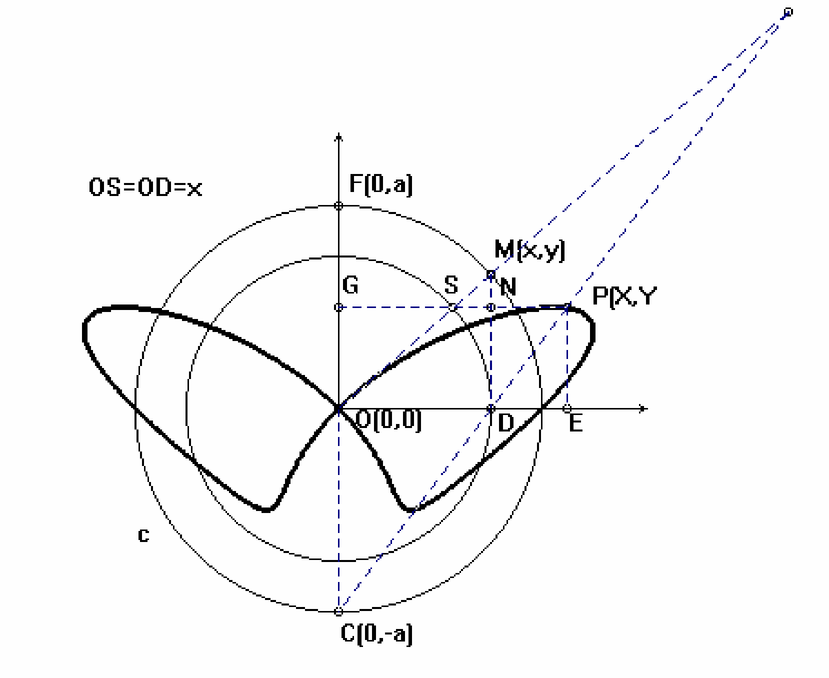

Fig. 8

siguiente relación: $\dfrac{y}{Y}=\dfrac{a}{x}$; y de la de los triángulos OCD y DPE, esta otra:

$\dfrac{a}{Y}=\dfrac{x}{X-x}\rightarrow\dfrac{a+Y}{X}=\dfrac{a}{x}$; de ambas podemos despejar *x* e *y*, resultando,

$x=\dfrac{aX}{a+Y}$, e $y=\dfrac{(a+Y)Y}{X}$; valores que sustituidos en $x^2+y^2=a^2$, nos da

la ecuación cartesiana de la mariposa,

$$(\frac{X}{a+Y})^2 + (\frac{Y(a+Y)}{aX})^2 = 1 \qquad [5]$$

que como puede comprobarse es de grado seis.

Veamos a continuación otras curvas que son de la misma familia que la mariposa, utilizando la operación simetría respecto a un punto.

