



NÚMEROS ENTEROS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN 2º DE ESO. EXPERIENCIA DIDÁCTICA CON EL PUZZLE ALGEBRAICO

Eligia Domínguez Santana
María Muñoz Pérez
Raquel Ruano Barrera
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se presenta y analiza una experiencia realizada con alumnos de 2º de ESO en la que se estudian los números enteros y las expresiones algebraicas utilizando el material didáctico “Puzzle Algebraico”, como un registro analógico de los contenidos matemáticos anteriores. Los resultados de la experiencia se analizan empleando como instrumentos para la recogida de información un cuestionario, el diario de observaciones y las producciones de los alumnos que, además, permiten clasificar los errores cometidos por los alumnos y analizar los significados que éstos dan a los números enteros y a las expresiones algebraicas.

Abstract

In this article we present and analyze an experience carried out on students of 2nd year of ESO, in which the integer numbers and the algebraic expressions are studied using the teaching material "Algebraic Puzzle" as an analogical register of the previous mathematical contents. The results of the experience are analyzed using as instruments to collect information a questionnaire, the diary of observations and the production of the students that, besides, allow to classify the students' errors and to analyze the meanings they give to the integer numbers and the algebraic expressions.

Introducción

Los alumnos en muchas ocasiones encuentran en el Álgebra una barrera infranqueable que no les permite seguir avanzando en el aprendizaje de las Matemáticas. De aquí la preocupación de profesores e investigadores en buscar nuevas estrategias, recursos y materiales didácticos que ayuden a los alumnos a superar dicha barrera y que permitan un aprendizaje significativo de las Matemáticas y, en particular, del Álgebra.

El puzzle algebraico es un material didáctico que pretende ser un ejemplo de representación semiótica autosuficiente para los objetos matemáticos: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales y de 2º grado y otras cuestiones algebraicas elementales.

En este trabajo se describe una experiencia didáctica desarrollada en el marco de un seminario de investigación e innovación matemática para Secundaria. Los objetivos de dicho seminario son los siguientes:

1. Conocer en profundidad el Puzzle Algebraico como mediador didáctico.
2. Diseñar y coordinar distintas experiencias didácticas.
3. Redactar secuencias didácticas para el proceso de enseñanza-aprendizaje con la intervención del Puzzle.
4. Analizar y discutir los resultados obtenidos antes y después de la intervención didáctica en el aula.

Actualmente en el seminario se están coordinando tres experiencias que se resumen en la siguiente tabla:

EXPERIENCIA	CENTRO	CURSO	CONTENIDOS	PROFESORA
1	IES José de Anchieta	2º de ESO	<ul style="list-style-type: none">• Números enteros• Expresiones algebraicas• Ecuaciones	María Muñoz
2		3º de ESO	<ul style="list-style-type: none">• Números enteros• Expresiones algebraicas• Ecuaciones• Ecuaciones de 2º grado• Sistemas de ecuaciones	María Muñoz
3	IES Puerto de la Cruz	4º de ESO	<ul style="list-style-type: none">• Números enteros• Expresiones algebraicas• Ecuaciones• Ecuaciones de 2º grado	Eligia Domínguez

Tabla 1

En este artículo se presenta y analiza la experiencia 1 y los resultados que se exponen son referentes a los dos primeros tipos de actividades: números enteros y expresiones algebraicas. En concreto, tratamos de analizar el papel del material didáctico “Puzzle Algebraico” en la clase de Matemáticas como instrumento que facilita la comprensión y el aprendizaje de los contenidos algebraicos.

Específicamente, los objetivos del trabajo son:

- Analizar los resultados obtenidos en términos de pretest y postest.
- Clasificar los errores de los alumnos y determinar sus posibles orígenes.
- Valorar la experiencia y establecer posibles implicaciones didácticas.

Marco teórico

En este apartado expondremos los fundamentos teóricos en los que se basa nuestra investigación. Por un lado, fijaremos el marco teórico en relación con los materiales didácticos y los sistemas de representación y, por otro, resumiremos la teoría de errores empleada.

En general, los materiales didácticos se han utilizado en la clase de

Matemática en un marco innovador, como mejora de la enseñanza aprendizaje de esta disciplina y constituyen uno de los elementos que forman parte de la innovación. En los últimos años se ha originado un gran interés por los materiales concretos con fines didácticos, debido a la diversidad cognitiva que nos encontramos en el aula. Pero la utilización de materiales en el aula no es algo nuevo, pues se realiza desde hace mucho tiempo.

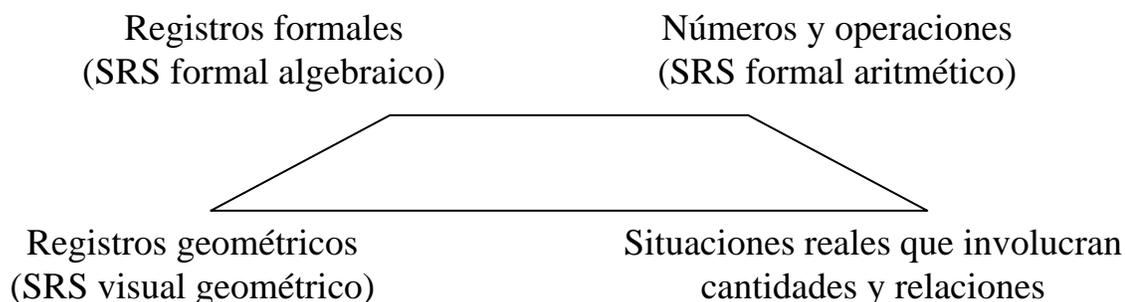
En la experiencia didáctica que queremos llevar a cabo es necesario fijar la organización que se va a seguir en lo referente a los materiales didácticos, ya que en la literatura su organización es variada. Además, tenemos que establecer el papel que juegan los sistemas de representación externos y su relación con lo que entendemos por comprensión conceptual y de procedimientos de los objetos matemáticos, en general, y del Álgebra, en particular.

