FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
VOLUMEN VI, PÁGINAS 21-46
ISSN: 1885-2912

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA EN UN ENTORNO COMPUTACIONAL. PERFILES DE ACTUACIÓN

Matías Camacho Machín
Universidad de La Laguna. Islas Canarias. España
Ramón Depool Rivero
Universidad Politécnica UNEXPO. Venezuela
Manuel Santos Trigo
CINVESTAV-IPN, México

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de una investigación, en la que se trata de establecer perfiles de actuación de un grupo de seis estudiantes a la hora de resolver problemas no rutinarios relacionados con el cálculo de áreas de regiones limitadas por una curva el eje OX y dos ordenadas extremas. Los participantes fueron seleccionados de un curso de Cálculo I, y para su formación se combinaban clases habituales de tiza y pizarra con Prácticas de Laboratorio, en las que se utilizaba el Programa de Calculo Simbólico (PCS) *DERIVE*.

Los resultados nos permitieron definir tres perfiles de actuación de estudiantes:

- En el primer perfil, situamos a los estudiantes que utilizan el PCS simplemente para realizar cálculos algebraicos o localizar cortes de la curva con el eje OX; aplican procedimientos algebraicos y/o numéricos en la resolución de los problemas, con escaso soporte gráfico.
- Los estudiantes incluidos en el segundo perfil, usan el software como una herramienta que les permite hacer más fáciles la resolución de las tareas.
- En un tercer perfil se encuentran los estudiantes que muestran una disposición clara al uso de *DERIVE*.

Abstract

In this paper, we include some of the results of our research, in which we investigate how first year university students of engineering performed after they had taken a Calculus course in which they systematically used *DERIVE* Software to work on a series of tasks that involve numerical, graphic and

algebraic approaches. Six students were selected and interviewed using problem solving tasks. Three profiles emerged from our analysis:

- Students who were grouped in the first profile showed a tendency to use the software as a tool to carry out algebraic operations or to find points of intersections of the curve with X-axis. That is, their use of the software focused mainly on calculating algebraic or numeric operations involved in the problem or situation without including a graphical approach.
- A second group of students generally recognized the importance of finding areas of limited curves through the idea of approximation. They were aware of the need to get a better and better approximation by the process of refining a partition within an interval.
- A third student profile is associated with those students who successfully apply the idea of approximation to determine areas of bounded regions. They were fluent not only in deciding what type of partition to take on the interval but also in using algebraic tools to carry out the operations involved in the calculation of the corresponding areas. This group of students showed a clear disposition to use the Utility File designed to approximate areas.

Marco conceptual y antecedentes.

Hemos considerado como soporte teórico de nuestro trabajo, dado que nos propusimos analizar cómo entienden los estudiantes el concepto de área e integral definida después de participar en un curso en el que se utilizaba DERIVE, dos componentes importantes. Por un lado, consideramos un modelo de competencia adaptado del que define Socas (2001) cuando estudia el papel de los Sistemas Matemáticos de Signos en la comprensión de los objetos matemáticos en relación con el pensamiento numérico y algebraico, y, por otro, aspectos relacionados con el uso de la Tecnología de la Información y la Comunicación, como mediador en el proceso de formación de los conceptos.

En relación al primer aspecto, el modelo de competencia se utiliza como un marco de referencia que al compararlo con las actuaciones de un estudiante, nos ayuda a determinar el grado de comprensión del concepto por su parte (Camacho y Depool, 2003a) y funciona como un elemento organizador que facilita el análisis de la comprensión del concepto de Integral Definida por parte de los estudiantes.

El segundo elemento tiene que ver con el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como mediador entre el proceso de instrucción y el aprendizaje. En los últimos veinte años, aparte de los cambios experimentados por el software matemático y los propios ordenadores, las teorías sobre cómo los Programas de Cálculos Simbólicos (PCS) pueden influir en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, también han venido refinándose cada vez más (Mariotti, 2002). Heid (2002) establece en su trabajo que es importante analizar cómo las teorías existentes sobre la enseñanza y aprendizaje pueden influir en el papel que representan los PCS en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Para Heid, existen dos tipos de teorías que podrían resultar útiles para explorar el papel de los PCS en el aprendizaje de las Matemáticas: las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y la estructura del currículum de Matemáticas, y, las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y los contenidos del currículum.

En cuanto al primer tipo de teorías, Heid señala que los PCS constituyen una tecnología cognitiva que facilita el acceso de los estudiantes a procesos de pensamiento matemático de un nivel más alto. Con un PCS los estudiantes pueden generar y manipular expresiones simbólicas que de otra manera necesitarían un gran tiempo de trabajo. Para Pea (1987) como tecnología cognitiva, los PCS pueden ser considerados como "amplificadores" o "reorganizadores u organizadores" del currículum. En el primer sentido, gracias a la función amplificadora, los PCS permiten extender el currículum y ampliar los tópicos que se trabajan en el currículum habitual. La segunda manera de usar PCS, como tecnología cognitiva, es como reorganizadora del currículum, cambiando la naturaleza y ordenación del currículum. En las investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, resulta difícil de separar totalmente la relación de estas dos funciones que hemos señalado. Sin embargo, esta categorización nos ayuda principalmente al tratar de examinar los efectos de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Como consecuencia de lo anterior, nuestra investigación se ha configurado combinando ambos elementos. De esta forma, vamos a considerar que el PCS *DERIVE* constituye un amplificador del currículum desde el momento que ha sido utilizado en la PL para introducir y establecer el concepto de Integral Definida, usando métodos de aproximación numérica que no se encuentran en los currícula habituales del curso de de Cálculo I. En el otro sentido, consideramos el PCS *DERIVE* como un reorganizador del currículum, puesto que en nuestro programa de formación optamos por organizar la enseñanza de otra forma, es decir, adelantando la enseñanza del concepto de Integral Definida como área, al cálculo de primitivas que es como se presenta habitualmente a los estudiantes de esos niveles.

