FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
VOLUMEN VI, PÁGINAS 79-106
ISSN: 1885-2912

GEOMETRÍA, FORMACIÓN DE PROFESORES Y DEMOSTRACIÓN

Enrique de la Torre Fernández

Universidade da Coruña

Resumen

En este artículo se quiere analizar el estado de la cuestión sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría en relación con la formación de profesores. La enseñanza de la geometría se ha considerado durante años ligada a la realización de demostraciones, pero esa situación ha cambiado a partir de los años setenta, volviendo a retomarse recientemente, pero de una manea nueva, alejándose del aspecto deductivo y orientándose hacia la construcción del conocimiento matemático. Nos preguntamos cómo esta cuestión afecta a la formación de profesores de matemáticas y cómo se puede orientar todo el trabajo relacionado con la demostración para satisfacer los objetivos de la formación del profesorado. Hacemos un análisis exhaustivo de cómo está la cuestión en el ámbito internacional, comentando algunas investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas y la enseñanza y el aprendizaje de geometría. Terminaremos con algunas consideraciones y ejemplos de nuestra experiencia.

Abstract

In of article we want to analyse the state of play in relation to the teaching and learning of geometry in teacher training. Over the years, geometry has been considered always linked to proof, but that situation has been changing since the seventies, recently taking on a new look, moving away from the deductive aspect and going on to the construction of mathematical knowledge. We wondered how this question would affect the mathematics teacher training and how the related work could be orientated towards demonstration to satisfy the aims of teaching formation. We make an exhaustive analysis of the state of play on an international scale, we analyse some investigations of mathematics teacher training and the teaching and learning of geometry, and we conclude with some considerations and examples of our experience.

Introducción

La Geometría tiene fama de ser la gran olvidada en la enseñanza de las Matemáticas, en todos los niveles educativos. La Geometría no ha salido nunca completamente de los programas oficiales y de los libros de texto, pero tanto el modo en que ha cambiado esa forma de 'aparecer', como el tratamiento que se le ha dado en cada una de las aulas, ha sufrido profundos cambios.

En el estudio *"Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century"* (Mammana – Villani, 1998), se señala la segunda mitad del siglo XX como un momento en el que la Geometría parece haber perdido progresivamente su posición central inicial en la enseñanza de las Matemáticas en la mayor parte de los países.

Esta disminución ha sido tanto cualitativa como cuantitativa. Los síntomas de esta reducción, dice el citado estudio, se pueden encontrar en evaluaciones nacionales e internacionales sobre el conocimiento matemático de los estudiantes. Los ítemes concernientes a la Geometría o no aparecen o son muy escasos. Además las preguntas que se mantienen suelen ser relativas a 'hechos' elementales acerca de figuras simples y sus propiedades, y el resultado obtenido en las evaluaciones es relativamente bajo.

El comienzo de esta situación se puede encontrar en la exclamación de Jean Dieudonné, "¡Abajo Euclides! ¡Abajo el triángulo!", en diciembre de 1959, durante la apertura del Coloquio de Royaumont, indicando que es necesario cancelar definitivamente el estudio de la Geometría Euclídea y que toda la enseñanza de las Matemáticas debe basarse en la Teoría de conjuntos y las estructuras.

Además de lo anterior, el citado informe del ICMI señala otras dos causas:

- La introducción, en los años 60 y 70, de nuevos temas en los currículos matemáticos: Probabilidad, Estadística, Informática; y

- La disminución del número de horas dedicadas a las Matemáticas en la escuela.

Desde los años 80 se volvió a contenidos matemáticos más tradicionales (se fue olvidando la Teoría de conjuntos) y se introdujeron actividades de resolución de problemas (Problem Solving). Sin embargo, no se ha vuelto a la Geometría Euclídea clásica. Quizás porque en los cursos tradicionales de Geometría Euclídea el material se presentaba normalmente como un producto ya terminado, por lo tanto no encajaba en un curriculum donde se esperaba que los estudiantes tomaran parte activa en el desarrollo de su conocimiento matemático.

Otro aspecto que ha influido es un cambio en la situación escolar: en la mayor parte de los países el porcentaje de estudiantes que llega a la escuela secundaria ha aumentado muy rápidamente en las últimas décadas. Así el modo tradicional de enseñar Geometría abstracta a una minoría selecta se ha hecho a la vez más difícil y menos apropiado para las esperanzas de la mayor parte de los estudiantes de las nuevas generaciones. También se ha dado un declive en la preparación de los profesores, especialmente con respecto a la Geometría. Como estos nuevos profesores han aprendido Matemáticas bajo currículos que olvidaban la Geometría, han perdido una buena referencia en este campo, lo que a su vez promueve en ellos la tendencia a descuidar la enseñanza de la Geometría a sus alumnos.

Podría pensarse que también se diera este olvido por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática, pero no sucede así.

Haciendo una recopilación de artículos sobre Geometría, podemos observar que los trabajos sobre enseñanza de la Geometría no son escasos. Si consultamos la base de datos MATHDI (http://www.emis.de/MATH/DI.html), obtenemos unos resultados (actualizado al día 12 de mayo) que se pueden sintetizar en la siguiente tabla:

			(B)	B5*	B52	B53
Geometría	G	12.066	*(110)*	**54**	9	8
Aritmética	F	13.184	*(120)*	**60**	17	8
Álgebra	H	5.329	*(36)*	**19**	3	7
Análisis	I	8.108	*(46)*	**22**	0	1
Estadística y Probabilidad	K	7.794	*(64)*	**26**	6	8
Modelos, aplicaciones	M	9.248	*(117)*	**34**	2	2
Métodos numéricos. Matemáticas discretas	N	3.451	*(23)*	**7**	0	1

B: Política educativa y sistemas educativos
B5*: Formación de profesores
B52: Formación de profesores de primaria (1º - 4º cursos)
B53: Formación de profesores de primaria y secundaria (5º - 10º cursos)

Las intersecciones entre temas son las siguientes:

claves	F	H	I	K	M	N	U
B5*, G	3	0	1	2	1	0	8

U: Materiales y medios educativos. Tecnología educativa.