En relación con los materiales didácticos tomamos como referencia el marco teórico presentado en Socas (1999). El autor propone que para que un material didáctico se constituya como un medio que facilite la comprensión conceptual y de procedimiento de un objeto matemático en el alumno, debe usarse como una representación semiótica autosuficiente del objeto matemático.

La manipulación de varias representaciones de un objeto matemático permite al alumno construir imágenes mentales de dicho objeto.

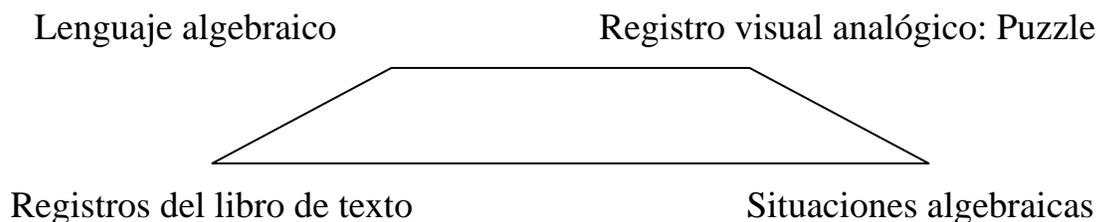
De los estudios experimentales sobre lenguaje algebraico (Palarea y Socas, 1994a y 1994b) se ha constatado la necesidad de ampliar las fuentes de significados para el lenguaje algebraico a SRS (Sistema de Representación Semiótico) de procedencia analógica y visual, quedando determinadas las

fuentes de significado para el Álgebra de la siguiente forma:



Estos registros interaccionan entre sí en términos de la propuesta de Duval (1995).

En el caso que nos ocupa hemos limitado las fuentes de significado para el Álgebra a los registros de las fichas de trabajo usuales del alumno, y al registro visual analógico que proporciona el material didáctico: “Puzzle Algebraico”, quedando determinadas las fuentes de significado para los temas algebraicos que vamos a tratar de la siguiente forma:



El registro visual analógico “Puzzle Algebraico” es utilizado como un SRS autosuficiente para los objetos matemáticos desarrollados en esta experiencia. En Socas (2000) se describe este material didáctico y se aporta una guía con actividades y sugerencias didácticas para su uso en el contexto escolar.

Por otro lado, consideramos que los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, sobre todo cuando se enfrentan a nuevos conocimientos que los

obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como señala Matz (1980), “los errores son intentos razonables, pero no exitosos, de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación”. Así, entendemos que el error va a tener distintas procedencias, pero siempre lo consideramos como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de la falta de conocimiento o de un despiste.

El estudio de los errores realizado en este trabajo se aborda tomando como referencia el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que nos permiten analizar el origen del error. De esta forma podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculo
- Ausencia de sentido
- Actitudes afectivas

Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983). Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden organizarse (Socas 2001) mediante la triada: obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas: (a) Errores del Álgebra que tienen su origen en la Aritmética. (b) Errores de procedimiento (los alumnos usan inapropiadamente



fórmulas o reglas de procedimiento). (c) Errores del Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas tienen distinta naturaleza como son: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

Metodología

El diseño de investigación seguido en esta experiencia es el mismo que el utilizado en experiencias anteriores: pretest – intervención - postest. En primer lugar se les administra a los alumnos un pretest, posteriormente se desarrolla una fase de instrucción en la que se emplea el puzzle algebraico y, por último, se administra un postest.

En la recogida de datos se combinan técnicas de carácter cuantitativo y cualitativo y se basa en los siguientes instrumentos: cuestionario, diario de observaciones, producciones de los alumnos y entrevistas individuales. Aunque en este trabajo no presentamos los resultados de las entrevistas individuales, sí se utiliza para el estudio de errores el registro diario tomado por la profesora (diario de observaciones) sobre las competencias de sus alumnos durante el periodo de instrucción para la adquisición del lenguaje algebraico.

- Descripción y análisis de la experiencia

Este trabajo se centra en la experiencia 1 que se llevó a cabo en el curso 2003-2004 en el Instituto de Enseñanza Secundaria José de Anchieta con 18 alumnos de 2º de ESO.

La experiencia comenzó el día 9 de enero de 2004 con la realización del pretest a lo que dedicamos dos sesiones. El periodo de instrucción comenzó el

día 12 de enero y se desarrolló durante 25 sesiones de 55 minutos cada una.

Durante estas sesiones se trataron los siguientes tópicos: cantidades positivas y negativas, valor numérico de una expresión algebraica y operaciones aditivas y multiplicativas con operaciones algebraicas. La secuencia de actividades se tomó, con algunos pequeños cambios, de la guía del Puzzle Algebraico (Socas, 2001).