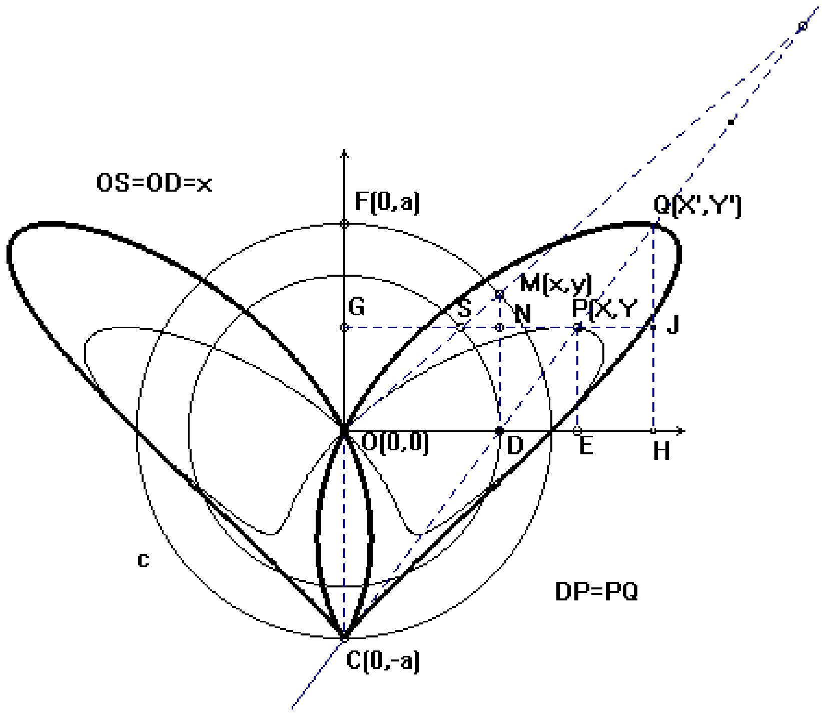

Fig. 9

En la fig. 9, hemos hallado el simétrico de D respecto de P. El punto Q (*X'*,*Y'*) generará el lugar que nos proponíamos. Su ecuación cartesiana se deriva de la anterior teniendo en cuenta que:

$Y' = 2Y,\ X' = X + (X - x)$ y

$$x = \frac{aX}{a+y}.$$

Despejando *X* e *Y* en función de *X’* e *Y’*, y simplificando, llegamos a la siguiente ecuación del lugar:

$$\left(\frac{X'}{a+Y'}\right)^2+\left(\frac{Y'(a+Y')}{2aX'}\right)^2=1 \qquad [6]$$

La siguiente curva de la familia se conseguirá mediante el simétrico de P respecto de Q; o sea, mediante T. Ahora *Y’’= 3Y* y *X’’=X+2(X-x)*. Siguiendo un camino análogo al anterior resultará la siguiente ecuación cartesiana:

$$\left(\frac{X''}{a+Y''}\right)^2+\left(\frac{Y''(a+Y'')}{3aX''}\right)^2=1 \qquad [7]$$

Por tanto, la ecuación general, prescindiendo de las ‘primas’, sería:

$$\left(\frac{X}{a+Y}\right)^2+\left(\frac{Y(a+Y)}{naX}\right)^2=1 \qquad [8]$$

donde *n* representaría el número de veces que se ha utilizado el segmento DP. Para *n=1*, se obtendría la ecuación [5] de la mariposa inicial.

Y ya, para terminar, resaltamos una curiosa observación: los puntos de toda recta que pase por M y por P, generan una serie de curvas curiosas que estudiaremos próximamente. Reproducimos las generadas por dos de sus puntos, U y V (figs. 11 y 12), dada sus llamativas formas. Indudablemente, si arrastramos cualquiera de esos puntos con su curva sobre la referida recta, cuando pasa por P reproducirá la mariposa.

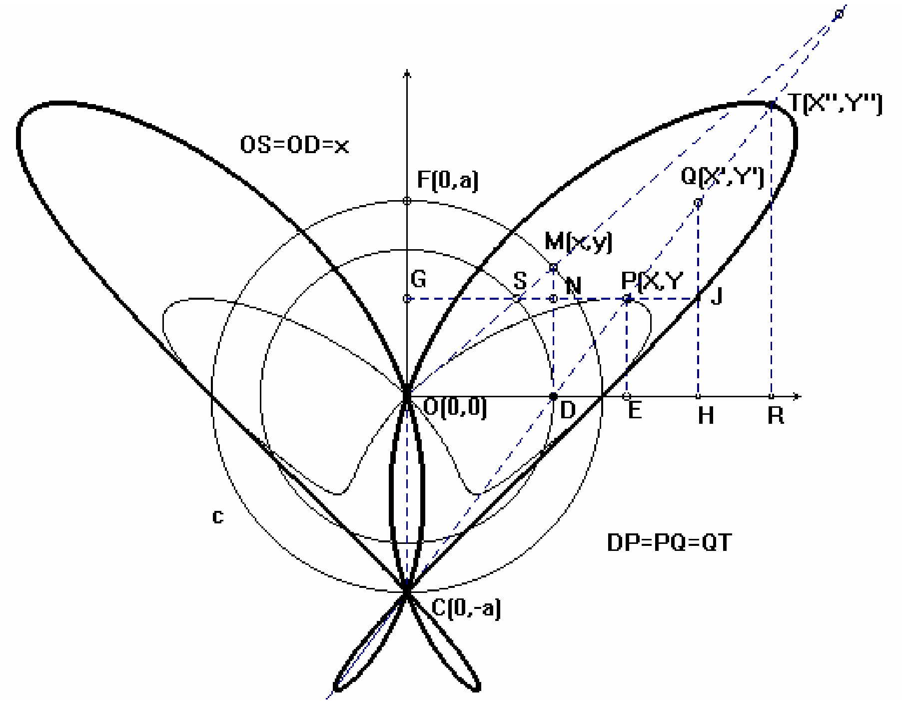
OS=OD=x
F(0,a)
M(x,y)
G
S
N
P(X,Y)
J
Q(X',Y')
T(X'',Y'')
O(0,0)
D
E
H
R
c
DP=PQ=QT
C(0,-a)