Los artículos divulgativos o sobre investigaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría sólo son superados en número por los que tratan de la Aritmética, y muy escasamente. Sucede lo mismo también si restringimos la búsqueda a los que se refieren además a la formación de profesores.

¿Qué nos quiere decir esto? Podríamos intuir que falta un canal de comunicación entre los investigadores o formadores de profesores y los profesores de los niveles anteriores a la universidad. Quizás también existan en los demás campos científicos estas lagunas en la comunicación entre investigación y práctica, pero aquí podemos pensar que es un poco diferente, o que se trata de un caso más sangrante, pues el elevado número de investigaciones en Geometría (en comparación con otros temas de Matemáticas) no se traduce en las horas dedicadas a estos contenidos en el aula.

¿Podemos poner a esto un remedio? Hay un camino obvio, que consistiría en mejorar los canales de comunicación entre investigación y práctica docente, aunque quizás no sepamos cómo llevarlo a cabo. Otro camino sería incidir directamente en la formación del profesorado, y en particular en la formación de maestros y maestras.

Sentando las bases para un acercamiento a la materia Geometría, entendida como un estudio de relaciones espaciales, a partir de las que es posible construir relaciones numéricas y razonamientos y realizando esta aproximación desde situaciones donde la formalización es posterior a la intuición y al descubrimiento de relaciones, se puede entender la Geometría como un aspecto de las Matemáticas que está muy cerca de la resolución de problemas y de situaciones y tanto o más, como lo está la Aritmética, el Análisis o el Álgebra. Es más, se podría percibir la Geometría como una ayuda y garantía de que los conceptos y los procedimientos en otros temas de Matemáticas son comprendidos y son justificables.

La formación de profesores

La formación de profesoras y profesores de Matemáticas es una cuestión de plena actualidad. Lo ha sido desde hace varios años, y lo que se ha dicho sobre ello no ha ido más que acrecentando el saber sobre lo que debe ser y sobre las prioridades en que se debe sustentar. Asimismo, está siendo posible cimentar un marco teórico y un campo de investigación sobre todo esto.

Desde una posición general de formación de maestros, Emigdia Repetto señala la importancia excepcional de la profesión docente y su carácter de no poder ser dominada de una vez para siempre, "ya que se ejerce sobre sujetos diferentes y cambiantes, y es necesario adaptarse a sus características específicas" (Repetto, 2001).

Refiriéndose a la problemática de la formación de profesores de Matemáticas, Llinares (1998) indica la importancia de considerar la perspectiva profesional en la formación de profesores, considerándola como un proceso inductivo: *"el conocimiento profesional se genera en el uso del conocimiento profesional en situaciones concretas de la enseñanza"*. Señala, además, que el profesor no es un técnico que únicamente aplica teorías; puede concebirse más bien como un proceso de *enculturación* (Llinares, 1994). Menciona Llinares aquellas cualidades que, según Leinhardt y otros (1995), se deben fomentar en los estudiantes para profesores: observación, predicción, crítica, generación y análisis. Estas acciones cognitivas establecen referencias para pensar en la estructura del programa de formación de tales profesionales.

La formación en Geometría de los profesores

La exploración anteriormente señalada acerca del número de trabajos tanto en Geometría como en su didáctica, nos indica la atención que se presta a la formación de profesores en general y también el creciente interés por este tema, pues de los 54 encontrados todos salvo 3, tienen menos de 10 años.

Creo que aquí deberíamos precisar que, muy unida a la enseñanza de la Geometría debe estar la cuestión de la demostración, o de la prueba. Es cierto que no deberíamos olvidarnos de la demostración, del razonamiento, cuando hablamos de cualquier tema de Matemáticas, sea al nivel que sea. Pero, cuando atañe a la Geometría, la demostración parece que alcanza un estatus en cierta manera diferente. A mi parecer, en todos los niveles de enseñanza, es muy necesario recurrir a la representación y a la modelización, sobre todo al iniciar nuevos conceptos. Cuando se trata de temas no geométricos, hay una cierta distancia entre los conceptos aludidos y los modelos o los materiales que los representan. Así que, por un lado, los razonamientos sobre esos conceptos o procedimientos están continuamente moviéndose desde el terreno de la abstracción al terreno de la materialización de las ideas. Por ejemplo: para 'demostrar' cómo se debe realizar la suma o el producto de fracciones, estamos 'alternando' desde su representación con números a la representación de esas cantidades con trozos de papel o tacos de madera e imaginando lo que esas piezas simbolizan.

Por otro lado, si queremos basar el razonamiento directamente en lo que los conceptos simbolizan o representan, nos movemos en el terreno completo de la abstracción, y eso es algo que no se va a poder alcanzar hasta que los conceptos estén completamente interiorizados y comprendidos.

Si ahora pensamos en cualquier tema geométrico, los materiales y la manipulación, deben aparecer de una manera natural. La abstracción sigue siendo necesaria, pero crecerá con el uso de los materiales; no así en otros temas, donde para buscar la representación o el modelo material de un concepto, era ya necesario recurrir a la abstracción y a lo que dicho concepto matemático significa.

Como ejemplo inicial de una investigación centrada en la Geometría y la formación de profesores, podemos citar al trabajo de Bartolini y Bazzini (2003) quienes, reconociendo la relación compleja entre el campo de la Didáctica de las Matemáticas y otros campos de investigación (Matemáticas, Pedagogía, Epistemología, Historia, Psicología, Semiótica, Sociología, Ciencias cognitivas) analizan algunos casos de provechoso y de fallido diálogo entre expertos de estos diferentes campos.

Uno de los ejemplos que describen de proyectos de investigación (basados en el diálogo entre teoría y práctica), donde intervienen profesores-investigadores, junto con investigadores universitarios, se refiere a *una aproximación al pensamiento teórico en Geometría* y a la demostración en diferentes niveles escolares (desde la escuela primaria a la universidad).

Señalan la diferente importancia que se le otorga a la demostración en Matemáticas y en la Educación Matemática. Mientras que en Matemáticas la función de los teoremas y de las demostraciones es fundamental, en Educación Matemática ha habido una tendencia a nivel internacional a suprimir los teoremas y las demostraciones de los currículos matemáticos, como una reacción a la aproximación formal de los años setenta (NCTM, 1991).

