



SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS¹

Josefa Hernández Domínguez
Aurelia Noda Herrera
M^a. Mercedes Palarea Medina
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de una prueba sobre resolución de problemas aplicada a un grupo de alumnos del Título de Maestro en la especialidad de Educación Infantil.

La prueba consta de ocho problemas de contenidos aritméticos; geométricos (medida) y algebraicos, bien y mal definidos. Los enunciados de los problemas se presentaron en diferentes sistemas de representación: digital, analógica y situada.

Los resultados muestran que este grupo de alumnos trata de utilizar la representación digital en la resolución de problemas, independiente de su estructura superficial del mismo, sin embargo, en los problemas de contenido geométrico el mayor porcentaje de aciertos se da en aquellos casos en los que los alumnos recurren a representaciones diferentes a la digital.

Abstract

In this work we present the results of a test about solving problems applied to a group of Teacher Training pupils in the speciality of Childhood Education.

The test consists of eight problems, well and not well defined, on the: arithmetic, geometric (measure) and algebraic contents. The stories of the problems were presented in different representation systems: digital, analogical and located.

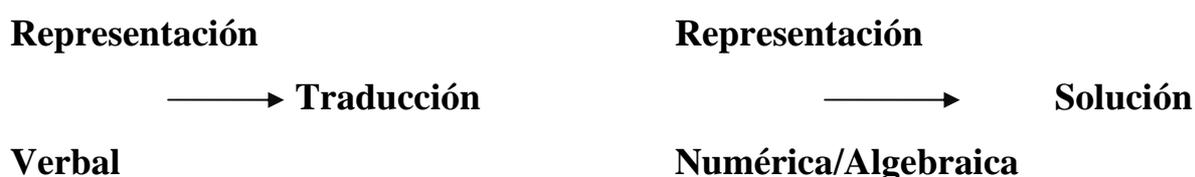
The results show that this group of pupils tries to use the digital representation in solving problems, independently of its superficial structure. However, in the problems of geometric content the highest percentage of success is produced in those cases in which the pupils appeal to representations that differ from the digital one.

¹ Este trabajo ha sido financiado por la Universidad de La Laguna, con cargo al Proyecto de Investigación: “El uso de diferentes sistemas de representación en la resolución de problemas de Matemáticas” (PI 1802010303).

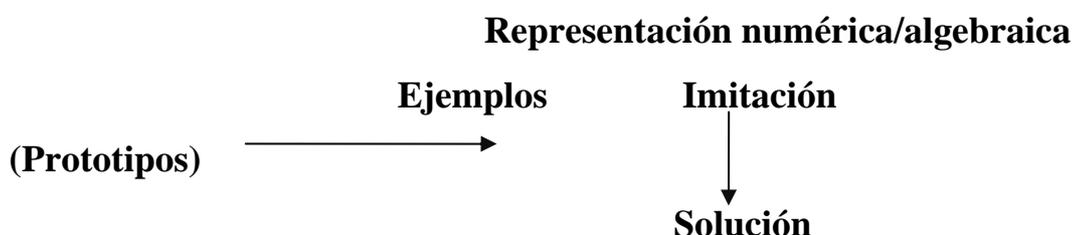
Introducción

La forma tradicional de resolver los problemas matemáticos se plantea, en general, como el paso de un sistema de representación sintáctico-verbal a un sistema de representación formal, esto es, partiendo de la lectura del enunciado, el alumno ha de elegir y ejecutar una o varias acciones, que se concretan en la realización de operaciones aritméticas, aplicación de fórmulas o resolución de ecuaciones, entre otras.

Esto es, el tratamiento que los problemas matemáticos reciben, tanto en la instrucción del profesor como en los libros de texto, sigue, en general, el siguiente modelo de competencia:



y el modelo de implementación en el aula suele seguir un esquema similar a:



De esta forma, la resolución de problemas se convierte, como afirman muchos alumnos en una actividad mecánica donde el objetivo es elegir y ejecutar cálculos aburridos.

Un análisis de los libros de texto de Primaria y Secundaria de la LOGSE, muestra, en general, como la mayoría de los ejemplos van acompañados de representaciones pictóricas que intentan aportar luz sobre el enunciado, pero que no constituyen en sí un sistema de representación, e incluso podemos poner en

duda la información que arroja sobre el problema; realmente su función parece ser más estética que la de denotar y connotar un objeto matemático concreto.

Un buen ejemplo del papel de las representaciones en los currículos de Matemáticas nos lo muestran los Principios y Estándares (NCTM, 2000) que señalan sobre las representaciones en su estándar número 10:

Los programas instruccionales en Matemáticas deben enfatizar las representaciones matemáticas para favorecer la comprensión matemática, de forma que todos los estudiantes:

- Creen y utilicen representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.
- Seleccionen, apliquen y traduzcan representaciones matemáticas para resolver problemas.
- Usen representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

En la actualidad, la mayoría de los currículos de Matemáticas considera el uso de diferentes representaciones para un objeto matemático como una habilidad de pensamiento importante, ya que el mismo medio de representación sirve no sólo como instrumento de comunicación, sino también de razonamiento. Por ejemplo, el empleo de un sistema numérico refuerza y ayuda al desarrollo de la interpretación de la realidad en términos de cantidades, el uso de tablas de doble entrada, que no son más que formas de organizar y presentar datos, es una herramienta muy útil en muchos casos para clarificar las propias percepciones, la visualización de los conceptos matemáticos es fundamental para su comprensión.