Heid distingue como segundo tipo de teorías aquéllas que relacionan los contenidos y los procesos que aparecen en el currículum de Matemáticas, estableciendo además diferentes subcategorías de análisis:

El papel de los PCS en el álgebra escolar, el paso de las estrategias informales a las formales, la influencia de los PCS en las teorías que relacionan los procesos y objetos matemáticos y, finalmente, la influencia en las teorías de la representación para el aprendizaje de las Matemáticas.

Nos centraremos en esta última subcategoría que resulta ser la que más se relaciona con nuestro estudio. Pese a que existen diferentes interpretaciones de las representaciones (internas, externas, semióticas…), creemos, al igual que Heid, que lo que importa es el sistema en el que se produce la representación, no la perspectiva que se tome sobre las representaciones. Lo esencial en este caso es la conversión entre representaciones para su articulación coherente.

Los PCS y sus capacidades multirrepresentacionales constituyen un entorno de trabajo privilegiado. Muchas investigaciones han mostrado, como elementos claves en los que los estudiantes fracasan, la conexión entre las distintas representaciones. Santos (2000) en su investigación, encontró que un aspecto importante que favorece las conexiones entre las distintas representaciones, es la reflexión sobre la información que cada sistema de representación puede aportar a otro sistema de representación.

El trabajo que desarrollamos se centró en dos aspectos, primeramente en el papel que desempeñan las representaciones en el aprendizaje del concepto de Integral Definida, cuando se utiliza un PCS como *DERIVE,* y en segundo, nos centramos en cómo influye el uso de un PCS en la construcción de dichas representaciones.

El análisis de estos dos aspectos nos permitió, por una parte, establecer la competencia de los estudiantes mediante un modelo definido con anterioridad (Camacho y Depool, 2003a) y, por otra, determinar una serie de perfiles de actuación en la resolución de los problemas no rutinarios que se utilizaron en nuestra investigación.

Metodología

En la investigación participó un grupo de 31 estudiantes que recibieron un curso de Cálculo I entre los meses de octubre de 2001 y marzo de 2002. En este curso se combinaron las clases habituales de tiza y pizarra con una serie de Prácticas de Laboratorio (PL) para realizar con *DERIVE.* Una vez que los estudiantes habían asistido a las clases, desarrollaban las que se diseñaron para el trabajo de laboratorio. Los temas contenidos en el programa oficial fueron:

Funciones, Límite de Funciones, Derivadas, e Integrales. Para las PL los estudiantes utilizaron un Módulo Instruccional (MI) diseñado por nosotros utilizando como soporte informático el software *DERIVE* (Depool, 2004); el MI contiene ocho prácticas. Las primeras cinco dedicadas al estudio de Funciones, Límites y Derivadas, que se configuraron utilizando sencillos Programas de Utilidades (PU) similares a los expuestos en algunos libros de Cálculo (Stewart, 1999) así como los comandos de cálculo directo que se incluyen en los diferentes menús del *DERIVE*. El resto de las prácticas se diseñaron para el estudio de la Integral Definida, y se basaron principalmente en el uso de un Programa de Utilidades diseñado por nosotros (ver Camacho y Depool, 2003a, 2003b, 2003c, Depool 2004). Estas prácticas fueron concebidas con la intención global de que los estudiantes puedan seguir paso a paso el cálculo del área de la región limitada por una curva, utilizando aproximaciones con rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (Simpson), para interpretar desde un punto de vista el concepto de Integral Definida partiendo del cálculo aproximado de áreas de regiones.

El programa de formación que se llevó a cabo cubrió tres fases principales:

Fase 1: *Clases habituales:* El profesor hace una presentación de los contenidos usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.

Fase 2: *Prácticas de Laboratorio:* Los estudiantes realizan por parejas, en el laboratorio de ordenadores, las Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional. Las parejas de estudiantes llevan a cabo las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la práctica y para aclarar dudas en su desarrollo.

Fase 3: *Puesta en común:* Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron.

Los instrumentos de análisis utilizados para la recolección de datos fueron: un cuestionario de conocimientos y una entrevista. El primero fue aplicado a todo el grupo, y el segundo a seis de estos estudiantes. Estos últimos se seleccionaron según su actuación cuando resuelven por escrito las tareas propuestas en el cuestionario de conocimientos. Se incluyen en el Anexo II una síntesis general de las respuestas dadas por el gran grupo, así como de los estudiantes que se seleccionaron. Pasamos ahora a describir con mayor detalle los instrumentos utilizados:

El cuestionario y la entrevista: Las tareas propuestas tanto en el cuestionario de conocimientos como en la entrevista, se organizaron en torno a tres grupos de acuerdo con las características y las formas potenciales de solución:

- <u>Primer grupo de preguntas</u>: Preguntas en las que el registro gráfico constituye el elemento básico de la información que se suministra para la resolución del problema.
- <u>Segundo grupo de preguntas:</u> Preguntas en las que la información suministrada viene dada en el registro algebraico.
- <u>Tercer grupo de preguntas:</u> Cuestiones más generales en las que los estudiantes tienen que poner en juego un alto nivel de comprensión del concepto de Integral Definida para usar los diferentes registros de representación semiótica considerados durante la instrucción (numérico, gráfico y algebraico)

Los estudiantes cumplimentaron el cuestionario en tres escenarios diferentes:

Escenario 1, en el que los estudiantes resuelven las tareas del cuestionario empleando solamente lápiz y papel e informan por escrito sobre sus planteamientos o soluciones a los problemas.