Investigadores de las universidades de Génova, Modena, Pisa y Torino, consideraron esencial resistirse a esta tendencia, lo que no significó que concibieran la Matemática como una ciencia que se tenga que enseñar desde el comienzo de una manera deductiva. Incluso defendiendo la importancia de la prueba, hay diferencia entre la perspectiva de un matemático y la de un didacta.

"Los investigadores matemáticos ignoran a menudo los aspectos de aplicación y confinan (las Matemáticas) a la puramente deductiva noción de prueba... Los profesores, por otro lado, deben tomar en consideración la contribución que una prueba hace a nuestra comprensión de la realidad. Todos estos aspectos que el matemático práctico ignora representan un importante papel en la enseñanza y el aprendizaje. La prueba no se puede enseñar y aprender sin considerar la relación de las Matemáticas con la realidad. Esto

implica un alto nivel de complejidad epistemológica". (Hanna y Jahnke, 1993, p. 432)

Se llevaron a cabo estudios exploratorios en distintos niveles escolares (desde Primaria a la Universidad). La presencia de profesores fue determinante en cada fase (diseño, implementación, recolección de datos y análisis). Estos profesores tuvieron necesidad de profundizar en algunos aspectos concernientes a la dimensión teórica de las Matemáticas y su relación con la realidad experiencial. En otras palabras, la dimensión teórica de las Matemáticas llegó a ser parte de la vida intelectual de los profesores.

En el aula se realizó una aproximación con referentes concretos, típica de la 'Realistic Mathematics Education' (Presmeg, 2001), prestando principal atención a la dimensión teórica de las Matemáticas (principalmente el desarrollo de teoremas y demostraciones) y los experimentos se enmarcaron en un referente teórico basado en las ideas de Vygotsky, donde cada uno de los elementos se pone en relación con los demás. El objetivo era crear las condiciones para que la mayor parte de los estudiantes fuera capaz de producir pruebas.

Los resultados que obtuvieron fueron sorprendentes en relación con la supuesta dificultad en afrontar la dimensión teórica de las Matemáticas: la mayor parte de los estudiantes, incluso en enseñanza obligatoria (grados 5 a 8), tuvieron éxito en producir conjeturas y en construir pruebas.

Por poner un ejemplo más o insistir en la importancia de una educación matemática 'realista' o que conecte con el mundo real, se puede traer aquí la 'modelización matemática'. A la hora de buscar un modelo para representar una situación o un problema, creo que la visualización representa un papel importante y la Geometría, el modo de poner en relación visual los distintos aspectos o hechos que intervienen (o aparecen) en esa situación, es un vehículo que describe y construye las líneas básicas que permiten construir el modelo.

Pongamos por ejemplo dos de las situaciones descritas en el trabajo de De Corte y otros (2000). Éstas son:

- "Bruce y Alice van a la misma escuela. Bruce vive a una distancia de 18 km de la escuela y Alice a 14 km. ¿A qué distancia vive Bruce de Alice?"

- "328 personas van a hacer un viaje. Un autobús tiene 40 plazas sentadas. ¿Cuántos autobuses se necesitan?"

Está claro que en la primera situación, en cuanto se quiera hacer una representación, se mostrará evidentemente la no adecuación de la respuesta predominante que se ha obtenido (la suma de las dos cantidades). Pero en la segunda situación, si los profesores han sido entrenados en la necesidad de buscar un modelo a cada situación problemática, ellos a su vez inducirán a sus estudiantes a buscar una representación o modelo para cada uno de los problemas planteados. Así el mero hecho de representar los autobuses requeridos y 'colocar' en ellos a los viajeros, hará evidente la necesidad de proporcionar una respuesta entera (y no el 8,2 habitual)

Algunas investigaciones

Son varias las propuestas de formación inicial que insisten en la importancia de que el estudiante para maestro perciba la utilidad, como una función significativa de su proceso de formación. Así afirman que el conocimiento didáctico del contenido se puede construir a partir de actividades que hagan palpable la vinculación entre la realidad futura del profesor y la teoría recibida en su formación inicial.

En esta línea tenemos el trabajo de Climent y Carrillo (2002) donde describen una propuesta de formación en la que *"los estudiantes, tras enfrentarse a una actividad matemática, la analizan tomando datos del desarrollo de tal actividad en educación primaria. .... consideran tanto aspectos de su aprendizaje, del aprendizaje de los alumnos y de la maestra, como características propias de la enseñanza"*.

Empiezan por señalar el carácter situado del conocimiento profesional, lo que no sólo afecta al modo en que se genera (su proceso de construcción ligado a situaciones concretas), sino también al modo en que el estudiante lo conserva. Es decir, el contexto donde se desarrolla el conocimiento entra ya a formar parte de este conocimiento. A partir de ahí proponen que en la formación inicial de maestros se presenten las siguientes tareas:

- *Análisis del contenido matemático de Primaria.*
- *Análisis de situaciones de aula.*
- *Simulaciones de situaciones de aula de Primaria en el aula de formación inicial.*
- *Estudio de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos.*

Si vamos a lo que nos interesa aquí, Climent y Carrillo relatan como ejemplo que concreta la propuesta, una secuencia de actividades en la que se pide a los alumnos tres tipos de tareas:

Análisis de una situación matemática: los estudiantes abordan una situación matemática y discuten su resolución, problematizando el conocimiento que se pone en juego y la realización de la propia tarea: se sitúan más próximos así al polo de la *interpretación* del contenido.

Adaptación al aula de Primaria: se les pide que se planteen y discutan la posible adecuación de esta actividad a la Educación Primaria. Ponen así en juego sus concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas.

Análisis de una situación real: los estudiantes analizan situaciones reales de aula en las que se ha planteado una adaptación de la actividad realizada por ellos (reflexión y crítica sobre la práctica).