Los alumnos poseían conocimientos previos de números enteros ya que habían trabajado con ellos en situaciones concretas el curso anterior. Además, se manejaron, también operativamente, en un periodo de instrucción anterior al desarrollado con el Puzzle en el curso 2003-2004. No tenían conocimientos previos de lenguaje algebraico.

Aunque los puzzles ya estaban contruidos, los dos primeros días del periodo de instrucción hicimos que los alumnos elaborasen las plantillas de cada ficha del puzzle, las recortasen y clasificasen, pues entendimos que de este modo se familiarizarían antes con la idea de área que se asigna a cada cantidad. Se les terminó repartiendo el puzzle elaborado puesto que las fichas tienen mayor perfección y esto a la larga es importante.

Aunque se había trabajado con números enteros con anterioridad, se decidió comenzar la secuencia de actividades con estos por dos razones:

1. Nos interesaba para que los alumnos se fueran familiarizando con la sintaxis y reglas del Puzzle.
2. El pretest demostró que había un número considerable de alumnos que todavía no sabía operar con números enteros.

En lo que concierne a la organización del aula, se cambió la distribución de las mesas: de estar sentados en equipos de cuatro, se pasó a que todas las



mesas estuvieran orientadas hacia la del profesor. Con esto se pretendía reforzar la importancia de que el registro debía plasmarse individualmente y de manera organizada. Esto interesa fundamentalmente para el aprendizaje del alumno pero, también, para que la profesora pueda establecer un mayor control sobre las incidencias del proceso de enseñanza y aprendizaje.

El trabajo en clase se realizó con fichas. Esto no era nuevo ni para la profesora ni para los alumnos pues ya se venía trabajando de este modo durante el curso. El trabajo con fichas permite que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea individualizado y lo más destacable es que dirige la toma de registro, pero obliga a que sea el alumno el que la desarrolle.

Se intentó corregir, a cada alumno, cada ejercicio antes de pasar al siguiente y, de vez en cuando, se dedicaba la clase a puestas en común para poder unificar criterios y ritmos. Estas puestas en común a veces eran dirigidas por la profesora y otras por algún alumno.

A continuación presentamos algunos ejemplos de las fichas utilizadas durante el periodo de instrucción.

La ficha que se muestra a continuación se refiere a las operaciones con números enteros:

Ejemplo de ficha (Cantidades positivas y negativas)		
Representación Numérica	Representación Gráfica	Resultado Gráfico y Numérico
$(+3)+(+2)=$		
$(+4)+(-6)=$		
$(+5)-(-2)=$		
$(-8)-(-2)=$		
$(+4)-(-6)=$		
$(-5)-(+7)=$		
$(2+2)(2-3)=$		
$(+2)(-3)=$		
$(-2)(+3)=$		
$(-2)(-3)=$		

La siguiente ficha se refiere al trabajo con operaciones con expresiones algebraicas. Cabe destacar que la ficha *xy* no existe, pero, en general, en el momento de la instrucción en la que se repartió la ficha, los alumnos eran capaces de construirla. Debemos también fijarnos en que el paso del lenguaje algebraico a la situación concreta con esta instrucción se está realizando continuamente.

Ejemplo de ficha (Expresiones Algebraicas)		
Manipulación de la expresión algebraica	Manipulación de la representación gráfica	Situación concreta
$-2x+5+4x-2=$		
$x^2-2bx+3-2x^2+bx=$		
$3b^2-2x^2-6x+b^2-x^2+3=$		
$2(x+y)=$		
$-3(x-2)=$		
$4(2x-y)=$		
$2x.(x-y)=$		
$-3x(x-2)=$		
$2x.(b-2x)=$		

Y, por último, presentamos la ficha del paso del lenguaje natural al algebraico. Queremos destacar la facilidad con la que los alumnos asumen este paso, frente a la dificultad que suelen encontrar con otro tipo de instrucción.

Ejemplo de ficha
(Paso del lenguaje natural al algebraico)

Usar las fichas del Puzzle Algebraico y las expresiones algebraicas para representar las siguientes situaciones:

1. El triple de x
2. El doble de x menos 4
3. El producto de $x, b, 2$
4. El precio de x kilogramos de manzanas a b euros el kilogramo
5. El triple de la suma de x e y
6. El doble de la diferencia entre x e y
7. El número siguiente a x
8. El número anterior a x
9. El cuadrado de la suma de x y b

Pasado un tiempo tras la fase de instrucción, se les administró a los alumnos el postest. Debemos señalar que aunque en general se contó con 18 alumnos en el periodo de instrucción, sólo obtuvimos resultados de 13 de ellos; el resto fue descartado especialmente por problemas de absentismo.

- Descripción del test

El test utilizado es una adaptación del cuestionario de Palarea (1998) que además ha sido utilizado en una experiencia anterior Domínguez (2003). Consta de 13 actividades: dos de operaciones con números enteros, la 1 y la 7; dos de operaciones con expresiones algebraicas, la 2 y la 8 y cuatro geométricas, la 9, 10, 12 y 13. La pregunta 6 pide comparar expresiones algebraicas según los valores de la variable. Las preguntas 3, 4 y 5 están relacionadas con la sustitución de valores concretos en la variable y , por último, la pregunta 11 se refiere al paso del lenguaje natural al algebraico. Con las preguntas de carácter geométrico lo que se pretende es

que el alumno, con un registro diferente (el geométrico), asocie las ideas de producto y suma con las de área y perímetro, respectivamente.