Escenario 2: que corresponde al trabajo que presentan los estudiantes al resolver el cuestionario con el empleo del software *DERIVE*; aquí los estudiantes entregan una copia del disquete que contiene sus soluciones y sus comentarios sobre el contenido de la práctica.

Escenario 3: en el que los estudiantes seleccionados (6) son entrevistados y se les pregunta directamente sobre su manera de resolver los problemas planteados. Aquí ellos eligen libremente qué tipo de herramienta deben emplear durante sus explicaciones o soluciones al cuestionario.

Conviene señalar que no todas las preguntas se propusieron en los tres escenarios, dado que un análisis previo de las respuestas dadas por el gran grupo (la clase) en los escenarios 1 y 2 nos sugirió incluir o descartar algunas de las preguntas que quedaron para la entrevista semiestructurada (escenario 3) que se desarrolló con el grupo de estudiantes seleccionado.

Exponemos en el Anexo I, las preguntas utilizadas, los descriptores que se tuvieron en cuenta en el posterior análisis, los escenarios donde se emplearon, los objetivos que se pretenden con cada pregunta y la actuación que se espera de cada estudiante.

Análisis e interpretación de los resultados

El análisis general de las respuestas dadas por todos los estudiantes al cuestionario en los dos primeros escenarios, se realizó con dos objetivos principales:

- Describir el comportamiento general de los estudiantes en los tres grupos de preguntas.
- Seleccionar, atendiendo a las características comunes en su forma de actuación, al grupo de seis estudiantes (E1, E2, E3, E4, E5, E6) que serían los que desarrollarían la resolución del cuestionario en el tercer escenario.

En el Anexo II Se incluye un resumen de los diferentes tipos de respuestas que presenta el gran grupo en los Escenarios 1 y 2.

Los tipos de respuestas que se recogen en dicho Anexo, aparecen clasificados atendiendo a los tres grupos de cuestiones (Anexo I). La segunda y cuarta columna incluyen la actuación de los seis estudiantes que fueron seleccionados para ser entrevistados (escenario 3).

La información recopilada se analizó de manera individual y global. El primer análisis, mediante un estudio de casos, en el que se consideraron las actuaciones de los estudiantes en cada grupo de preguntas (Camacho y Depool, 2003a). De esta forma, identificando las distintas acciones que realiza cada estudiante y comparándolas con las que se describen en la última fila de las tablas que aparecen en el Anexo I para cada una de las preguntas, ubicamos al estudiante en una de las categorías que aparecen descritas en nuestro modelo de competencia cognitivo (Camacho y Depool, 2003a). En definitiva, este primer análisis nos permitió ubicar a cada estudiante en un estadio de desarrollo cognitivo basado en los sistemas de representación (semiótico; estructural; autónomo).

El segundo análisis, de tipo global, se desarrolló con la finalidad de establecer perfiles de actuación. Se establecieron, a partir de este análisis tres perfiles de estudiantes caracterizados por su forma de resolver las tareas en los distintos escenarios que responden a una serie de características:

Perfil 1

El uso del PCS se limitó al cálculo de integrales o la localización de cortes de la curva con el eje OX. El estudiante que se encuentra en este perfil utiliza fundamentalmente procedimientos algebraicos y/o numéricos en la resolución de los problemas, con escaso soporte gráfico. Cuando se le plantean situaciones en las que debe utilizar representaciones gráficas se confunde y tiende a proporcionar argumentos algebraicos. Resultó paradójico que en los problemas en que se les plantearon proposiciones genéricas, utilizaron representaciones gráficas para argumentar su veracidad o falsedad. El cálculo de la Integral Definida es percibido como la aplicación de un procedimiento algorítmico, sin preocuparse de su significado en el contexto del problema. En este perfil ubicamos a los estudiantes E1, E3 y E5. Como ejemplo de la actuación de uno de los estudiantes, el E1, se tiene que al pedirle que explique el significado de $\int_a^b f(x)dx$, éste responde.

> 10) E: *Si yo tengo la integral* $\int_b^a x^2 \cdot dx$ *entonces al integrar esto (señala el integrando) me daría la antederivada, o sea me daría $x^3/3$; lo que quiere decir que si tengo esta función* (dibuja $f(x) \rightleftarrows F(x)$) *si yo integro esto* (se refiere a la función de la izquierda) *me da esto* (se refiere a la función de la derecha), *igualmente si yo derivo esto* (se refiere a la función de la derecha) me da esta función (se refiere a la función de la izquierda). *Si derivo esto* (señala la expresión $x^3/3$) *me quedaría* $\frac{3x^2}{3} = x^2$.

Los comentarios en esta pregunta giran en torno al uso del Teorema Fundamental del Cálculo. No alude el uso de los métodos utilizados en las Prácticas de Laboratorio. Puede que la instrucción recibida no influya en la manera de cómo el estudiante E1 entiende la Integral Definida.