El ejemplo de situación matemática que presentan es el siguiente: *"Dada una trama de puntos rectangular (o un geoplano), dibujar triángulos diferentes, teniendo en cuenta que no se consideran diferentes dos triángulos isométricos o ampliaciones o reducciones de un mismo triángulo."*

Sobre esta actividad trabajan en grupos y luego se realiza una puesta en común. Ahí es donde salen a la luz los diferentes razonamientos que manejan los estudiantes. Al tener que defender por qué consideran que un triángulo se puede considerar o no diferente a otro, los estudiantes argumentan y se hace necesario evidenciar la falta de coherencia de sus argumentaciones. No se busca el realizar una demostración, sino *entrar en el campo de la teoría matemática*, para buscar aquellos conocimientos que puedo o no utilizar para apoyar las afirmaciones.

Por otro lado, en Bélgica, Pierre Marlier (1997) relataba el bajo nivel de los estudiantes para maestro y se inclina, en cuanto a la formación en Didáctica de la Matemática, por el "*método de la serie de problemas que van a alguna parte*". Lo ilustra con ejemplos de problemas para los que recomienda el recurso al programa de geometría dinámica Cabri-Géomètre, y a los inicios de la geometría euclídea, recordando lo que tiene ésta de 'constructivista'. Entre la serie de problemas que enumera, destacamos la serie de construcciones de triángulos donde, comenzando por la petición de construcción de uno cuyos lados midan 10, 7 y 6 cm, pasa por otros cuyas longitudes de los lados lo hacen irresoluble, obligando así a que los estudiantes descubran las pertinentes relaciones entre los lados.

También pide la construcción de triángulos desde aquellos enunciados en los que se conocen determinados lados y ángulos, y en los que los datos llevan a más de una solución (*Construir un triángulo rectángulo tal que un lado que forma el ángulo recto mide 5 cm y un ángulo mide 40º*, o *Construir un triángulo inscrito a un círculo de 3 cm de radio con un lado de 4 cm y un ángulo adyacente a este lado de 35º*), pudiéndose entonces descubrir condiciones para la unicidad; hasta otros enunciados donde los datos son superfluos y es necesario preguntarse por su compatibilidad (*Construir un triángulo rectángulo tal que un lado que forma el ángulo recto mide 5 cm, la hipotenusa mide 8 cm y un ángulo tiene por amplitud 35º;* o *Construir un triángulo rectángulo tal que un lado mide 4 cm, la hipotenusa mide 8 cm. y un ángulo tiene por amplitud 30º*).

Sin despreciar la importancia de los contenidos de la materia (los saberes), *se pone el acento sobre las competencias*, actitudes intelectuales entre las cuales el hecho de plantearse cuestiones y el examen de las posibilidades de una situación dada no son las menos interesantes, además de buscar en todo momento que los estudiantes sean capaces de defender (de justificar) sus afirmaciones, resaltando la importancia de argumentar, de demostrar, sin necesidad de que sean introducidos en la técnica 'formal' de las demostraciones matemáticas. Así no es necesario 'separar' la demostración en Matemáticas de la demostración (o argumentación) necesaria para la formación del ciudadano en la sociedad actual (objetivo final de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática).

Aquí quiero señalar la importancia de esta última aseveración: considero que hay una diferencia (y un parecido) muy grandes entre la demostración formal en Matemáticas y la capacidad (o aptitud) para demostrar (o argumentar) en la vida diaria. Puedo afirmar que solamente a través de un estudio profundo de las demostraciones en teoría matemática, se puede llegar a concebir el importante papel y la cualidad de la demostración, su característica de, como dice Gila Hanna, liberación de una autoridad externa al basar ésta en el recurso a la razón como última autoridad.

Sin embargo, si nos limitamos a estudiar o ver demostraciones de una manera circunstancial, creo que lo que se transmite es lo contrario de lo que dice Hanna: la demostración puede parecer la constatación de una autoridad superior e inalcanzable como referente último de las afirmaciones no entendidas. Se reforzaría así la presentación autoritaria de las Matemáticas, contribuyendo a su rechazo.

Es por ello que considero que, tanto en la formación inicial de los maestros, como en la enseñanza obligatoria, se debe dar este recurso a la demostración bajo la petición constante de un 'argumento' que obligue al estudiante (en todos los niveles) a buscar aquellos conocimientos que posee y que le hacen concebir lo que acaba de afirmar.

En el aula de formación de profesores

Como último apartado, quiero exponer algunas consideraciones personales sobre la formación de profesores y Geometría.

Puede que no sea completamente correcto el calificativo de ‘miedo’, pero lo que muchos de nuestros estudiantes sienten hacia las Matemáticas, y hacia la Geometría, encaja en esa actitud, además de en la de ignorancia o desconocimiento. No se trata solamente de que desconozcan procedimientos o conceptos matemáticos; su actitud es la de un buscar las maneras de ‘pasar’ rápidamente por estos contenidos ‘a los que no son capaces de entrar’.

Creo, entonces, que, si estamos trabajando en la formación de profesores, deberíamos fijarnos como objetivos, primero, que nuestros estudiantes se sientan llenos de confianza al situarse al frente de una clase de Matemáticas y, segundo, dotarlos de la capacidad de poder usar las Matemáticas para analizar y enfrentar las situaciones de la vida diaria.

El primer objetivo lo considero fundamental para prevenir dos miedos: miedo a la asignatura y miedo a los estudiantes. El ‘miedo a la asignatura’ debe provenir del escueto conocimiento que nuestros estudiantes poseerán de la materia Matemáticas cuando se sitúen frente a una clase en Educación Primaria, miedo que se podría soslayar, en parte, con un aumento considerable de los cursos de matemáticas en su formación inicial, lo que puede suponer una tarea imposible. El ‘miedo a los estudiantes’ proviene del también escueto conocimiento, no ya de quiénes y de cómo son sus alumnas y alumnos, sino de cómo se comportarán con relación a la asignatura y de cómo se debieran comportar.

El segundo objetivo -dotarlos de la capacidad de poder usar las Matemáticas para analizar y enfrentar situaciones de la vida diaria- lo considero básico para conseguir la primera meta del proceso educativo: la consecución de un individuo autónomo y crítico.

Sintetizando, podemos esquematizar así nuestros objetivos:

- Objetivo 1: Sentir confianza al frente de una clase
  - Subobjetivo 1.a: Prevenir el miedo a la asignatura.
  - Subobjetivo 1.b: Prevenir el miedo a los estudiantes.
- Objetivo 2: Poder usar las Matemáticas en el análisis y crítica de las situaciones diarias.