Debemos señalar que las conexiones matemáticas constituyen hoy uno de los objetivos esenciales de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Estas

conexiones tienen una doble dimensión: conexiones internas de las Matemáticas y conexiones externas. Entre las conexiones internas tenemos las conexiones entre representaciones equivalentes y entre los correspondientes procesos de cada una, y, entre las conexiones externas, tenemos las conexiones en la elaboración de modelos para situaciones del mundo real o para situaciones que se dan en otras disciplinas.

El uso de diferentes representaciones plantea un problema fundamental relacionado con las conexiones entre ellas. Lesh, Post y Behr (1987) describen los distintos papeles de las representaciones y las conexiones, destacando el importante papel que representan en el aprendizaje matemático y en la resolución de problemas. Una de las conclusiones que obtienen de sus investigaciones es que los niños tienen dificultades en la comprensión de los problemas verbales, en los cálculos, pero también es deficiente su comprensión de los modelos y lenguajes necesarios para representar (describir e ilustrar) y manipular estas ideas. Además, las deficiencias en las traslaciones de una representación a otra influyen en el aprendizaje y la resolución de problemas, mientras la mejora en estas habilidades potencia la adquisición y el uso de las ideas matemáticas elementales (p. 36).

Es importante recordar que cuando los estudiantes son capaces de trasladar una misma situación problema a diferentes representaciones, tendrán a un tiempo un conjunto potente y flexible de herramientas para resolver problemas y un aprecio más profundo por la coherencia y belleza de las Matemáticas.

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen cada vez más una importante línea de investigación. Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las

representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (De Vega, 1984). Igualmente importante es la relación entre las representaciones y la resolución de problemas de Matemáticas.

En concreto, el dominio de las Matemáticas necesita de la capacidad de representar en diferentes códigos y de ser hábil para cambiar de un código a otro. Además una adecuada representación matemática se basa en un correcto análisis y abstracción previos. Por ello cuando las representaciones son consideradas herramientas con fines concretos, tanto para la comunicación como para la comprensión, adquieren un carácter estratégico para resolver problemas y situaciones.

El propósito de este trabajo es analizar el uso que dan un grupo de alumnos de la Facultad de Educación a las diferentes representaciones semióticas en la resolución de problemas de Matemáticas. El estudio muestra los resultados de una prueba propuesta sobre resolución de problemas de Aritmética, Geometría (Medida) y Álgebra, bien y mal definidos, a una muestra de 31 alumnos de la Titulación de Maestro en la especialidad de Educación Infantil. Los enunciados de los problemas se presentan, alternando, diferentes representaciones: digitales, analógicas y situadas.

El análisis y la discusión de los resultados se realiza desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (Teoría ELOS, Socas, 2001).

Los resultados muestran el bajo nivel de conocimientos matemáticos básicos de los alumnos, como ya se ha observado en estudios precedentes, así como el predominio de las representaciones digitales en la resolución de problemas frente a las otras representaciones, consecuencia probable de que la instrucción matemática recibida está centrada en estas representaciones digitales. Se observa, igualmente, que los problemas presentados de forma analógica les

crean muchas dificultades a los alumnos, cuando éstos se dejan influenciar por el dibujo.

El trabajo se estructura para su presentación en los siguientes apartados: Representaciones, Diseño, objetivos y conjeturas, Metodología y plan de trabajo, Análisis y discusión de datos y Consideraciones finales.

Representaciones

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra *representación* en relación con el aprendizaje, la enseñanza y el desarrollo de las Matemáticas. Por ejemplo, Janvier (1987), citando un estudio de Denis-Dubois (1976), apunta que en la literatura psicológica se usa el término *representación*, al menos, en los tres caminos siguientes:

- 1) Como una organización material de símbolos, tales como diagramas, gráficas, esquemas, que se refieren a otras entidades o que actúan como modelos de procesos mentales.
- 2) Como una organización del conocimiento en el “sistema mental humano” o en la memoria a largo plazo.
- 3) Solamente como imágenes mentales que el individuo puede formar, siendo éste un caso especial del anterior. El hecho de considerarlo como una tercera forma se debe a la importancia de la investigación en este dominio y a su claro marco teórico.

El propio Janvier se identifica con la primera definición, cuando habla de “esquemas o ilustraciones”, y con la segunda, cuando habla de “concepción”. Para él, una representación sería como una especie de estrella-iceberg que mostraría sólo una punta cada vez. Esta descripción de representación tiene la ventaja de insistir en el carácter inseparable que tiene un conjunto de esquematizaciones.

En el segundo camino, los psicólogos se dividen en dos corrientes: los que apoyan la hipótesis dual de Paivio, que sostiene la existencia de dos formatos representacionales: el sistema verbal y la imaginación, y los que proponen un único formato representacional abstracto, semántico y proposicional que subyace como sustrato común a las palabras e imágenes (de Vega, 1984).

Un concepto de representación comúnmente usado en educación Matemática es el que propone Kaput (1987) *cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Habiendo, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirán las siguientes cinco entidades:*

- 1) *el mundo representado.*
- 2) *el mundo representante.*
- 3) *qué aspectos del mundo representado han sido representados.*
- 4) *qué aspectos del mundo representante hacen la representación.*
- 5) *la correspondencia entre los dos mundos.*

En Goldin (1993) encontramos un amplio resumen de las múltiples interpretaciones dadas a este término por los componentes del grupo que trabajó sobre representación en los diferentes Congresos del PME. De esta manera el término representación aparece como:

a) Soportes físicos, externos (incluyendo entornos de ordenador): Una situación física estructurada y externa o un conjunto de situaciones que pueden ser descritas matemáticamente o vistas como un soporte de una idea matemática (p.e. la línea numérica).