Perfil 2

El estudiante que ubicamos en este perfil, asocia el uso del software con el de una herramienta que le permite hacer más fácil el acercamiento para la resolución de un problema que utilizando sólo papel y lápiz. El estudiante que responde a este perfil, en general, reconoce la importancia de encontrar áreas de curvas limitadas a través de la idea de aproximación. Es consciente de la necesidad de mejorar y obtener buenas aproximaciones mediante un proceso de refinar una partición dentro de un intervalo. Sin embargo, no desarrolla una clara comprensión del proceso de seleccionar una partición particular en el intervalo dado. Eso ocurre en concreto cuando intenta realizar esta tarea sin el uso del software. También asocia el concepto Integral Definida con el proceso de calcular su valor, aunque no identifica las condiciones necesarias para aplicar el procedimiento. De hecho, a menudo usa el software como un medio para apoyar lo que hace en papel y lápiz. Otro resultado importante es que cuando el estudiante trabaja en un problema en el que se le suministra la representación gráfica, con frecuencia identifica los límites de integración y la manera de calcular las áreas de las regiones; sin embargo, cuando el problema aparece expresado algebraicamente, raramente confía en las representaciones gráficas para resolverlo. Aquí el uso del software parecía ser suficiente para resolver el problema. En uno de los problemas (calcular $\int_{-3}^{4} |x+1|\, dx$) que pedía calcular el área de una región limitada por triángulos, el estudiante se apresuró a aplicar los métodos de Integral Definida en lugar de calcular el área mediante una fórmula sencilla $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$; en particular, un estudiante durante la entrevista menciona que ya que el tema era la Integral Definida, tenía que resolverlo de esa manera. Hemos considerado que el estudiante E6 es el que más se ajusta a este perfil. A modo de ejemplo citamos una parte de la entrevista realizada a este estudiante.

En el problema 4 antes mencionado al preguntarle que:

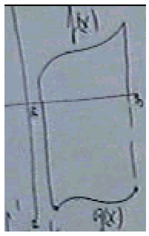
86) I*: Supón ahora que me pones ese problema y yo te lo resuelvo así* (se refiere al procedimiento con triángulos) *¿Tú qué dirías?*
87) E*: ¡Yo diría que!*
88) I: *¿Me lo pondrías perfecto? ¿Me lo pondrías malo? ¿Me lo pondrías regular? ¿Qué nota me pondrías si yo te lo resuelvo de esa manera, de 1 a 10?*
89) E: *Del 1 al 10, si lo resolviera de esta manera, ésteee, si estoy evaluando integral y quiero las propiedades de la integral, yo pienso, nooo, aquí el muchacho consiguió este valor absoluto y dijo ¿cómo lo hago yo para conseguir mi integral y mis intervalos? No tiene claro su propiedad* (aunque señala la definición a trozos del valor absoluto, parece que se refiere a la integral), *pero tomaría en cuenta de que si entiende de lo que estamos hablando* (señala la integral original) *sabe que es región bajo la curva* (indica la gráfica de la función) *o sea está consciente, analizó el problema, le pondría un 9.*
90) I: *Si no menciono nada de integrales ¿me pondrías un 9? ¿Por qué no un 10?*
91) E*: Por lo que le estoy diciendo, estoy evaluando la propiedad* (señala la integral) *a lo mejor él se asustó con este valor absoluto que vio aquí, ¡verdad! y se fue por aquí* (señala la gráfica).

Perfil 3

El tipo de estudiante que consideramos que responde a este tercer y último perfil muestra una disposición clara al uso de *DERIVE* y/o el Programa de Utilidades (PU), diseñado para aproximar las áreas. El estudiante que se encuentra es este perfil utiliza con éxito la idea de la aproximación para determinar áreas de regiones. Este no sólo muestra fluidez decidiendo qué tipo de partición del intervalo tomar sino también usando las herramientas algebraicas para llevar a cabo los procedimientos que involucraba el cálculo de las áreas correspondientes. En general, identifica y usa apropiadamente la información suministrada por las representaciones algebraica y gráfica en el cálculo de las integrales definidas. Existe evidencia de que este tipo de estudiante entiende la relación entre el área y el concepto de Integral Definida. Esto era evidente por la manera en que usan tanto el software como el PU para aproximar las áreas limitadas. Aquí, el estudiante reconoce que el cálculo de las integrales va más allá de la aplicación de una fórmula o el uso de un software particular, esto involucra un proceso que se podría visualizar mediante el uso de

DERIVE y/o el PU. Sin embargo, cuando se le pide que examine proposiciones generales sobre propiedades de funciones y sus relaciones con la Integral Definida, no proporciona un argumento coherente para apoyar sus respuestas. En particular, parecía que le faltaran estrategias de resolución de problemas (analizando casos particulares, proporcionando contraejemplos o usando representaciones gráficas) para dar sentido o interpretar este tipo de problemas. Por ejemplo, el estudiante E2, que hemos ubicado en este perfil, durante la entrevista cuando se le cuestiona para que reflexione sobre las posibles relaciones entre la gráfica de dos funciones y sus integrales, proporciona argumentos contradictorios.