Vistas las cosas de este modo, parece que queda en segundo plano el problema de la didáctica de cada contenido específico.

Si nos enfrentamos ahora a cada uno de los objetivos, debemos preguntarnos primero, ¿cómo podemos prevenir el miedo a la asignatura? Parece que la manera más obvia es conociendo a fondo la materia, pero no parece que los profesores de Educación Secundaria o Bachillerato, licenciados en Matemáticas, nos den la solución. Puede que un conocimiento profundo de la materia lo que consigue a veces es aumentar la distancia entre educando y educador, estableciendo una barrera que el educador se encarga de que no traspase el educando puesto que, por definición, el conocimiento matemático es superior, formal y abstracto. Tener confianza con lo que no conocemos es difícil, y la tendencia es la inseguridad y el aislamiento: relegamos así el conocimiento matemático, geométrico, al terreno de las cuestiones que se plantean en el currículum regido por los libros de texto.

Para mí la solución vendría de la mano de un conocimiento distinto de las Matemáticas, de la Geometría, que ya conocen. No un conocimiento de Geometría y Didáctica, sino de Geometría en contextos didácticos, si queremos llamarlo de algún modo. Se trata de volver a estudiar la Geometría tomando como motor situaciones que el estudiante encuentra en su quehacer diario. Tiene que ser una forma de repensar la materia, el conocimiento que de esta materia poseemos y poseen nuestros alumnos.

Y ese repensar debe comenzar por el filtro de la crítica, que empieza en el preguntarse '*¿por qué?*': *¿por qué se estudian los ángulos?*, *¿por qué se plantean estos problemas en clase?*, *¿por qué se calcula así el área de una figura?*

Mientras el profesor juntamente con sus alumnas y alumnos, no sea capaz de encarar estas y otras preguntas, cuyas respuestas no tiene por qué saber, no podremos avanzar hacia la consecución de los objetivos primordiales de la enseñanza y el aprendizaje. Cuando digo que quizás no se conozcan las respuestas me refiero a que éstas estarán en función del momento, del profesor y de los estudiantes.

Si pensamos que en el proceso de enseñar, el 'sujeto' de este proceso es tanto el profesor como los estudiantes, y no solamente el profesor, no podemos pensar en construir una 'Didáctica de la Geometría' sin tener en cuenta a cada uno de ellos, con su realidad, sus inquietudes y sus experiencias; es decir, no podemos limitarnos a los condicionantes psicológicos y epistemológicos. Lo que tiene sentido realizar en una clase puede no ser apropiado para la contigua. Frente a la comodidad de un currículum compartido debemos encarar el reto de una filosofía de enseñar y aprender, en particular Matemáticas, y Geometría; filosofía de enseñar y aprender en la que no se deje de contemplar en ningún momento el objetivo esencial de la educación, y filosofía que parta de una Filosofía de las Matemáticas adecuada a la situación que vivimos hoy, en esta sociedad de la información donde las Matemáticas permean todo y de una forma distinta a cómo se suelen presentar en un aula de Matemáticas.

También tenemos en la vida diaria situaciones cuya solución nos llevaría a recurrir a problemas clásicos, pero que, si nos dejamos arrastrar por la idea de usar la Geometría para el análisis y la crítica de la sociedad, nos veremos enfrascados en un debate en el que los contenidos geométricos encuentran su verdadero sentido, no como conceptos ya estudiados y analizados que el estudiante debe conocer, sino como conceptos-en-construcción que el estudiante redescubre y sitúa adecuadamente en su esquema ciencia-sociedad-cultura.

Los caminos que abren soluciones para este planteamiento del aprendizaje de la Geometría los vemos enmarcarse en tres ideas: *trabajo por proyectos*, *ejemplificación* y *planteamiento de problemas*. La propuesta de *planteamiento de problemas*, sin separarse de las otras dos, puede reconducirlas en una manera de trabajar en la Matemática escolar no muy distinta al quehacer de los investigadores matemáticos. Una pedagogía de 'planteamiento de problemas' representa una aproximación a la enseñanza poderosamente emancipadora (Ernest, 1991, p. 291) y hace que los estudiantes se llenen de poder. Es decir, promueve el conocimiento activo y la creación de conocimiento por parte de los estudiantes y legitima ese conocimiento como Matemáticas, al menos en el contexto escolar.

La resolución de problemas permite que el estudiante se enfrente a su aprendizaje de una manera creativa, pero el profesor todavía mantiene mucho control sobre el contenido y sobre la forma de enseñanza. Si se aplica el enfoque investigador de modo que se permita al estudiante plantear problemas y preguntas para una investigación relativamente libre, la educación alcanza su objetivo y el estudiante está construyendo su conocimiento matemático.

La idea que centra este proyecto es el enfocar de una determinada manera la tarea de preparar un profesor de Matemáticas, que es al mismo tiempo generalista. Se busca que el estudiante para profesor de Primaria sea capaz de 'construir conocimiento matemático', o, de otra manera, que sea capaz de 'hacer Matemáticas'. Todo esto se puede contemplar como una manera de relacionar las Matemáticas, y la Geometría en particular, la demostración y el planteamiento de problemas, lo que requiere grandes dosis de visualización, y además el situar como un objetivo central la construcción de conocimiento matemático, entendida como una manera de ver el 'hacer Matemáticas'. Por ello se plantea esta tarea en la formación de profesores como un modo de ver 'en ejercicio' lo que significa 'hacer Matemáticas'.