b) Soportes lingüísticos: Aspectos verbales, sintácticos y semánticos del lenguaje en los que los problemas son propuestos y con los que se pueden

discutir los conceptos matemáticos.

c) Construcciones matemáticas formales: Un significado diferente de “representación”, que enfatiza el entorno del problema externo al individuo, sería una estructura formal o un análisis matemático de una situación. Aunque hay un sentido en el cual las Matemáticas pueden ser vistas como “internas”, el énfasis se pone en la “representación” como una herramienta analítica para formalizar o precisar ideas matemáticas o conductas matemáticas.

d) Representaciones cognitivas internas: Aspecto muy importante, que incluye las representaciones individuales internas de los estudiantes, de sus ideas matemáticas, tales como áreas, funciones, así como los sistemas de representación cognitiva en sentido amplio, que pueden describir los procesos del aprendizaje humano y de la resolución de problemas. En los últimos años, diferentes investigaciones (Presmeg, 1985) están destacando la importancia que tiene el uso de métodos visuales en la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles, de forma que faciliten a todos los alumnos la comprensión y, en particular, a aquellos visualmente orientados. La idea de visualización la planteamos, en el sentido usado por Presmeg (1985), como una forma de utilizar diagramas para comprender y resolver los problemas. Uno de los trabajos pioneros en este campo es el de Krutetskii (1969, 1976), considerado como uno de los estudios más notables sobre las habilidades individuales utilizadas en resolución de problemas. Krutetskii, después de un estudio de 12 años, publicó su trabajo donde *clarifica los hechos que caracterizan la actividad mental de aquellos alumnos dotados para las matemáticas al resolver problemas variados* (p. 78). Encontró, entre otros, que los estudiantes al resolver un problema aíslan tres aspectos importantes: las relaciones funcionales entre los datos esenciales, las cantidades no esenciales para el problema tipo, pero necesarias para una variante específica, y las cantidades extrañas que no son necesarias. Del análisis

de las soluciones de los problemas concluyó que aparecen tres tipos de estudiantes: analíticos, geométricos y armónicos.

El tipo analítico comprende a aquellos estudiantes que siempre resuelven los problemas mediante cálculos o ecuaciones, procurando no tener que apoyarse en diagramas o dibujos geométricos. El tipo geométrico, por el contrario, trata de plasmar sus razonamientos en dibujos y diagramas. Y, finalmente, el tipo armónico mantiene un equilibrio entre sus razonamientos analíticos y los gráficos o visuales.

Goldin (1987) formalizó dentro de su *Model for Competency in Mathematical Problem Solving*, basado en el procesamiento de la información, los cinco sistemas de representación, planteando la importancia de su uso y, en particular, de los sistemas de representación no verbales, como un procedimiento alternativo a la resolución de problemas por traducción directa.

Duval (1993, 1995) distingue entre lo que llama objetos matemáticos y sus representaciones, y sostiene que estas últimas tienen un papel indispensable en la aprehensión del objeto o concepto matemático. Hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a significado y funcionamiento, y es esencial en la actividad matemática poder movilizar varios registros en el curso de una misma acción, o bien poder elegir un registro en vez de otro.

Según este autor para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas:

1. La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
2. El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ésta ha sido formada.

3. La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro, en el cual conserva la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

Duval afirma que existen tres razones que confirman que el dominio y la coordinación entre varios sistemas de representación es fundamental para el pensamiento humano:

- La economía de tratamiento, pues hay facetas de un concepto que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otro.
- La complementariedad de los sistemas, ya que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa.
- La necesidad de coordinación de registros de representación para la conceptualización, pues la comprensión reposa sobre la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación.

La representación en el enfoque Lógico Semiótico

En este trabajo consideramos la noción de Representación desde la perspectiva del enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001) en el que la representación aparece como el elemento determinante en el análisis semiótico. La Semiosis debe ser entendida como un triple proceso: de generación de signos (productor de signos), de acciones del signo (signo-acción), y de inferencia. El análisis semiótico será el estudio del funcionamiento de esa semiosis.

De esta manera, la designación de un objeto matemático mediante un signo es un proceso de inferencia (semiosis) por el cual la representación determina en quien la recibe una interpretación mental que consiste en remitir la representación al objeto que ésta representa.

Conviene, entonces, caracterizar lo que entendemos por representación ya

que esta noción es la que nos permitirá realizar el análisis semiótico.

El enfoque Lógico Semiótico (teoría ELOS) toma en consideración la Fenomenología de Peirce (1987) y la adapta para analizar y comprender, planificar y gestionar, las situaciones problemáticas o fenómenos didácticos matemáticos en Educación Matemática. Por ejemplo, la noción de signo es considerada en un primer momento como:

“Un Signo o Representamen es algo que representa algo para alguien en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente o, quizás aún más desarrollado. A este signo creado, yo lo llamo el Interpretante del primer signo. El Signo está en lugar de algo, su Objeto. Representa a este objeto no en todos sus aspectos, pero con referencia a una idea que he llamado a veces el Fundamento del Representamen” Peirce (1987).

El Signo se presenta para Peirce como una genuina relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo aparece en su propuesta relacionado con tres instancias separables analíticamente: Interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta), Objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento), Fundamento del Representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que lo conecta con el objeto).

La propuesta semántica de Peirce se fundamenta en el hecho de que un signo obtiene su significado por su necesaria referencia a otros signos, es decir, el significado de un signo no es otra cosa que el conjunto de signos que permiten desarrollarlo y explicitarlo.

En consecuencia adoptamos la siguiente posición en este enfoque: todo signo pertenece a un sistema de signos y en él puede ser analizado y comprendido (condición de la significación), pero no todos los signos funcionan idénticamente ni dependen de un único sistema. Es necesario caracterizar diferentes sistemas de signos y establecer en ellos una relación de diferencias y analogías.