A continuación exponemos un extracto de la entrevista a este estudiante

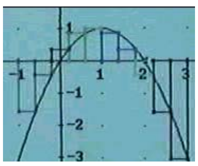


102) I: *Si te pusiera estas dos funciones* (dibuja en la pizarra) *f(x) es mayor que g(x), te pregunto ¿será la integral entre a y b de f(x) mayor o igual que la integral entre a y b de g(x)?* (señala en la gráfica cada parte).
103) E*: Ésta es mayor* (se refiere a la región de g), *esta área es más grande que ésta* (señala a la región de g en comparación con la de f) *pero es negativa.* Se queda por unos segundos pensando.
104) I: *¿Entonces?*
105) E: *¿Estamos comprobando que f(x) es mayor o igual que g(x)?*
106) I: *Estamos suponiendo que f(x) es mayor o igual que g(x).*
107) E*: Los valores aquí* (marca con el rotulador sobre el segmento entre a y b) *cuando los evalúe va dar valores positivos* (marca con el rotulador una línea bajo la curva de f). *Estos dará "y" negativos* (marca con el rotulador una línea sobre la curva de g) *Si puedo afirmar que, si puedo* (señala la desigualdad de las funciones). *Estos valores son positivos y éstos son negativos* (señala la curva de f y luego la de g)…

Sin embargo, parece que el estudiante no está convencido de su respuesta inicial. Confunde el signo de desigualdad entre funciones y entre las integrales vistas como áreas.

Por otra parte un estudiante E4 que muestra este perfil, se inclina por el uso del software para aproximar todos los problemas sin considerar la representación gráfica que a menudo es necesaria para la resolución. Este estudiante muestra, al igual que el anterior, serias dificultades al resolver los problemas que involucran demostraciones o algunas proposiciones. Además, parece pensar que el software no sólo le proporciona una manera eficaz de aproximación sino una forma de resolver correctamente un problema. De hecho, durante la entrevista cuando se le pidió que diera una explicación de lo que había obtenido gráficamente con el software, no fue capaz de explicar lo que sucede cuando el valor de la integral es negativo. El estudiante parece usar mecánicamente el software para hacer los cálculos y no identifica ni relaciona las representaciones para poder pasar de una representación a otra.

En el problema 2 el estudiante E4 para calcular el área limitada por la función y el eje OX, utiliza el Programa de Utilidades de la siguiente forma:

> El estudiante abre el archivo que contiene el Programa de Utilidades referente al método gráfico, escoge la sentencia RECT_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) que sirve para representar rectángulos extremos izquierdos, sustituye “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, cometiendo el error de no escribir la expresión algebraica de la función y por tanto no pudo obtener la matriz de valores necesaria para graficar los rectángulos. Copia el Programa de Utilidades y lo pega en la ventana en donde tenía escrita la función F(x):=2x-x^2, marca la sentencia RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a,b,n), sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10 y le da una matriz que no logra representar los rectángulos porque la función esta antes del Programa de Utilidades).
>
> 33) I*: No has definido la función.*
>
> 34) E*: Entonces la defino, agarro esta función (se refiere a F(x):=2x-x^2) y me voy acá* (se refiere al final del Programa de Utilidades, en donde copia la expresión de la función) selecciona la sentencia RECT_EXTREMO_DERECHO(a,b,n) sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, calcula la matriz y representa los rectángulos. *Ésta es el área tomando extremo derecho de este intervalo* (se refiere al intervalo [-1,3]), *por allí se traza el rectángulo, pero hay que establecer un delta de x.*
>
> 
>
> 35) I*: De todas maneras observa que ahí estás trabajando de -1 a 3, pero allí no* (se refiere a la Pregunta 2, cuyo intervalo es de 0 a 3) *queremos el área rayada desde 0 hasta 3. Yo quiero que me calcules el área de esa región rayada.*
>
> 36) E*: ¿Desde 0 hasta 3?*
>
> 37) I*: Sí.*
>
> 38) E*: Lo puedo hacer por el método numérico también.* (Abre el archivo del Programa de Utilidades referente al método numérico, copia las sentencias en ventana donde tiene el resto del programa y definida la función; copia la función al final del programa).

Durante la interacción con el investigador, el estudiante usa con soltura el software pero experimenta serias dificultades para interpretar su trabajo.

39) I*: ¿Qué es lo que estás haciendo?*
40) E: *Para calcularle numéricamente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n)). *Lo vamos a hacer por rectángulos extremo derecho, tomo aquí la sentencia, sustituyo "a" por 0, "b" por 3 y "n" por 10 y le da* -0.495 *¿Y porqué da el área negativa?*
41) I: *Eso pregunto yo ¿Por qué te da negativo?*
42) E: (Selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n) sustituye los valores de "a" por 0, "b" por 3 y "n" por 10 y le da 0.0225). *Da diferente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) y sustituye los valores de "a" por 0, "b" por 3 y "n" por 10 y le da 0.405).
43) I: *¿Por qué crees que da en un sitio positivo y el otro negativo?*
44) E*: ¿A qué se debe eso?*
45) I: *¿Tú qué crees?*
46) E*: Silencio……*

Esto evidencia, en el análisis de esta transcripción, que el estudiante tiene una tendencia a aproximar el problema mediante el uso del software, pero es necesario que en esta fase de la entrevista el investigador dirija el diálogo para que el estudiante comprenda el proceso y como consecuencia, la entrevista muestre posteriormente que el estudiante comprende lo que está haciendo.

Conclusiones

Teniendo en cuenta el análisis, y como síntesis del mismo, se establece en la Tabla 1 un conjunto de características relevantes que determina los tres perfiles que hemos definido.