Queremos destacar que el postest está compuesto por una selección de preguntas del pretest, éstas son: la 1, 2, 7, 8 y 11. La razón de esta elección es que consideramos que las preguntas que se ayudan del registro geométrico no son necesarias después de la instrucción con el Puzzle pues, con este registro, la operación se debe haber conceptualizado. También se eliminaron algunas preguntas del postest ya que no se consideraron en el periodo de instrucción.

Análisis de los resultados

A continuación analizaremos la experiencia con el Puzzle y los resultados obtenidos por los alumnos. Asimismo, clasificaremos y analizaremos sus errores tanto en el pretest como en el postest.

- **Experiencia con el Puzzle**

Antes de examinar los resultados obtenidos por los alumnos tanto en el pretest como en el postest, nos parece interesante realizar algunas consideraciones sobre el Puzzle y su utilización.

En primer lugar, queremos destacar que al inicio de la instrucción con el Puzzle, los alumnos intentaron transferir la sintaxis del lenguaje aritmético-algebraico a la sintaxis del Puzzle. Esto supone un grave problema pues, si no se corrige, se invalida la conceptualización de las operaciones a través del Puzzle. También debemos señalar que el Puzzle físicamente sólo lo usaron muy al principio, pronto les fue más cómodo dibujar. Aún así, creemos que sin esa manipulación física inicial no se conceptualizaría la cantidad representada.

Respecto a la utilización del Puzzle: de los 13 encuestados, 8 alumnos usaron la representación gráfica del Puzzle Algebraico para resolver al menos una de las preguntas relativas a expresiones algebraicas, mientras que 11 lo emplearon en la resolución de las preguntas relacionadas con números enteros. Hay dos alumnas que



a pesar de no utilizar la representación gráfica del Puzzle, sí emplean explícitamente ideas que se derivan de él.

Pasemos ahora a analizar los resultados obtenidos en el pre y postest (Véase Anexo 1).

En primer lugar, debemos tener en cuenta que en el pretest, hubo un alto porcentaje de ausencia de respuesta, especialmente en las preguntas relacionadas con expresiones algebraicas. En el postest, además de aumentar el porcentaje de respuestas correctas, cabe destacar la notable disminución del número de preguntas no contestadas.

En la pregunta 1, en la que se les pedía que realizaran operaciones simples con números enteros, los porcentajes de respuestas correctas tanto en el pretest como en el postest son altos, si bien son considerablemente mayores en el postest. Este aumento en el porcentaje de respuestas correctas es destacable sobre todo en aquellos ítems en los que la operación que se debía realizar era una resta. Consideramos que esta mejoría se debe al uso del Puzzle en el postest, pues de los 13 encuestados, 11 emplearon la representación gráfica del Puzzle para resolver esta pregunta y las dos restantes utilizaron explícitamente ideas que se derivan de su uso.

La pregunta 7 también estaba relacionada con las operaciones con números enteros, aunque en esta ocasión, se trataba de operaciones combinadas que implicaban el conocimiento de la jerarquía de las operaciones. En general, los porcentajes de respuestas correctas en el pretest no son muy elevados, sobre todo en los ítems que implican sustracción o multiplicación. En el postest se aprecia una clara mejoría en todos los ítems y se subsanan errores como el de la omisión de paréntesis.

Las preguntas 2 y 8 están relacionadas con la manipulación de expresiones algebraicas de carácter multiplicativo y aditivo, respectivamente. La mejoría entre el pretest y el postest es muy clara en ambas preguntas, tanto en el porcentaje de

alumnos que responden como en los que mejoran su respuesta. Parece que el Puzzle ayuda a los alumnos a darle sentido al producto de expresiones algebraicas, pues incluso aquéllos que no usan el Puzzle físicamente en ninguna otra pregunta sí lo hacen para contestar ésta.

El sentido que se le otorga con el puzzle a la cantidad desconocida ayuda a mejorar las respuestas a la pregunta 11 en la que se pide pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

- Errores

A continuación se clasifican los errores de los alumnos. Para ello se han seleccionado las preguntas 7 y 8 del cuestionario relacionadas con operaciones con números enteros y expresiones algebraicas, respectivamente.

En la pregunta 7, se les pedía a los alumnos que realizaran operaciones combinadas con números enteros.

PREGUNTA 7

7. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible hacerlo correctamente:

- a) $(3 + 5) + 4 =$
- b) $(5 + 4) - 3 =$
- c) $4 \cdot 2 - (5 + 2) =$
- d) $5 - (3 - 1) =$
- e) $(3 - 2) + 2 =$
- f) $5 - (6 + 7) + 4 =$
- g) $5 - (6 - 2) + (-5 + 4) + 1 =$
- h) $6 \cdot (7 + 5) - (-8 + 4) =$

La pregunta se consideró “Bien” cuando el alumno efectuó correctamente el proceso (elimina paréntesis y realiza las operaciones aplicando la jerarquía correspondiente) y el resultado era correcto. Tomamos la pregunta como regular cuando se realizó bien el proceso pero el resultado no fue el correcto, o el resultado era el correcto aunque se hubiera cometido algún error de escritura en el proceso. En

el resto de los casos consideramos la pregunta mal.

Antes de analizar los errores, observemos en la siguiente tabla los porcentajes de respuestas correctas, regulares, incorrectas y no contestadas en esta pregunta tanto en el pretest como en el postest. Las primeras columnas son los resultados del pretest y las segundas los del postest.