Para analizar desde esta perspectiva la construcción y el aprendizaje del conocimiento didáctico matemático necesitamos de dos nociones primitivas. La primera se refiere a las “situaciones problemáticas” o “fenómenos didácticos matemáticos”, y se describe como cualquier circunstancia en la que se pueden realizar actividades de matematización (Freudenthal, 1991), o actividades de profesionalización matemática. La segunda es que cualquier sistema didáctico debe estar organizado en torno a la triada primaria (triada epistemológica): “Contexto”, “Referente” y “Significado”. Las razones que justifican esta elección están, entre otras, en que:

- Todo fenómeno didáctico matemático necesita tener en cuenta un Contexto para determinar a qué se refiere, es decir, se necesita una referencia contextual, en la que el Contexto determina la cualidad del fenómeno o situación problemática.

- El fenómeno o situación problemática remite a un conjunto de objetos, el Referente está constituido por cada uno de los elementos de dicho conjunto. El Referente determina la relación real del fenómeno con los objetos.

- El Significado estará formado por las descripciones asociadas a las relaciones que se dan en el conjunto de objetos a los que remite el fenómeno o la situación problemática.

Se entenderá que el significado es atribuible tanto a los objetos como a las relaciones entre los objetos en relación con la situación problemática o fenómeno.

En este sentido el modelo de competencia que describe la noción de representación en el Enfoque Lógico Semiótico viene dado por el contexto (en término general se refiere a ciertos aspectos del Microsistema Educativo); los referentes: signo, objeto y significado; y las tres relaciones esenciales que se dan entre los referentes: signo-significado, signo- objeto y objeto-significado.

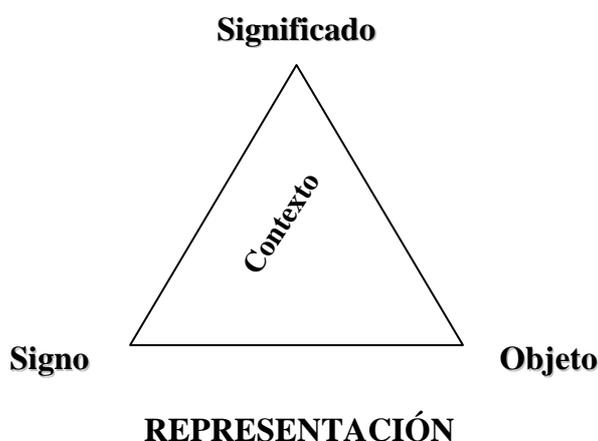
De manera que la noción de representación en el enfoque Lógico Semiótico es una adaptación que deriva del concepto de semiosis en Peirce y está descrita por el modelo de competencia caracterizado por el Contexto, los tres referentes y las tres relaciones esenciales. De manera más concreta, en un contexto determinado, la representación es un Signo que:

(1) Tiene ciertos caracteres que le son propios

(2) Establece una relación diádica con el significado

(3) Establece una relación triádica con el significado a través del objeto; esta relación triádica es tal que determina al signo a una relación diádica con el objeto y al objeto a una relación diádica con el significado.

A efectos de claridad podemos modelizar la noción de representación mediante la siguiente relación triangular:



La noción de representación pone, como hemos dicho, en relación el objeto matemático con el signo y el significado. Debemos tener en cuenta que la cualidad del signo es la representación y sus diferentes formas, y que además, podemos establecer relaciones entre el signo y el objeto matemático, y entre el signo y el significado. El objeto matemático debe ser entendido en su relación con el contexto y con su fenomenología, sin olvidar que el significado siempre

alude a un interpretante que puede ser individual o colectivo, y que éste se hace observable y ostensible a través del signo.

Señalemos finalmente que para Vygotsky (1962), los signos causan transformaciones básicas en las funciones psicológicas que intervienen en el funcionamiento mental que permite al individuo la comprensión del objeto matemático, y distingue en los signos dos funciones básicas en la comunicación de los objetos matemáticos, la función indicativa (en la que el signo depende del contexto en el que aparece) y la función simbólica (en la que el signo se usa en situaciones descontextualizadas y abstractas, e implica la organización de los objetos en categorías y la formación de relaciones entre categorías).

En este sentido Vygotsky, para quien los procesos mentales pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan de mediadores, coincide con Peirce (1987), al manifestar que el lenguaje es el que marca y distingue al sujeto.

Diseño, objetivos y conjeturas

Pasamos a especificar, de manera esquemática, en el marco de la Teoría ELOS el tipo de trabajo que hemos realizado:

La situación problemática o fenómeno que queremos analizar es la Resolución de Problemas.

El contexto está determinado por una muestra de 31 alumnos que cursan la carrera de Maestro en la especialidad de Educación Infantil.

Los referentes que tomamos en consideración en relación con los problemas son: la estructura superficial, la estructura temática y la estructura profunda.

La estructura superficial queda determinada por los diferentes sistemas de representaciones que utilizamos para su presentación:

-Representación Situada (RS), caracterizada como aquella representación, que en el contexto y el nivel temático considerado, puede permitir al resolutor, a partir de su conocimiento matemático informal, generar un proceso de resolución mediante técnicas indirectas.

-Representación analógica (RA), caracterizada como aquellas representaciones de tipo icónico, geométrico o gráfico, que en el contexto y en el nivel temático considerado, pueden permitir al resolutor apoyándose en tales representaciones desarrollar un proceso de resolución que le permita llegar a la solución del problema.