Fig. 10

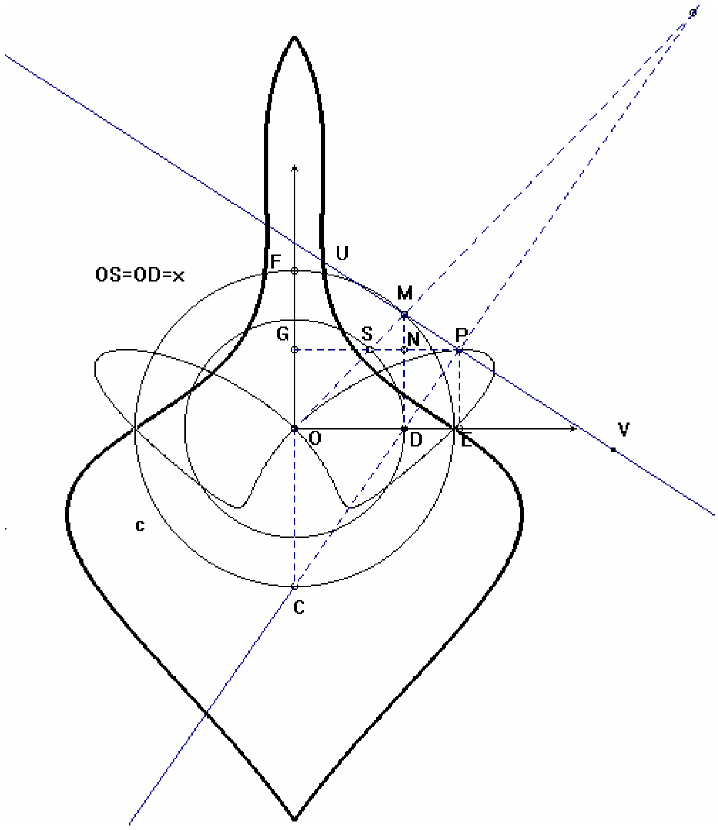
OS=OD=x
F
U
M
G
S
N
P
O
D
E
V
c
C

Fig. 11

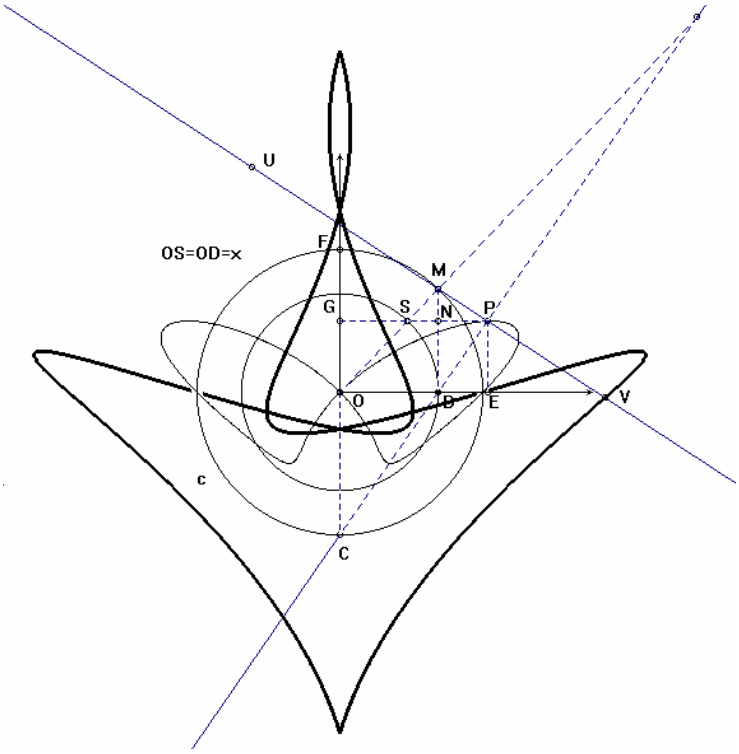

Fig. 12

Lo mismo sucedería con los puntos de la recta que pasa por M y Q. Las figs. 13 y 14 han sido generadas por los puntos U y V de la recta MQ.