Ítem	B		R		M		NC		%B		%R		%M		%NC	
a	10	12	1	1	1	0	1	0	76,92	92,31	7,69	7,69	7,69	0	7,69	0
b	11	12	1	1	0	0	1	0	84,62	92,31	7,69	7,69	0	0	7,69	0
c	4	9	1	2	7	2	1	0	30,77	69,23	7,69	15,38	53,85	15,38	7,69	0
d	5	10	1	2	5	1	2	0	38,46	76,92	7,69	15,38	38,46	7,69	15,38	0
e	10	12	1	1	1	0	1	0	76,92	92,31	7,69	7,69	7,69	0	7,69	0
f	6	6	1	3	4	4	2	0	46,15	46,15	7,69	23,08	30,77	30,77	15,38	0
g	3	6	0	2	8	5	2	0	23,08	46,15	0	15,38	61,54	38,46	15,38	0

Tabla 2

Como se observa en la tabla, los resultados en esta pregunta varían mucho del pretest al postest. Hay una mejoría en todos los ítemes, disminuyen tanto los porcentajes de ausencia de respuesta como los de respuesta incorrecta. Cabe destacar que en 5 de los 8 ítemes de esta pregunta, se supera el 60% de respuesta correcta. El mayor número de errores se ha producido en el ítem (7.h) que implicaba la multiplicación.

Dados los altos porcentajes de respuesta correcta alcanzados en esta pregunta, el número de errores no es muy elevado; aún así, pasemos a analizarlos con más detalle.

ERRORES EN LA PREGUNTA 7			
Pretest		Postest	
Omisión del paréntesis	10	Omisión del paréntesis	1
Inversión de la resta	3	Inversión de la resta	7
Omisión de la resta	5	Omisión de la resta	2
Cambia signo primer miembro, efectúa paréntesis y resta	5	Proceso incompleto	8
Escribe mal el proceso	5	Suma – y +	6
Jerarquía incorrecta	2	Otros	7
Distributiva respecto a un solo miembro	1		

ERRORES EN LA PREGUNTA 7	
Pretest	Postest
Otros	9

Tabla 3

Como se observa en la tabla 3, el error más frecuente en el pretest fue la omisión del paréntesis. Los alumnos actuaban como si éstos no existieran, lo cual no tiene importancia si el signo que hay delante es más, pero que conduce al error si es menos. Así, por ejemplo, en el ítem (7.c), escriben expresiones como:

$$4 \cdot 2 - (5 + 2) = 4 \cdot 2 - 5 + 2 = 8 - 5 + 2 = 5$$

La cantidad de errores de este tipo disminuye considerablemente en el postest; es más, todos los alumnos que cometieron este error en el pretest lo subsanaron en el postest. El único error de este tipo en el postest lo cometió un alumno que no contestó en el pretest.

Aunque hubo una mejoría considerable en este tipo de error, debemos decir que simplemente se trasladó pues, como veremos posteriormente, fue uno de los errores más frecuentes en la pregunta 8.

Otro error es el que hemos denominado “inversión de la resta”. Se produjo en todos los casos cuando el sustraendo era mayor que el minuendo. Por ejemplo, en el ítem (7.f):

$$5 - (6 + 7) + 4 = 5 - 13 + 4 = 8 + 4 = 11$$

En general, los alumnos invirtieron la resta y olvidaron poner el signo correspondiente (-), aunque algunos, escribieron la resta invertida pero al final pusieron el signo correcto.

El error que hemos denominado “omisión de la resta” consiste en, por ejemplo, en el ítem (7.h), escribir:

$$6 \cdot (7 + 5) - (-8 + 4) = 6 \cdot 12 - (-4) = 72 - 4$$

Es decir, realizan la operación que hay dentro del paréntesis y si el signo que hay delante es el -, lo omiten y realizan la operación que se corresponde con el signo

del número del paréntesis.

El resto de los errores del pretest son distintos de los del postest. En muchos casos son errores cometidos por un solo alumno una única vez como ocurre con los errores denominados “distribución sólo respecto a un miembro” (el primero), o por dos alumnos, error en la jerarquía de las operaciones (suma antes de multiplicar o no realiza las operaciones de izquierda a derecha).

Los alumnos que cometieron el error que hemos denominado, “escribe mal el proceso”, tienen la pregunta regular, ya que a pesar de escribir mal el proceso el resultado es el correcto. Por ejemplo, en el ítem (7.a):

$$(3 + 5) + 4 = 3 + 5 = 8 + 4 = 12$$

Sólo una alumna cometió el error “cambia signo 1^{er} miembro, efectúa paréntesis y resta”, pero repitió este proceso en todos los ítems en que había un signo - delante de un paréntesis. Por ejemplo, en (7.d):

$$5 - (3 - 1) = 5 - (-3 - 1) = 5 - (-4) = 9$$

Hemos de decir que esta alumna tuvo perfecto el ejercicio 7 en el postest.

En el postest se produjeron dos errores que no se habían manifestado en el pretest. En primer lugar, el que hemos denominado “proceso incompleto” se refiere a que los alumnos no terminaron de realizar las operaciones aunque todas las que efectuaron eran correctas. Por ejemplo, en el ítem (7.a)

$$(3 + 5) + 4 = 8 + 4$$

Nos llama la atención este tipo de error porque lo cometieron alumnos que en el pretest tuvieron esta pregunta bien.