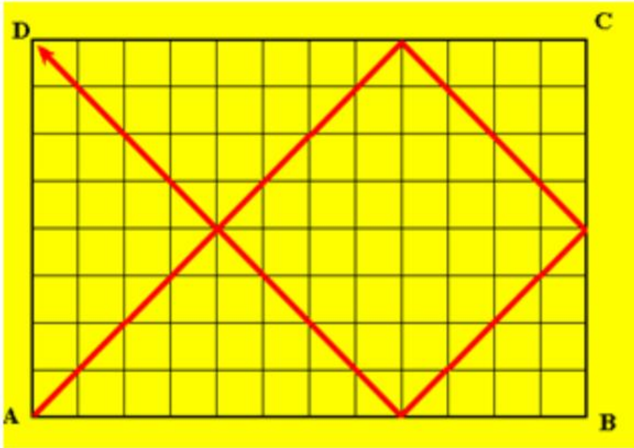
No creo que en un determinado momento podamos enseñar algo nuevo y luego pedir a los estudiantes que sean creativos y 'construyan' Matemáticas. Me parece percibir que en las clases de Matemáticas se verifica una ruptura alternativa entre momentos en los que se 'comunica' conocimiento y momentos en los que se 'construye' conocimiento, y eso en el mejor de los casos, cuando no se trata de una continuidad absoluta de momentos del primer tipo.

Si esto es lo que pensamos de la enseñanza en el nivel primario, ¿no se debe reflejar en la enseñanza en el nivel universitario?

Ejemplificaciones:

1) La siguiente situación es parte de una actividad realizada en la asignatura optativa 'Estrategias de Resolución de Problemas' de las especialidades de Educación Primaria y Educación Infantil, en la titulación de Maestro.

<u>Problema</u>: Una bola perfectamente elástica sale del vértice A formando un ángulo de 45º con la horizontal. Cuando encuentra una de las cuatro paredes del rectángulo rebota, formando siempre un ángulo de 45º con las bandas. ¿A qué esquina llega y cuántos tramos recorrerá? Estudiar esta cuestión para tableros de otras dimensiones.



El objetivo inicial de la situación presentada parece ser encontrar una expresión general del número de rebotes o tramos recorridos por la bola en una mesa de billar de diferentes dimensiones. En principio aparecen implicadas propiedades físicas y geométricas: se habla de reflexión, ángulos, dimensiones, diagonales,… Más adelante en algún grupo se habla de simetría, semejanza. Pero en algunos los estudiantes aparecen conexiones con recuerdos relacionados con otros temas matemáticos, y así es frecuente que alguien mencione el máximo común divisor, recordando aquello que se hacía con las fracciones cuando se querían 'reducir' y también se mencione la palabra 'simplificar'. Con alguna orientación, a veces, se relacionan estas ideas con la 'simplificación' que se introduce en el enunciado si se limitan a estudiar rectángulos cuyas longitudes de los lados son números primos entre sí, lo que surge después de formular la tesis de que el comportamiento es idéntico en todos los rectángulos semejantes.

El paso final es lograr que las hipótesis que han ido surgiendo, se puedan enunciar como teoremas para demostrar. El proceso de sintetizar y expresar las relaciones que se han supuesto es un proceso complejo en el que los estudiantes se enfrentan con la tarea de 'construir matemáticas', en una manera semejante a la que se espera que ellos buscarán en sus futuros alumnos de Educación

Primaria.

Esta dificultad que aparece a la hora de enunciar el teorema es doble, además de las vacilaciones para lograr una expresión clara del resultado que se ha establecido, está la dificultad para conseguir, en un enunciado relativamente corto, expresar las hipótesis y las relaciones encontradas.

Para completar esta ejemplificación, podemos transcribir algunos de los 'teoremas' que los estudiantes fueron capaces de formular:

Teorema de Javier: *"Una bola que sale del vértice A formando un ángulo de 45º con la horizontal, al encontrarse con una de las cuatro bandas, rebota formando siempre un ángulo de 45º con las bandas. La bola pasará por todos los vértices de la trama de cuadrados si y sólo si una de las bandas del rectángulo es de longitud impar y no tiene una medida múltiplo de la otra banda".*

Teorema de José y Richard: *"Si dos tableros tienen sus dimensiones proporcionales (son rectángulos semejantes) y la bola sale desde la misma esquina, entonces llegará en ambos a la misma esquina y con el mismo número de rebotes".*

Teorema de Elvira: *"En un tablero* $a \times b$*, (si a y b son primos entre sí) el número N de tramos recorridos por la bola es:* $N = a + b - 1$*"*

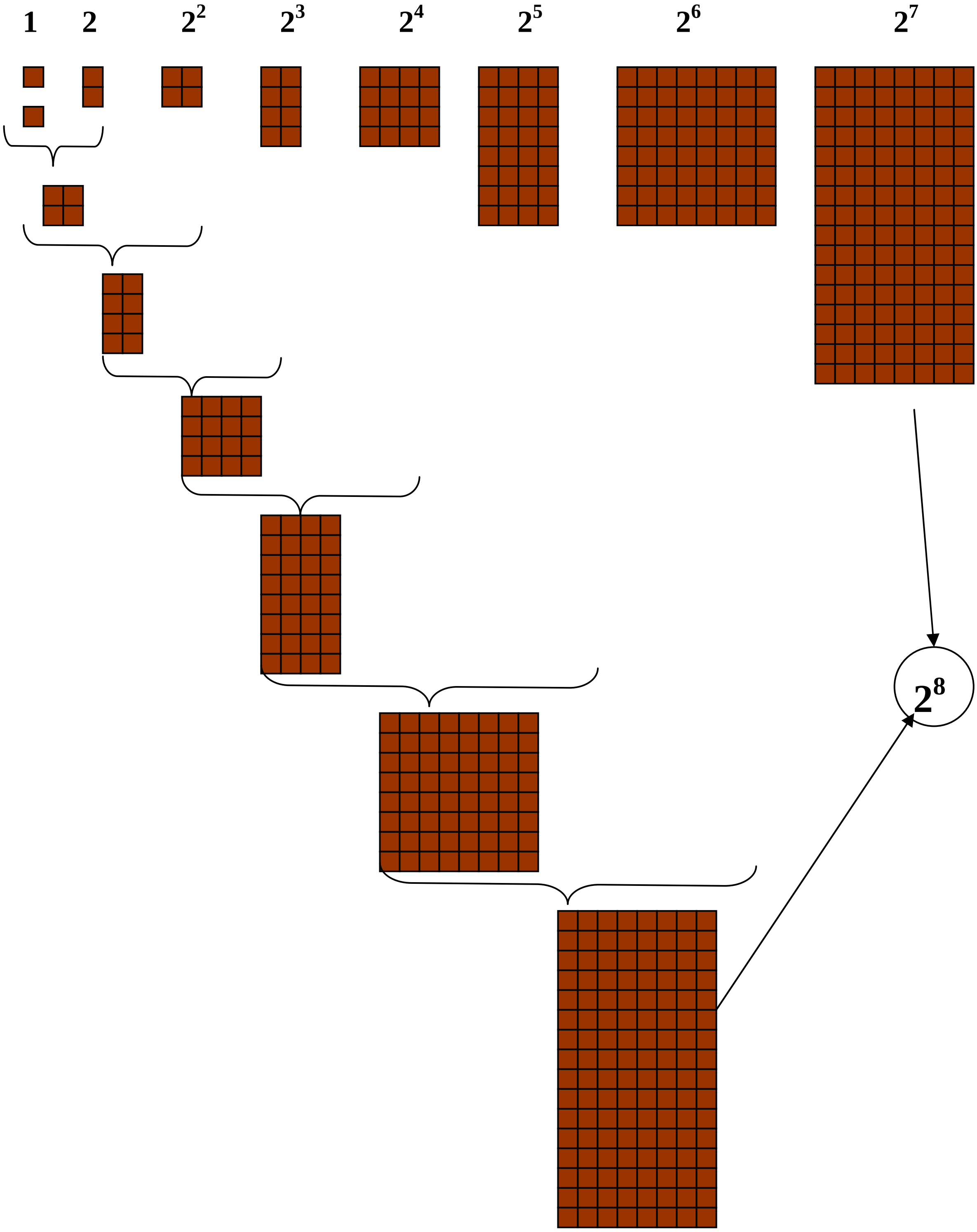
2) Otro ejemplo es de una índole un poco diferente. La situación presentada es la bien conocida de las Torres de Hanoi:

Tres agujas están clavadas sobre una tabla. En la aguja de la izquierda hay 64 discos, ordenados por tamaño: desde el mayor que reposa en la tabla, hasta el más pequeño, en lo alto del montón. Un movimiento consiste en quitar *el disco superior de una aguja y ponerlo en la pila de otra aguja, siempre que no quede encima de un disco de menor tamaño. Encontrar una secuencia de movimientos que permita pasar los discos de la aguja de la izquierda a la aguja derecha. ¿Cuál es el menor número de movimientos necesario para pasar los 64 discos?*

Los estudiantes, habitualmente son capaces de llegar a las dos fórmulas, la recursiva ($a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$) y la general ($a_n = 2^n - 1$). La de recursión está cuasi-demostrada, pero la otra es más difícil, no bastaría la comprobación de los primeros casos. Una manera de demostrarla es construir el 'número de movimientos para, por ejemplo, 6 arandelas', desarrollando la fórmula recursiva y aplicarla a 1 arandela, a continuación a 2, a 3,.... hasta 6: 2(2(2(2(2x1+1)+1)+1)+1)+1, quitando los paréntesis llegamos a que es igual a: $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ y eso es: 1 menos que 2^6.

En general, llegaremos a la suma de las potencias sucesivas de 2, con exponentes desde 0 hasta n-1, lo que se demuestra que es igual a 2^n-1.

Para demostrar esto último, lo podemos hacer con fichas como las de los bloques multibase, o también representándolo de la manera siguiente:


1
2
2^2
2^3
2^4
2^5
2^6
2^7
2^8

Referencias bibliográficas

Arzarello, F. (2003). Mente matematica, cervello biologico e nuove tecnologie. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 26, A-B, 3, 305-334.

Audibert, G. (1991). Comment concevoir la formation des maîtres en géométrie?. Le metier d'enseignant de mathematiques dans un monde qui change. Compte rendu. En Ciosek, M. (editor) *CIEAEM 1991*. 61-67 of 556 p. Wyzsza Szkola Pedagogiczna, Cracow (Poland).

Bartolini Bussi, Maria G.; Bazzini, Luciana (2003). Research, practice and theory in didactics of mathematics: towards dialogue between different fields. *Ed. Studies in Mathematics*, 54, 203-223.

Blanco, Lorenzo J.; Barrantes, Manuel (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza - aprendizaje. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 6(2), 107-132.

BROWN, S.I. - WALTER, M.I. (1990). *The art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associated. New Jersey.

Climent, Nuria; Carrillo, José (2002). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: los triángulos, una situación de primaria. *Revista EMA*, v. 7(2), 171-205.

Contreras, L.C.; Blanco, L. (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el Área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Univ. de Extremadura. Cáceres.

De Corte, Erik; Verschaffel, Lieven; Greer, Brian (2000). Conecting mathematics problem solving to the real world. En Alan Rogerson (ed.) *International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for Living. Proceedings*. (Amman, Jordan). 8 p. (http://math.unipa.it/~grim/jourdain.htm)

Ernest, P., (1991). *The Philosophy of Math. Education*. Falmer Press. London

Flores Martínez, Pablo (1999). Paradojas matemáticas para la formación de profesores. *SUMA*, 31, 27-35.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of Proof., en Puig, L.-Gutiérrez, A., *Proceedings of he 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia. Vol. 1, pp. 21-34.

Hanna, G. (1998). Proof as Explanation in Geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 20, 4-13.

Hanna, G.; Jahnke, H.N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 421-438.

Houdement, Catherine; Kuzniak, Alain (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 20(1) 89-116.

Leinhardt, G.; McCarthy, K.; Merriman, J. (1995). Integrating professional knowledge: the theory of practice and the practice of theory. *Learning and Instruction*, 5, 401-408.

Llinares, Salvador (1994). El profesor de Matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional, en L. Santaló y otros, *La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia*. Rialp. Madrid.

Llinares, Salvador (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas*, 17, 51-63.

Llinares, Salvador (2003). Contesto e pratica nella formazione degli insegnanti di matemática. Uno sguardo al caso della Spagna. En Martha I. Fandiño (ed.). *Riflessioni sulla formazione iniziale dgli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora Editrice Bologna. Italia. pp. 115-140.

Mammana, C.; Villani, V. (eds.) (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study*. Kluwer. Dordrecht, Holanda.