-Representación digital (RD), caracterizada como aquellas representaciones de tipo formal (algoritmos numéricos, fórmulas, ecuaciones...), que en el contexto y en el nivel temático considerado, pueden permitir al resolutor llegar a la solución del problema.

La estructura temática está caracterizada por problemas de Aritmética, Geometría (Medida) y Álgebra que corresponden a un nivel del Primer Ciclo de la Educación Secundaria obligatoria.

La estructura profunda que se considera en esta ocasión es la de problemas bien y mal definidos.

En este marco nos planteamos estudiar, como objetivo general, las dificultades que presentan los alumnos, futuros profesores de Educación Primaria, al resolver problemas matemáticos e indagar acerca del uso que hacen de diferentes sistemas de representación, con un fin último de diseñar materiales curriculares que ayuden a estos alumnos en la mejora de la resolución de problemas.

El objetivo general se concreta en los siguientes:

Objetivo 1: Describir las dificultades que presentan los alumnos cuando se

enfrentan a la resolución de problemas aritméticos, geométricos (medida), algebraicos y problemas bien y mal definidos.

Objetivo 2: Determinar qué sistemas de representación utilizan al resolver dichos problemas y si son capaces de articularlos coherentemente.

Objetivo 3: Analizar qué proceso siguen durante su resolución.

Objetivo 4: Estudiar cómo les influyen los aspectos afectivos (positivos o negativos hacia las Matemáticas) en la resolución de los problemas.

El trabajo parte de las siguientes conjeturas:

- Los alumnos se limitan a usar el sistema de representación formal al resolver problemas matemáticos.
- Las representaciones gráficas no son valoradas por los alumnos como forma de resolver problemas.
- Los alumnos no planifican su actuación antes ni durante la resolución de un problema.
- Los aspectos afectivos influyen en el éxito o fracaso al resolver problemas.

Metodología y plan de trabajo

Para recoger los datos se elabora un cuestionario con diferentes problemas bien y mal definidos de las áreas de Aritmética, Geometría (Medida) y Álgebra. Después de varios ensayos nos quedamos con el que adjuntamos al final de este artículo como anexo.

Inicialmente elegimos una muestra de 31 alumnos que cursan la carrera de Maestro en la especialidad de Educación Infantil y les planteamos dicho cuestionario de manera individual. Hemos eliminado aquellos alumnos que abandonaron más del 75% de los problemas presentados, quedándonos con un grupo de 20 alumnos.

Análisis y discusión de los datos

Aportamos, en primer lugar, un análisis global de los resultados, esto es, un resumen de la resolución de los problemas propuestos en términos de bien resueltos, mal resueltos, abandonan y no contestan, para posteriormente analizar el proceso seguido en el problema por cada alumno.

Tanto para redactar los problemas como para analizar su proceso de solución por parte de los alumnos, hemos considerado los tres sistemas de representación anteriormente mencionados: representación digital (RD), representación analógica (RA) y representación situada (RS).

Entendemos que un alumno usa un sistema de representación digital en la resolución del problema cuando en el proceso utiliza fundamentalmente números, operaciones, fórmulas, ecuaciones, etc. para explicitar el resultado del mismo. Usa un sistema de representación analógico cuando se apoya en representaciones pictóricas, geométricas o gráficas, para llegar a la solución, o incluso la obtiene mediante ellas. Y usa la representación situada cuando obtiene la solución mediante técnicas indirectas que se generan a partir de un conocimiento informal explícito en la propia presentación del problema.

Presentamos estos resultados globales en dos tablas. En la primera recogemos los resultados obtenidos en cada problema.

Cada problema es caracterizado, como hemos indicado por su estructura profunda: problema bien definido (BD); problema mal definido (MD); por su estructura temática: aritméticos (AT); algebraicos (AG); geométrico (G); y por su estructura superficial: representación situada (RS); representación digital (RD); representación analógica (RA).

ÍTEM	BIEN	MAL	ABANDONAN	NO CONTESTAN
1 (BD- AT - RS)	25%	60%	10%	5%
2 (BD- AG - RD)	60%	35%	5%	0%
3 (MD- G - RA)	10%	35%	15%	40%
4 (BD- G - RS)	5%	60%	30%	5%
5 (MD- AG - RD)	20%	40%	10%	30%
6 (BD- AG - RA)	25%	5%	35%	35%
7 (BD- AT - RD)	0%	70%	15%	15%
8 (BD- G - RA)	45%	35%	0%	20%

Tabla 1. Resultados en cada problema

Se desprenden de esta Tabla 1 los malos resultados obtenidos por los alumnos (23,75 % de aciertos), lo que corrobora de nuevo el bajo nivel de conocimiento de estos alumnos en cuestiones elementales relativas a Aritmética, Álgebra y Geometría, que ya habíamos detectado en otros estudios precedentes (Palarea, Hernández y Socas, 2001; Noda, Hernández y Socas, 2002).

Para el análisis global de los sistemas de representación que utilizan los alumnos en la resolución de cada problema consideramos la tabla 2, y observamos que la tendencia de este grupo de alumnos es utilizar la representación digital en la mayoría de los casos (64,5 %), independientemente del tipo de estructura superficial (RD, RA y RS) en la que se presente el problema. Los intentos de resolver el problema mediante otros sistemas de representación son poco significativos (RA, 4,6 % y RS, 6,4 %). No obstante, aunque en menor medida, si parece significativo el intento de resolver el problema combinando los sistemas de representación analógico y digital (21%).