En segundo lugar, el que hemos denominado suma - y +. Por ejemplo, en el ítem (7.g):

$$3 - (6 - 2) + (-5 + 4) + 1 = 3 - 4 - 9 + 1$$

Frecuentemente ponen el signo del mayor (en este caso -) pero en lo que coinciden todos es en que realizaron la suma independientemente del signo.

Hemos de destacar que este tipo de error no se produjo en la pregunta 1, relativa a operaciones sencillas con números enteros. Aventuramos que podría ser porque en dicha pregunta, todos los alumnos usaron o la representación gráfica del Puzzle o la idea del opuesto. En cambio, en la pregunta 7, sólo 3 alumnos emplearon el Puzzle y ninguno de ellos cometió este tipo de error.

Por último, hay errores que no hemos logrado clasificar, los que hemos denominado otros.

Trataremos, ahora, de organizar los errores según su procedencia.

El estudio del origen de los errores sugiere un análisis más detallado utilizando para ello técnicas más precisas tales como las entrevistas clínicas y las redes sistémicas. Aunque estos instrumentos no se han empleado en este trabajo (no se descartan en avances posteriores de éste), hoy presentamos una primera hipótesis del origen de los errores.

ORIGEN		TIPO DE ERROR
Actitudes afectivas		Proceso incompleto
		Escribe mal el proceso
Ausencia de sentido	Estructural	Distribuye sólo respecto al 1 ^{er} miembro
		Suma - y +
		Jerarquía incorrecta
		Omisión de la resta
		Escribe mal el proceso
		Cambia el signo 1 ^{er} miembro
Obstáculo	Didáctico	Omisión de Paréntesis
		Inversión de la resta

Tabla 4

Ahora analizaremos los errores en la pregunta 8, en la que se les pedía a los alumnos que realizaran operaciones aditivas con expresiones algebraicas.

PREGUNTA 8

8. Calcula y reduce, cuando sea posible, las expresiones siguientes:

- a) $x + x + 3b + 5x =$
- b) $4 + 3y =$
- c) $(y - b) + b =$
- d) $3y - (b - 2y) =$
- e) $5x - (b - x + y) =$
- f) $b + (x + b) =$
- g) $(x - b + y) - (b - x + y) =$

La pregunta se consideró correcta cuando los alumnos operaron y simplificaron al máximo la expresión correctamente. Se tomó como regular cuando los alumnos eliminaron los paréntesis pero no simplificaron totalmente la expresión y mal en el resto de los casos.

Antes de analizar los errores cometido en esta pregunta, veamos los porcentajes de bien, regular, mal y no contestado.

Ítem	B	R	M	NC	%B	%R	%M	%NC								
a	1	12	0	0	2	1	10	0	7,69	92,31	0	0	15,38	7,69	76,92	0
b	1	11	0	0	2	2	10	0	7,69	92,31	0	0	15,38	15,38	76,92	0
c	1	11	0	1	2	1	11	0	7,69	69,23	0	7,69	7,69	7,69	84,62	0
d	1	4	0	1	0	8	12	0	7,69	30,77	0	7,69	0	61,54	92,31	0
e	1	4	0	0	0	9	12	0	7,69	30,77	0	0	0	69,23	92,31	0
f	1	13	0	0	0	0	12	0	7,69	100	0	0	0	0	92,31	0
g	1	5	0	0	0	7	12	1	7,69	38,46	0	0	0	53,85	92,31	7,69

Tabla 5

Como se observa en la tabla, hay una notable diferencia entre pre y postest. En el primero, los porcentajes de respuesta correcta son bajísimos mientras que los de ausencia de ésta son muy elevados. En cambio, en el postest, la ausencia de respuesta en todos los ítems menos el (8.g) es nula y los porcentajes de respuesta correcta alcanzan incluso el 100% (ítem (8.f)). Por estos motivos, hay mayor número de errores en el postest que en el pretest.

A continuación clasificamos los errores en la pregunta 8.

ERRORES EN LA PREGUNTA 8			
Pretest		Posttest	
Clausura	3	Clausura	2
$-b+b=2b$	2	$-b+b=2b$	4
Confunde potencia y multiplicación	1	Cambia el signo sólo a lo negativo del paréntesis	9
* NOTA		Omite paréntesis	5
		Proceso incompleto	1
		Otros	8

Tabla 6

Al observar la Tabla 6 vemos que el error más frecuente en el pretest fue la necesidad de los alumnos de cerrar las operaciones; así escriben, por ejemplo, en el ítem (8.b):

$$4 + 3y = 7y$$

Este error también se dio en el postest.

Otro tipo de error que se produjo tanto en el pretest como en el postest fue el de sumar cuando aparecen expresiones del tipo $-b + b = 2b$. Recordemos que este tipo de error también se dio en la pregunta 7, los alumnos tenían dificultades cuando el número negativo aparecía en primer lugar.

Otro de los errores del pretest, fue la confusión entre multiplicación y potencia, escribiendo, en este caso, x^2 en lugar de $2x$.

El resto de los errores se produjo únicamente en el postest. El más frecuente fue cambiar el signo exclusivamente cuando aparece un signo menos dentro del paréntesis. Un ejemplo de este tipo de error sería:

$$3y - (b - 2y) = 3y + b + 2y = 5y + b$$

Como ya comentamos en la pregunta 7, el error de omisión de paréntesis se

* Aunque a simple vista puede dar la impresión de que el número de errores en el postest es mucho mayor que en el pretest, debemos insistir en que los porcentajes de ausencia de respuesta en el pretest fueron muy elevados. Al haber un mayor número de respuestas en el postest, también el número de errores es mayor.



había prácticamente subsanado cuando se empleaban números enteros pero se había trasladado a las operaciones con expresiones algebraicas.