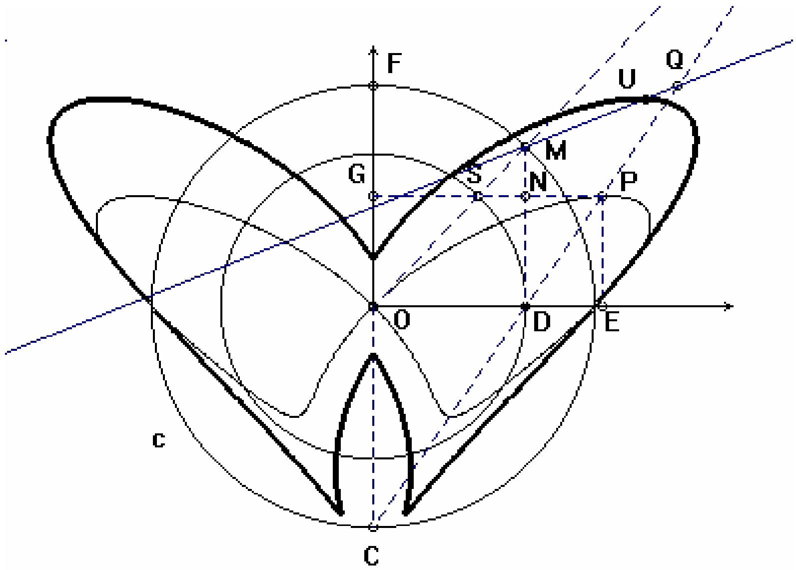

Fig. 13

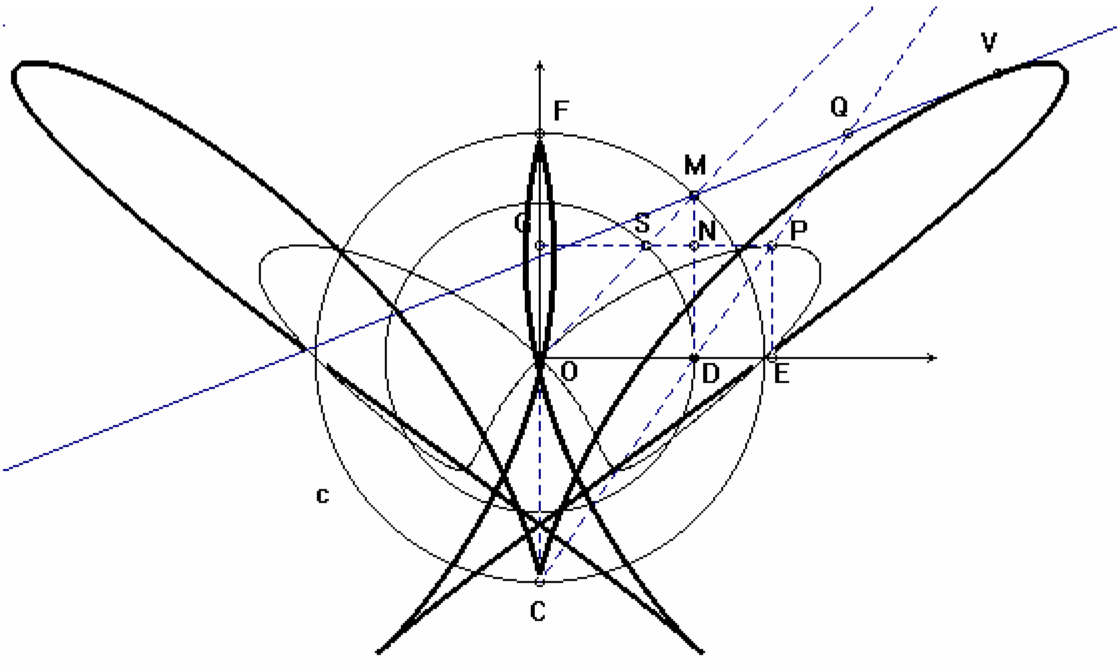

Fig. 14

Referencias bibliográficas

Cámara Tecedor, S. (1945). *Elementos de Geometría Analítica*. 3ª edición. Madrid.

http://mathworld.wolfram.com/Bicorn.html