ÍTEM	DIGITAL	ANALÓGICO	SITUADO	DIGITAL-SITUADO	ANALÓGICO-DIGITAL
1 (BD-AT-RS) (95%)	74% B: 5 M: 6 A: 2	0%	0%	26% B: -- M: 5 A: --	0%
2 (BD-AG-RD) (100%)	80% B: 9 M: 6 A: 1	0%	5% B: 1 M: 0 A: 0	0%	15% B: 2 M: 1 A: --
3 (MD-G-RA) (60%)	84% B: 1 M: 6 A: 3	0%	8% B: 1 M: -- A: --	0%	8% B:-- M: 1 A: --
4 (BD-G-RS) (95%)	10% B: -- M: 1 A: 1	5% B: 1 M: -- A: --	5% B: -- M: 1 A: --	0%	80% B: -- M: 10 A: 5
5(MD-AG-RD) (70%)	100% B: 4 M: 8 A: 2	0%	0%	0%	0%
6(BD-AG-RA) (65%)	86% B: 4 M: 1 A: 6	0%	7% B: 1 M: -- A: --	0%	7% B: -- M: -- A: 1
7 (BD-AT-RD) (85%)	82% B: -- M: 11 A: 3	0%	18% B: -- M: 3 A: --	0%	0%
8 (BD-G-RA) (80%)	0%	32% B: -- M: 5 A: --	13% B: -- M: 2 A: --	0%	55% B: 9 M: -- A: --

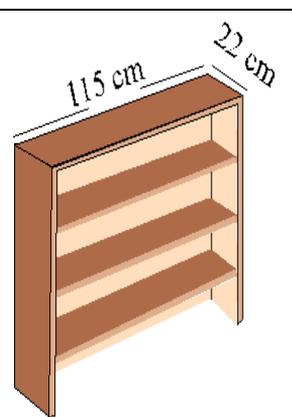
Tabla 2. Sistemas de representación utilizados en cada problema

En esta tabla 2, los porcentajes son obtenidos considerando como 100% los alumnos que abordan el problema; indicamos además cuántos dan soluciones correctas (B), incorrectas (M) y no dan soluciones (A).

Seleccionamos ahora tres problemas (3, 6 y 8: ver anexo) para mostrar el proceso de resolución seguido por los alumnos.

PROBLEMA 3

Carlos ha construido una estantería de libros esquematizada en la ilustración. Quiere barnizarla con un barniz que viene en latas que cubren 2 m^2 . ¿Cuál es el área total que debe barnizar, expresada en m^2 ?



Este problema lo caracterizamos en relación con su estructura superficial como un problema mal definido (su enunciado no aporta los datos necesarios para obtener la solución pedida y además hay datos que no intervienen en la búsqueda de dicha solución), según su estructura temática es geométrico, y la presentación del problema se hace mediante una representación analógica de tipo geométrico (en su estructura profunda interviene el cálculo de áreas).

De los 20 alumnos que participan en la experiencia, encontramos que un 90% de ellos (18 alumnos) no saben resolverlo y sólo un 10% (2 alumnos) dan una solución correcta.

El análisis de las actuaciones de los alumnos ante este problema, muestra que prácticamente todos los alumnos (10 de los 12 que lo resuelven de alguna manera, pues 8 de ellos lo dejan en blanco) pasan de la representación analógica de tipo geométrico con la que es presentado el problema, a una representación digital, tanto de tipo algebraico como numérica, siendo más frecuente la utilización de la representación digital algebraica (7 alumnos) que la digital numérica (2 alumnos). Sólo un alumno lo aborda desde la perspectiva de la

representación situada y otro alumno lo hace combinando dos tipos de representaciones: analógica y digital.

Los dos alumnos que dan una solución correcta presentan los comportamientos siguientes:

- a) Un alumno recurre a la representación digital de tipo algebraico (calcula el área de los cuatro estantes horizontales $115 \times 22 = 2530 \text{ cm}^2$; $2530 \times 4 = 10120 \text{ cm}^2 = 101,20 \text{ m}^2$). “... no se puede resolver porque no podemos calcular el área de los estantes laterales pues no nos dan la altura).
- b) Un alumno utiliza una representación situada (Para resolver este problema necesitamos conocer la altura de la estantería).

Los diez alumnos restantes utilizan diferentes representaciones: digital algebraica (6), digital numérica (3) y combinación de analógica geométrica y digital numérica (1).

Las situaciones que se dan son:

1. Recurren a la representación digital de tipo algebraico y transforman de manera implícita el problema, modificando la pregunta y los datos (6 alumnos).
 - 1.1. Utilizan una fórmula incorrecta ($a=l^2.l^2$) para calcular la superficie de un estante y de esta manera dan una solución que no es la pedida y además es incorrecta (1 alumno).
 - 1.2. Utilizan una fórmula incorrecta ($a=b^2+h^2$; $a=b.h/2$) para calcular la superficie de un estante y no saben cómo continuar y abandonan el problema (2 alumnos).

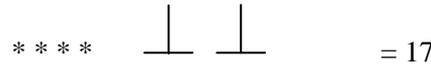
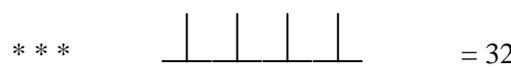
- 1.3. Utilizan la fórmula del rectángulo para calcular la superficie de un estante y recurren a la regla de tres para hacer la conversión de cm^2 a m^2 y de esta manera dan una solución que no es la pedida (1 alumno).
- 1.4. Utilizan la fórmula del rectángulo para calcular la superficie de un estante y de esta manera dan una solución que no es la pedida (2 alumnos).
2. Recurren a la representación digital de tipo numérico (3 alumnos).
 - 2.1. Aplican cálculos aritméticos para calcular la superficie de un estante y dan una solución que no es la pedida y además es incorrecta (hacen mal la conversión de unidades). En este caso transforman de manera implícita el problema, modificando la pregunta y los datos (2 alumnos).
 - 2.2. Aplican cálculos aritméticos utilizando todos los datos del enunciado del problema y luego lo abandonan sin dar solución alguna (1 alumno).
3. Recurren a la representación analógica y digital (1 alumno).
 - 3.1. Utiliza una representación analógica geométrica y una representación digital numérica, pero malinterpreta los datos y da una solución incorrecta.