La persona que cometió el error que hemos denominado “proceso incompleto” no ha terminado de simplificar las expresiones y tiene el ítem regular.

Por último, hay un grupo de errores que, con este tipo de análisis, no sabemos cómo clasificar.

Hemos de destacar que 7 de los 13 alumnos han utilizado la representación gráfica del Puzzle y, de éstos, 4 tienen todos los ítems bien.

Pasemos ahora, tal y como hicimos con la pregunta 7, a organizar los errores en torno a su origen.

ORIGEN		TIPO DE ERROR
Actitudes afectivas		Proceso incompleto
Ausencia de sentido	Aritmética	Omisión de paréntesis
		Confunde potencia y multiplicación
	Procedimiento	$-b + b = 2b$
		Cambia el signo sólo a lo negativo del paréntesis
Obstáculo	Didáctico	Omisión de Paréntesis
	Cognitivo	Clausura

Tabla 7

Consideramos que el error de no completar el proceso de simplificación de la expresión tiene su origen en un exceso de confianza o en un despiste, principalmente porque la alumna que cometió este error tiene el resto de los ítems de la pregunta bien.

Hay muchos errores que se cometen en el Álgebra pero tienen que ver con problemas de la Aritmética no superados. Éste es el caso de la omisión de paréntesis, la confusión entre potencia y multiplicación y la suma en expresiones del tipo $-b + b$.

La omisión de paréntesis también puede situarse con origen en un obstáculo relacionado con la forma de enseñanza de los paréntesis, aún más, cuando parece

que los alumnos prácticamente han subsanado este error en ejercicios de números enteros. A la hora de enseñar la resolución de expresiones con operaciones combinadas de números enteros se suelen seguir dos estrategias. En la primera, los cálculos se efectúan de “dentro hacia fuera”, los paréntesis tienen preferencia y se resuelven en primer lugar, luego el corchete y finalmente la llave. Esto conlleva que cuando se pasa a realizar operaciones en las que intervienen números y letras, los alumnos sigan el mismo procedimiento, lo que produce errores porque los alumnos omiten el paréntesis y actúan como si no estuviera.

Entendemos que el error de sumar cuando se tienen expresiones del tipo $-b + b$, como ya dijimos, tiene su origen en la Aritmética. Es más, este error es del mismo tipo que el que denominamos suma $-y +$ en la pregunta 7.

Consideramos que el cambio de signo sólo a lo negativo del paréntesis es un error de procedimiento; los alumnos tienen la idea que cuando hay un signo negativo delante de un paréntesis se cambia de signo lo que hay en el interior pero lo han mezclado con que cuando el signo de delante del paréntesis es positivo se deja todo igual.

Por último, otro tipo de error cometido está relacionado con la necesidad de clausura, error que generalmente tiene su origen en un obstáculo cognitivo. Algunos alumnos que estudian Álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que a veces son incompletos, los alumnos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse (no dé un número) y que quede, por ejemplo, $4+3y$, ven la necesidad de completarla, de cerrarla, y dan como resultado $7y$.

Valoraciones e implicaciones didácticas

Para terminar, presentaremos las valoraciones e implicaciones didácticas que se desprenden de este estudio y que organizaremos en torno a los objetivos del trabajo. Recordamos estos objetivos:

- Analizar los resultados obtenidos en términos de pretest y postest.



- Clasificar los errores de los alumnos y determinar sus posibles orígenes.
- Valorar la experiencia didáctica y establecer posibles implicaciones didácticas.

Si analizamos los resultados en términos de pre y postest, observamos una mejoría en la mayoría de los conceptos tratados. Por esto, podemos afirmar del análisis de los resultados obtenidos que es una experiencia satisfactoria desde el punto de vista del aprendizaje de los alumnos.

En el pretest se demuestra que el periodo de instrucción anterior al Puzzle, con los números enteros, no ha incidido en el aprendizaje de la mayoría de los alumnos. El postest demuestra un éxito en las preguntas relativas a operaciones con cantidades positivas y negativas.

Debemos tener en cuenta que en el pretest, hubo un alto porcentaje de ausencia de respuesta, principalmente en las preguntas relacionadas con expresiones algebraicas. Sin embargo, en el postest, además de aumentar el porcentaje de respuesta correcta, cabe destacar la gran disminución del número de respuestas no contestadas.

Respecto a los errores, en primer lugar, queremos resaltar que no hemos encontrado errores debidos al manejo del Puzzle. En general el número de errores cometidos en el postest es mayor que el del pretest, si bien, hay que tener en cuenta que los porcentajes de ausencia de respuesta en el pretest, sobre todo en preguntas relacionadas con expresiones algebraicas, fueron elevados. Hubo errores que se repitieron tanto el pretest como en el postest, aunque en todos los casos, el número de errores en el postest fue menor que en el pretest. Por este motivo, consideramos que el Puzzle ha ayudado a solucionar o mejorar algunos de los errores cometidos por los alumnos. En concreto, claramente ha solucionado el error de omisión de paréntesis en los números enteros.