PERFILES	ESTUDIANTES	CARACTERÍSTICAS
1	E_1-E_3-E_5	• El software es una herramienta para cálculos algebraicos • Utilizan escasamente representaciones gráficas • Perciben el cálculo de la Integral Definida como la aplicación un procedimiento algorítmico descontextualizado del problema • No siguen los métodos utilizados en las Prácticas de Laboratorio

PERFILES	ESTUDIANTES	CARACTERÍSTICAS
2	E_6	• Reconoce la importancia de encontrar áreas de de regiones limitadas por curvas, a través de la idea de aproximación. Sin embargo, tiene problemas al tratar de refinar la partición de un intervalo para optimizar el cálculo. • Asocia el concepto de Integral Definida con el proceso de calcular un valor, sin comprobar las condiciones necesarias para ello. • El software es usado para apoyar los cálculos hechos con lápiz y papel. • La representación gráfica es utilizada sólo si se le proporciona con anterioridad.
3	E_2-E_4	• Se inclinan por el uso de *DERIVE* y/o el PU, en la resolución de los problemas. • Aplican la idea de aproximación para determinar áreas de regiones. • Utilizan la representaciones gráficas al resolver los problemas. • Perciben que el cálculo de la Integral Definida no sólo es la aplicación de una fórmula o el uso de un software y/o Programa de Utilidades. • Ante una proposición general no son capaces de dar un argumento coherente para apoyar sus respuestas.

Tabla 1

De manera general se debe destacar la importancia que posee el uso del software por parte de los estudiantes en la compresión del concepto de la Integral Definida. De esta forma, cuando los estudiantes usaban el Programa de Utilidades tenían la posibilidad de trabajar con varios ejemplos que le permitieron aproximar el valor del área de una región acotada. Los estudiantes se centraron en examinar los aspectos que facilitaban entender la relación entre el dominio de la función y la posible partición para aproximar el correspondiente valor del área. En particular, el uso del Programa de Utilidades proporcionó a los estudiantes los elementos básicos para visualizar el concepto de límite presente en el cálculo de la Integral Definida. Hemos observado además que con frecuencia los estudiantes usaron el software *DERIVE* para representar gráficamente las funciones y calcular las integrales. En este contexto, el software constituyó una herramienta útil para que los estudiantes pudieran identificar las intersecciones de la gráfica con el eje OX y la posición de la región (bajo o sobre el eje OX). En algunos casos, los estudiantes utilizaron el software como un elemento de validación de los resultados que ellos habían obtenido en los cálculos hechos con lápiz y papel.

Un asunto que tiene mucha importancia y que surgió del análisis del trabajo de los estudiantes, es la necesidad de realizar la transición en términos de significado entre las distintas representaciones del concepto de cara a asimilar y explorar las conexiones y relaciones entre los conceptos que se relacionan con la Integral Definida. En este sentido, cuando trabajaron con la representación gráfica de una función resultó ser un aspecto importante el poder explicar la posición del gráfico y su relación con el signo asociado al valor de su integral así como el proceso de aproximación al valor del área a través de una aproximación numérica (el área de rectángulos pequeños). Además, los estudiantes necesitaron desarrollar estrategias básicas de la Resolución de Problemas que les facilitaron pensar en casos más complejos que los que aparecieron en la resolución del problema particular. Es decir, resultó evidente que, cuando se le pidió a los estudiantes que trabajaran sobre las tareas que involucraban proposiciones generales (tercer grupo de preguntas-AnexoI), los estudiantes experimentaron serias dificultades para construir ejemplos o contraejemplos que pudieran ayudarles a entender y explorar esas situaciones generales planteadas. En este sentido, conviene diseñar e implementar actividades que incluyan el uso del software en la resolución de problemas para que los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar estrategias básicas de resolución de problemas (incluso metacognitivas). Finalmente, la implementación de actividades en las que se utilice la tecnología debería permitir valorar las diferentes formas en que los estudiantes presentan y comunican sus resultados. Como otra conclusión importante de nuestro estudio, podemos afirmar que las entrevistas basadas en la resolución de tareas (task-based interview) funcionaron como herramientas para la reflexión, porque los estudiantes tuvieron la oportunidad de exponer sus ideas y al mismo tiempo explicar y examinar en detalle las conexiones entre las distintas representaciones involucradas en el problema.

En esta etapa, se observó que los estudiantes no tuvieron a menudo una conciencia plena de las conexiones. Las preguntas hechas por el entrevistador (investigador) ayudaron a que los estudiantes reforzaran su comprensión. Consideramos importante, además, destacar la relevancia que tiene el que la propia clase deba verse como una comunidad que exige la reflexión constante de cada uno de sus miembros.

Resulta pertinente destacar que, a nuestro parecer, el uso del software proporciona un importante instrumento para que los estudiantes puedan librarse de memorizar formulas o procedimientos de cálculo, aunque es fundamental tener en cuenta que los estudiantes necesitan un cierto tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual firme de la Integral Definida. Necesitan prestar atención al proceso de transformación y relación que pueden establecerse entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas. Creemos que este aspecto se muestra como un paso crucial para que los estudiantes desarrollen una profunda comprensión del concepto de la Integral Definida.

Hemos constatado además que los estudiantes necesitan desarrollar un conjunto de estrategias para la resolución de problemas que pudieran ayudarlos a decidir cuándo usar el software y cómo dirigir su trabajo con el mismo.

Nota: Este trabajo ha sido cofinanciado por la Universidad de La Laguna, con cargo al Proyecto de Investigación PI 1802010402 y por una ayuda concedida por el CIMAC para la estancia del Dr. Santos-Trigo.

Referencias bibliográficas

Camacho, M.; Depool, R. (2003a). Modelo de Competencia para el campo conceptual de la Integral Definida. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática V*, 71-104.

Camacho, M.; Depool, R. (2003b). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE*. *Educación Matemática.* 15 (3), 119-140.

Camacho, M.; Depool, R. (2003c). Using *DERIVE* to understand the concept of definite integral. *Journal for Mathematics Teaching and Learning.* 1-16. http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Universidad de La Laguna. Tesis Doctoral. ISBN 84-7756-594-5.