Con respecto al carácter “mal definido” de este problema, creemos necesario destacar, que la observación del dato que falta para obtener la solución pedida, la hacen únicamente los dos alumnos que dan una solución correcta, y en cuanto al dato que no interviene en la búsqueda de la solución, ni lo utilizan ni hacen comentario alguno sobre él. Únicamente un alumno lo interpreta y utiliza como un dato necesario para obtener la solución pedida.



PROBLEMA 6

6. Sabiendo que un obrero compra 4 tuercas y 2 tornillos que pesan 17 gramos, y otro compra 3 de las mismas tuercas y 5 de los mismos tornillos que pesan 32 gramos, calcular lo que pesan:

<p>  </p> <p>  </p>	<p>Calcular lo que pesan:</p> <p>a) Dos tuercas y un tornillo.</p> <p>b) Una tuerca y un tornillo.</p> <p>c) Un tornillo.</p>
---	---

Este es un problema bien definido, de estructura algebraica, en la que su enunciado se formula mediante una representación analógica.

Como hemos mencionado con anterioridad nuestro propósito es observar cómo influye dicha representación en su resolución.

Encontramos que de los veinte alumnos de esta experiencia, siete dejan en blanco este problema (35%).

De los 13 alumnos restantes, optan por utilizar una representación situada, 1 alumno, 11 por una representación digital y el otro se apoya conjuntamente en una representación analógica y una digital.

La respuesta correcta la aportan sólo 5 alumnos (25%): 1 que hizo uso de la representación situada y 4 de los 11 que hicieron uso de la representación digital.

El que utiliza la *representación situada* resuelve el problema por tanteo y da una solución *correcta*.

Los cuatro que hacen uso de la *representación digital* plantean sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Lo resuelven bien y dan las soluciones *correctas*.

Del resto de los alumnos que hace uso de la representación digital, dos

realizan cálculos aritméticos con un razonamiento incorrecto y luego abandonan el problema sin dar soluciones, otros dos realizando reglas de tres también con un razonamiento incorrecto y abandonan el problema sin dar soluciones, tres plantean sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas pero dos no saben resolverlos y otro lo resuelve mal, pero los tres abandonan antes de concluir un resultado.

Finalmente un alumno hace uso de una representación analógica y digital. Pero también abandona su trabajo y no da solución alguna.

Encontramos que en este problema de presentación analógica es, sin embargo, la representación digital la más utilizada en su resolución y la que más ha favorecido su resolución, aun cuando el no saber realizar los cálculos aritméticos y resolver las ecuaciones es lo que ha hecho que sus repuestas no sean correctas.

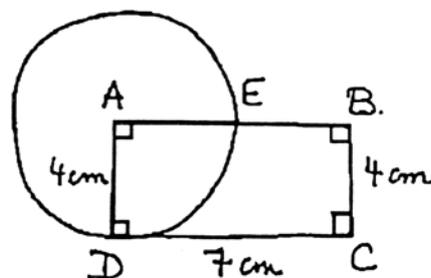
PROBLEMA 8

8. En este esbozo hecho a mano están dibujados:

- Un rectángulo ABCD
- Un círculo de centro A que pasa por D.

El círculo corta al lado AB en el punto E.

¿Qué longitud tiene el segmento EB? Aclara como obtuviste tu respuesta.



Este es un problema bien definido con estructura temática geométrica, en la que su enunciado se realiza mediante una representación analógica.

Observamos que de los veinte alumnos de esta experiencia, cuatro dejan en blanco este problema (20%).

Los 16 restantes optan por utilizar una representación situada: 2; por una representación analógica: 5, mientras los nueve restantes se apoyan

conjuntamente en una representación analógica y digital.

Son precisamente estos nueve alumnos los que obtienen la respuesta correcta. Para llegar a ella utilizan cálculos aritméticos (5) o establecen proposiciones algebraicas (4) como las que siguen:

$$AE = 4 \text{ cm}$$

$$AB = DC = 7 \text{ cm}$$

$$EB = AB - AE$$

$$EB = 7 - 4 = 3 \text{ cm}$$

De los alumnos que utilizan la representación situada y dan una solución incorrecta, uno interpreta el gráfico dado (*la longitud es 3,5 cm porque el punto E es la mitad del lado AB que mide 7 cm*), pero no tiene en cuenta los datos dados en lenguaje digital, mientras que el otro no relaciona los datos dados en lenguaje digital con lo observado en el gráfico (*el segmento EB es el radio de la circunferencia y también es la mitad de la base del rectángulo. El segmento EB mide 3,5 cm*).

Cabe destacar que los que intentan razonar utilizando sólo la representación analógica, confunden los datos y no obtienen la solución correcta.

Se observa que en este problema la representación analógica usada en el enunciado dificulta a aquellos alumnos que no son capaces de articularla coherentemente con la representación digital para obtener la solución del mismo.