Respecto a las valoraciones de la experiencia, comenzaremos realizando algunas reflexiones sobre la metodología utilizada. Consideramos que gran parte del

éxito en los resultados obtenidos por los alumnos es debida a la metodología que se ha desarrollado durante el periodo de instrucción. Pensamos que la utilización de fichas es fundamental, pues permite que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea individualizado; cada alumno va construyendo su propio conocimiento a su ritmo y, además, dirige la toma de registro, pero obliga a que sea el alumno el que la desarrolle. También queremos destacar que los alumnos necesitan un periodo de conocimiento y adaptación a la utilización del Puzzle, por ello, creemos necesario que se dediquen una o dos sesiones a que los alumnos elaboren las plantillas de cada ficha del Puzzle, las recorten y clasifiquen, pues entendemos que de este modo se familiarizan con más facilidad con la idea de área que se asigna a cada cantidad. Dado que a la larga la perfección de la fichas es importante, una vez pasada esta etapa de familiarización, es conveniente repartir el Puzzle ya elaborado.

Por otro parte, aunque pueda parecer que el tiempo empleado con este tipo de instrucción es mayor que con la instrucción tradicional, no es así. Se cumplieron los contenidos que se planteaban en el instituto para 2º de ESO respecto al lenguaje algebraico, en un tiempo no superior al de un periodo de instrucción tradicional. Lo cierto es que los alumnos llegaron a manipular expresiones algebraicas de mayor complejidad que las que normalmente aparecen a estos niveles.

Hemos de destacar que para el correcto desarrollo de la experiencia es importante corregir la tendencia natural de los alumnos de transferir la sintaxis del lenguaje aritmético–algebraico a la sintaxis del Puzzle. Si esto no se corrige supone un grave problema pues invalida la conceptualización de las operaciones a través del Puzzle y es aquí, junto con la manipulación de la cantidad desconocida, donde creemos radica la bondad de este recurso.

Además, debemos señalar que el Puzzle, físicamente, sólo lo usaron muy al principio de la experiencia; enseguida les fue más cómodo dibujar. Aún así, creemos que sin esa manipulación física inicial no se llegaría a conceptualizar la cantidad



representada.

También es reseñable la naturalidad con que los alumnos aprenden a transitar entre el lenguaje natural en situaciones concretas y el lenguaje algebraico frente a lo engorroso que les resulta esto con otro tipo de instrucción.

En resumen, podemos señalar que:

- Con el uso del Puzzle Algebraico se ha notado una mejoría en la mayoría de los conceptos tratados, en especial, los relativos a las cantidades positivas y negativas
- No ha habido errores relacionados con el uso del Puzzle y éste ayuda a eliminar o reducir la mayoría de los errores de los alumnos.
- El material “Puzzle Algebraico” se puede usar en el aula de Matemáticas sin que existan conflictos con los alumnos. Además, nos permite darle otro enfoque a las clases que motiva a los alumnos pues aprenden Matemáticas de forma distinta a la tradicional.
- El material y la metodología empleada, permite que cada alumno vaya construyendo su propio conocimiento a su ritmo. Esto nos ayuda a los profesores a atender la diversidad cognitiva que encontramos en las clases de Matemáticas.

Como consecuencia de todo esto se puede señalar como un logro importante: el desarrollo en ciertos alumnos de una actitud positiva hacia las Matemáticas, llegando, en algunos casos, a recuperar las Matemáticas alumnos que suspendían desde la Primaria.

Por otro lado, el uso del Puzzle nos ha hecho reflexionar como profesoras que el proceso de enseñanza de cantidades positivas y negativas se centra en el concepto de número y en el algoritmo. El puzzle nos permite enseñar y aprender los conceptos de suma, resta y multiplicación de forma más completa, al tener los alumnos la posibilidad de usar más registros. Lo mismo pasa con la cantidad desconocida.

No nos gustaría terminar sin resaltar que parece una gran ventaja, para el uso de este mediador didáctico, que los alumnos no tuvieran conocimientos previos de Álgebra.

Basándonos en la afirmación anterior, nos parece deseable que estos alumnos de 2º ESO pudiesen continuar toda la Secundaria Obligatoria con este tipo de instrucción. Sería interesante para ellos como alumnos y para nosotras como profesoras/investigadoras ya que nos permitiría continuar con la experiencia a lo largo de todos los años de la Secundaria Obligatoria y podríamos diseñar propuestas didácticas más completas a partir de conclusiones más sólidas.

Bibliografía

- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico). México: Siglo Veintiuno.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198.
- Domínguez, E. (2003). *La innovación como mejora de la enseñanza. El papel de los materiales concretos en clase de Matemáticas*. Tesina de licenciatura. Universidad de La Laguna. Sin Publicar.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suisse: Peter Lang.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3, 1, 93-166.
- Palarea, M.M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Universidad de la Laguna. Sin publicar.
- Palarea, M. M.; Socas, M. M. (1994a). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del Lenguaje Algebraico. Monográfico Lenguaje y Matemáticas. *Suma*, 16, 91-98.
- Palarea, M. M.; Socas, M. M. (1994b). Elaborations Sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement-apprentissage de l'Algèbre scolaire (12-16 ans). *Actas de la 46 CIEAEM*, vol. 2, pp. 111-



119. Toulouse. France.

- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori: Barcelona.
- Socas, M. M. (1999). El papel de los materiales concretos con fines didácticos en la clase de matemáticas. En Socas, Camacho y Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, pp. 7-32. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2000). *Guía del Puzzle Algebraico*. Campus: La Laguna