Heid, M. K. (2002*).* How theories about the learning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in school mathematics: One perspective. *International Journal of Computers Algebra in Mathematics Education. 9 (2), 95-112.*

Mariotti, M. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 695-723

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education*. Educational Communication and Technology.* New York University. 89-122.

Santos, M. (2000). The Use of representations as a Vehicle to Promote Students' Mathematical Thinking in Problem Solving. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 7 (3), 193-212.

Heid, M. K. *(2002).* How theories about the learning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in school mathematics: One perspective. *International Journal of Computers Algebra in Mathematics Education. 9 (2),* 95-112.

Socas, M. (2001). *Investigación Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un Estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Universidad de La Laguna. Sin publicar.

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Transcendentes tempranas.* International Thompson Publishing. México.

ANEXO I

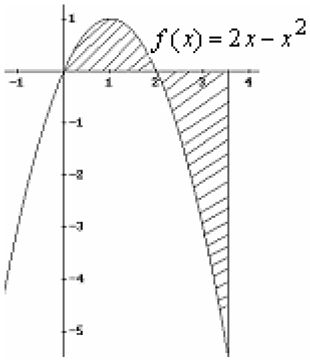
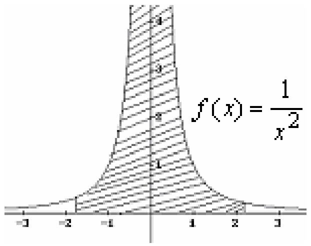
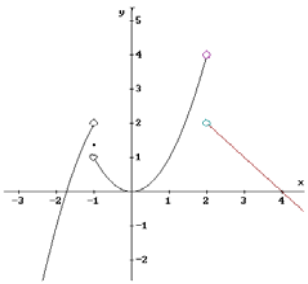
PRIMER GRUPO PREGUNTAS			
PREGUNTA	DESCRIPTORES	**ESCENARIOS**	**OBJETIVO**
2) Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. 	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región. 2.3. No aparece la palabra integral. 2.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 2.5. Hay dos regiones (sobre y bajo). 2.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.7. No se pide aproximar. 2.8. La función es continua.	Lápiz y papel(1) PCS (2) Entrevista (3)	Determinar si el estudiante comprende la forma de obtener en términos de la Integral Definida el área de regiones que se encuentran bajo el eje OX, así como las relaciones que establece con las regiones que están sobre el eje OX.
9) Dada la gráfica de la función, si es posible, calcula el área de la región rayada. Si no es posible, justifica tu respuesta. 	7.1. Se pide calcular el área. 7.2. Se identifica gráficamente la región. 7.3. No aparece la palabra integral. 7.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 7.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 7.6. Hay una gráfica asociada. 7.6. No se pide aproximar. 7.7. Hay una región con una discontinuidad en medio. 7.8. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.	Lápiz y papel(1) PCS (2)	Analizar lo que responden los estudiantes cuando el área de la región que se demanda es infinita.

Tabla 1

PRIMER GRUPO PREGUNTAS			
PREGUNTA	DESCRIPTORES	**ESCENARIOS**	**OBJETIVO**
10) Dada la función definida por $f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$  • Calcular, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2,3]$. • Si es posible, estima el valor de la Integral Definida en el intervalo $[-2,3]$. Si no es posible explicar por qué. Si no es posible calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2,3]$. En caso de que no sea posible calcular ninguna porción explicar por qué.	10.1. Se define el intervalo total. 10.2. Se plantea con los dos registros algebraico y gráfico. 10.3. Se pide calcular el área. 10.4. La función tiene 2 puntos de discontinuidad. 10.5. No aparece la palabra Integral Definida. 10.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 10.7. Hay una gráfica asociada.	Lápiz y papel(1) PCS (2)	Determinar si el estudiante es capaz de aplicar aproximación o el Teorema Fundamental del Cálculo a pesar del tipo de discontinuidad.
1) ¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa $\int_a^b f(x)dx$?	1.1 No aparece la palabra Integral Definida. 1.2. No se da la expresión explícita de la función. 1.3. No aparece el término área. 1.4. No hay gráfica asociada. 1.5. No se dan los valores de los límites de integración. 1.6. Se menciona la expresión sin referencia directa a la Integral Definida y al área.	Entrevista (3)	Investigar los elementos que utiliza el estudiante para traducir en su propio vocabulario lo que entiende por Integral Definida.

Las posibilidades de actuaciones del estudiante son en este caso:

- Reconocer los registros de representación gráfico y algebraico, y realizar tratamientos dentro de los mismos.
- Elaborar registros algebraico y/o numérico, y realizar transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Realizar la conversión coordinada entre los registros de representación.

Tabla 1 (Continuación)

<table>
<tr><th colspan="4">SEGUNDO GRUPO DE PREGUNTAS</th></tr>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>DESCRIPTORES</th><th>ESCENARIOS</th><th>OBJETIVO</th></tr>
<tr><td>3) Calcula, de la forma que consideres más sencilla la Integral Definida
$$\int_{-3}^{4} \left| x+1 \right| dx$$</td><td>3.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita.
3.2. No se menciona la palabra área.
3.3. Se da el intervalo de integración.
3.4. No hay una gráfica asociada.
3.5. Es de gran interés que el cálculo se puede resolver de una forma sencilla pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.</td><td>Lápiz y papel (1)

PCS (2)