Marlier, P. (1997). Idées pour la formation mathématique des instituteurs. *Mathématique & Pédagogie*, 111, 55-71.

NCTM (1991, a). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*.. SAEM Thales. Sevilla

NCTM (1991, b). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, USA.

Niss, M (1998). Teacher qualifications and the education of teachers, en Mammana y Villani, *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study*.

Presmeg, N. (2001). Realistic mathematics education research: Leen Streefland's work continues. *Proceedings of PME25*. Utrecht. Netherlands. Vol. 1, 221-253.

Repetto Jiménez, Emigdia (2001). ¿Realmente estamos formando maestros? *El Guiniguada*, 10, 127-137.

Bibliografía adicional

Briggs, Mary; Crook, John (1999). Shaping up: possibilities and constraints. *Mathematics Teaching,* 168, 45-47.

Corrales, Julia Edith; Sanduay, Marta; Rodríguez, Gabriela; Malik de Tchara, Claudia; Poblete, Álvaro (2001). Es posible dotar de alguna dinámica a los conceptos de geometría y las propiedades de las figuras en el aula? *Numeros. Revista deDidáctica de las Matemáticas,* 48, 13-24.

Dalla Piazza, Aldo (1999). Quelles mathematiques pour former des enseignants. Illustration d'une expererience de definition de contenus adequats, a forte coloration epistemologique et historique, sur le theme 'La geometrie: une description de la realite?'. *Histoire et epistemologie dans l'education mathematique - De la maternelle a l'universite.* Actes. Part 1. Editor(s): Radelet-de Grave, Patricia. Leuven Univ. (Belgium) p. 139-152 of 429.

Davis, P. J.; Hersh, R. (1989). *Experiencia Matemática*. Labor. Madrid.

De la Torre Fernandez, Enrique (2001). Que xeometria queremos para a educacion primaria e que xeometria queremos para os mestres. *Gamma. Galicia Matematica,* 1, 21-26.

Fernandez, Maria Teresa (2003). Geometria para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino. *SUMA,* 42, 13-22.

Ferrari, Mario (2002). Obiettivi e contenuti: classe seconda. *L'inseganmento della matematica e delle sceinze integrate*, 25ª, 1, 53-62.

Hagspihl, Thomas (2002). It's not surprising that Euclid got excited about Geometry. Proceedings of International Conference "The Humanistic Renaissance in Mathematics Education". The Mathematics Education into the 21st Century Project. (Palermo, Italy). p. 158-162. (http://math.unipa.it/~grim/palermo2002.htm)

Horvath, Jeffrey K.; Lehrer, Richard (2000). The Design of a Case-based Hypermedia Teaching Tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 5(2), 115-41.

Houdement, Catherine; Kuzniak, Alain (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'etude de l'enseignement de la géométrie en formation des maitres. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 40(3), 283-312.

Housman, David; Porter, Mary (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies un Mathematics*, 53, 139-158.

Hudson, Brian; Baber, Sikunder Ali (2002). Geometry for all? *Mathematics Teaching*, 180, 28-32.

Iglesias, L.D. (1989). Propuesta didáctica. *Elem. Mat.* v. 3(12) p. 27-34.

Jones, K.; Gutiérrez, A.; Mariotti, M.A. (eds.) (2000). Proof in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics* vol. 44.1/2 (monográfico especial del PME).

Knuth, Eric J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 5, 379-405.

Lakatos, Imre (1986). *Pruebas y refutaciones - la logica del descubrimiento matemático*. Alianza Universidad. Madrid.

Lubinski, Cheryl A.; Jaberg, Patricia A.; Otto, Albert D.; Rich, Beverley A. (1999). An analysis of two Novice K-8 teachers using a model of teaching-in-context. *PME-NA-20: 20. annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings.* Raleigh, NC (United States) Vol. 2. p. 704-709.

Malara, N.A. (1994). La geometria nei programmi di alcuni paesi europei per allievi dai 6 ai 16 anni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, v. 17A-17B(6), 675-700.

Marlier, Pierre (1997). Idées pour la formation mathématique des instituteurs. *Mathematique et Pedagogie*, 111, 55-71.

Meissner, H. (1992). Geometry: We build a village. *The student confronted by mathematics. Comptes rendus.* Editor(s): Weinzweig, A.I.; Cirulis, A. Commission Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques (CIEAEM); Illinois Univ., Chicago, IL (United States). p. 241-252.

Menon, Ramakrishnan (1998). Preservice Teachers' Understanding of Perimeter and Area. *School Science and Mathematics*, v. 98(7), 361-68.

Perks, Pat; Prestage, Stephanie (2000). Take 2 circles. The story of a visual aid. *Mathematics in School*, v. 29(4), 2-4.

Pintaudi, Guiseppe (1999). La 'maison des quadrilateres' - Une suggestion pour animer l'activite mathematique veritable. *L'Ouvert. Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg*, 96, 14-33.

Rahim, Medhat H. (2000). A classroom use of the Geometer's Sketchpad in a mathematics pre-service teacher education program. En Alan Rogerson (ed.) *International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for Living. Proceedings*. (Amman, Jordan). 7 p. (http://math.unipa.it/~grim/jourdain.htm)

Reed, Beverly; Melton, Austin; Kasturiarachi, A.Bathi (2002). Mathematics that changes lives. *ICTM-2: 2. International conference on the teaching of mathematics at the undergraduate level*, Limenas Hersonissou, Crete (Greece). CD-ROM.

Transformations: Syllabus project for the final grade in the academic year 2002. A propos de transformations: Projet de programme de TS pour la rentrée 2002. *Bulletin – APMEP*, (Sep-Oct 2001) vol. 435, 560-567.

Villani, V. (1990) Similitudine e figure simili. *Educ. Mat.*, vol. 11(3), 55-64.

Bases de datos:

www.emis.de/MATH/DI.html : base de datos de la revista de documentación en didáctica de la matemática *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM).

http://www.lettredelapreuve.it/: **Preuve / Proof / Prueba**: *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*. (Revista electrónica bimensual dedicada a la enseñanza/aprendizaje de la demostración desde la óptica de la Didáctica de la Matemática).