Consideraciones finales

Entre las consideraciones finales queremos resaltar tres cuestiones que se observan de los resultados:

- Independientemente de la estructura temática del problema y de la representación empleada en el planteamiento, el comportamiento más frecuente es la utilización de una representación digital (En cinco de los ocho problemas, y en otros dos problemas junto con la analógica).
- En los problemas de estructura geométrica, el mayor porcentaje de aciertos se da en aquellos casos en que los alumnos recurren al uso combinado de los sistemas de representación analógico y digital. Esto nos lleva a suponer que un planteamiento de los problemas de estructura geométrica que induzcan a la utilización de una combinación de representaciones analógica y digital favorece la resolución de estos problemas.
- En los problemas de estructura algebraica y aritmética, el mayor porcentaje de aciertos se da en aquellos casos en que los alumnos recurren al sistema de representación digital.

Finalmente, debemos señalar que el propósito de analizar el papel que representan los Sistemas de Representación en la resolución de problemas, tanto cuando los enunciados son presentados en diferentes sistemas como el uso que de ellos hacen los alumnos, muestra la complejidad que tiene para el alumnado el trabajo con distintos sistemas de representación, especialmente cuando surge la necesidad de establecer conexiones entre ambos.

Coincidimos con Duval (1995) cuando afirma que la enseñanza con respecto a los sistemas de representación sólo tiene en cuenta la formación de representaciones y las transformaciones dentro de un sistema de representación y se considera que la traducción entre ellos es evidente. Sin embargo, esto no es así, y algunos bloqueos y obstáculos para la comprensión surgen de la imposibilidad de representar mediante un cierto sistema aspectos de un concepto que sólo pueden ser expresados mediante otros.

Referencias bibliográficas

- Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, pp. 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang. Suisse.
- De Vega, M. (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Alianza. Madrid.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer.
- Goldin, G.A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.
- Goldin, G.A. (1993). The IGPME Working Group on Representations. *Paper presentado en el XVII PME*. Japan.
- Janvier, C. (Ed) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. En Janvier, C. (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Krutetskii, V.A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in school children. En J. Kilpatrick, I. Wirszup (Eds): *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Vol. 2*. Stanford, California: School Mathematics Study Group.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and translation among representations in Mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M.M. (2002). La resolución de problemas mal definidos. Un estudio con alumnos de primer curso del título de Maestro. En Socas, Camacho y Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática IV*, pp. 237-254. CAMPUS. La Laguna.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Electronic Version.
- Paivio, A. (1978). Mental comparisons involving abstract attributes. *Memory and cognition*, 6, pp. 199-208.

- Palarea, M. M.; Hernández, J. y Socas, M. M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de maestros. En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III*. pp. 213-226. "CAMPUS". La Laguna.
- Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.
- Presmeg, N. (1985). *The role of visually mediated processes in high school Mathematics: A classroom investigation*. Tesis doctoral. Cambridge.
- Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press (versión castellana: *Pensamiento y Lenguaje*. Buenos Aires: Fausto, 1992).

ANEXO

1. Para hacer disfraces para el colegio recibimos las siguientes ofertas de dos establecimientos:

Establecimiento A:

- Precio del metro de tela: 10 euros

- Confección de cada disfraz: 30 euros

- A partir de los 30 disfraces, descuento del 20% en el precio del metro de tela y en la confección.

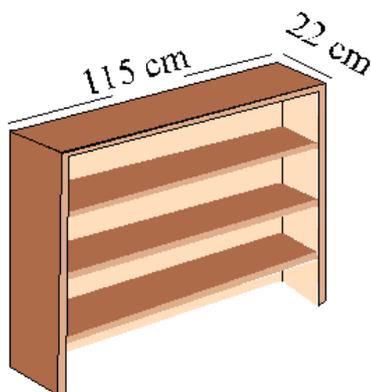
Establecimiento B:

- Cada disfraz (tela y confección): 55 euros

Si se necesitan realizar 60 disfraces y para cada disfraz hacen falta 3 metros de tela ¿Cuál es la oferta más ventajosa?

2. Para un colegio se compró fruta: una bolsa de naranjas y otra de manzanas que pesaban 54 kilos. La bolsa de naranjas pesa 12 kilos más que la de manzanas. ¿Cuánto pesa cada bolsa?

3. Carlos ha construido una estantería de libros y ahora quiere barnizarla con un barniz que viene en latas que cubren 2 m^2 ¿Cuál es el área total que debe barnizar, expresada en m^2 ?



4. Algunos estudiantes que estaban en el centro del patio del colegio encontraron una nota con las siguientes pistas:

Caminar 20 metros al este, 15 metros al norte y 18 metros al oeste. De ahí caminar 9 metros al norte y otros 5 metros al este, lugar en el que se encuentra un libro.

¿Cuántos metros en línea recta tendrán que caminar desde el centro del patio hasta el libro?

5. Unos granjeros almacenaron heno para 4 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 100 kg por día, con lo que tuvieron heno para 6 días. En total se gastaron 20 euros ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

6. Sabiendo que un obrero compra 4 tuercas y 2 tornillos que pesan 17 gramos, y otro compra 3 de las mismas tuercas y 5 de los mismos tornillos que pesan 32 gramos. Calcular lo que pesan:

****		= 17	a) Dos tuercas y un tornillo.
***		= 32	b) Una tuerca y un tornillo.
			c) Un tornillo.

7. Una actriz, muy conocida y aficionada a las Matemáticas, fue preguntada en una entrevista por su edad.

* tengo 45 años..., sin contar sábados ni domingos.

¿Cuál es su edad verdadera?

8. En este esbozo hecho a mano están dibujados:

- Un rectángulo ABCD

- Un círculo de centro A que pasa por D.

El círculo corta al lado AB en el punto E ¿Qué longitud tiene el segmento EB?

Aclara como obtuviste tu respuesta.