Entrevista (3)</td><td>Analizar:
• Si existe transferencia de los conocimientos antiguos a los nuevos.
• Si el estudiante comprende el cálculo de la Integral Definida en términos de cálculo de área de figuras elementales.
• Si conoce y trabaja correctamente con algunas propiedades de la Integral Definida.</td></tr>
<tr><td>4) Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifica tu respuesta.
$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^2 (x-1)^{-2}dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2 =$$
$$= \left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$</td><td>4.1. Se presenta en el registro algebraico con información desarrollada (explícita).
4.2. No aparece la palabra área en “calcular la integral”.
4.3. El software lo resuelve directamente (y mal).
4.4. Se da el intervalo de integración.
4.5. No hay una gráfica asociada.
4.6. Se aplica directamente las técnicas de integración.</td><td></td><td>Determinar si el estudiante:
• Es capaz de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta.
• Interpreta coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para que la regla de Barrow pueda ser aplicada.</td></tr>
<tr><td>7) Calcular el área que forma con el eje OX la función
$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$$</td><td>7.1. Se presenta en el registro algebraico.
7.2. No se da el intervalo. (polinomio de cuarto grado).
7.3. No se menciona la palabra integral.
7.4. Se pide calcular un área.
7.5. No hay gráfica asociada.</td><td>Entrevista (3)</td><td>• Use el software para graficar la función, o la gráfica mediante técnicas de papel y lápiz.
• Identifique las regiones donde debe integrar, mediante la intersección de la función con el eje OX.
• Plantee y calcule las integrales mediante la regla de Barrow. Es posible que el estudiante utilice el PU calculando las distintas aproximaciones.</td></tr>
</table>

Se espera que el estudiante:

- Elabore el registro de representación gráfico y/o numérico, y realice transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Reconozca el registro de representación algebraico, y transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Realice la conversión coordinadas entre los registros de representación.

Tabla 2

<table>
<tr><th colspan="4">TERCER GRUPO DE PREGUNTAS</th></tr>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>DESCRIPTORES</th><th>ESCENARIOS</th><th>OBJETIVO</th></tr>
<tr><td>5) Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta.
Si $f(x) \geq g(x)$, entonces,
$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.</td><td>5.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen.
5.2. No aparece el término área.
5.3. No aparece la palabra integral.
5.4. No hay graficas asociadas.
5.5. No se dan los valores de los límites de integración.
5.5. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis.
5.6. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área.
5.7. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones.
5.8. En general, la proposición es verdadera si se trata de integrales y falsa si sólo se considera como área.</td><td>Lápiz y papel (1)

PCS (2)

Entrevista (3)</td><td>Determinar el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establece relaciones entre el área y la Integral Definida.</td></tr>
<tr><td>6) Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta.
Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$,
entonces, $f(x) \geq g(x)$
para toda x que pertenece a $[a,b]$.</td><td>6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen.
6.2. No aparece el término área.
6.3. No aparece la palabra integral.
6.4. No hay graficas asociadas.
6.5. No se dan los valores de los límites de integración.
6.5. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis.
6.6. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área.
6.5. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones.
6.8. En general, la proposición es falsa tanto si se trata de integrales como si fuese área.</td><td>Lápiz y papel (1)

PCS (2)

Entrevista (3)</td><td>Determinar el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establecen relaciones entre el área y la Integral Definida. Además si utiliza contraejemplos en su justificación.</td></tr>
</table>

Se espera que el estudiante:

- Reconozca el registro de representación algebraico y realice una transformación (tratamiento) dentro del registro algebraico.
- Elabore registros de representación gráfico y/o numérico, y transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos. Consideraremos que la elaboración del registro gráfico también implica un reconocimiento implícito del registro.
- Realice la conversión coordinada entre los distintos registros de representación.

Tabla 3

ANEXO II

Primer grupo de preguntas

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Por grupo en la Prueba escrita
31 estudiantes asistentes</th><th>Estudiantes seleccionado</th><th colspan="3">Por equipo en el laboratorio de ordenadores
26 estudiantes asistentes- 13 equipos</th><th>Estudiante seleccionado</th></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td colspan="2" rowspan="2">El procedimiento consistió en calcular el área usando dos integrales definidas. Cuatro estudiantes identifican en la representación gráfica las regiones y dos plantean directamente las integrales.</td><td rowspan="2">E3</td><td rowspan="2">Once equipos no representan la función. Plantean dos integrales. No se observan cálculos para establecer el corte con el eje OX.</td><td colspan="2">Nueve escriben los valores de las integrales en valor absoluto o cambiando el signo de la integral de la porción bajo el eje OX y hallan su suma.</td><td>E1-E2-E5-E6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dos escriben los valores de las integrales, sin cambiar el signo al valor de la integral de la porción bajo el eje OX y hallan su suma.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">En el procedimiento aplicaron aproximación numérica. Once de ellos dibujaron figuras elementales (rectángulos y/o trapecios) sobre la representación gráfica; ocho de estos calcularon las alturas usando la expresión algebraica de la función y la longitud de la base por $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, tres sólo mostraron las figuras elementales sobre la gráfica. Seis aplicaron límite de las Sumas de Riemann.</td><td>E1-E2-E4-E5-E6</td><td colspan="3">Un equipo representa la función y escribe los valores de las integrales en valor absoluto y halla su suma.</td><td>E7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ocho no respondieron.</td><td></td><td colspan="3">Un equipo no responde.</td><td>E4</td></tr>
<tr><td rowspan="5">9</td><td rowspan="3">Veintinueve afirman que no es posible calcular el área</td><td>Cinco plantean integrales.</td><td>E1-E2</td><td rowspan="5">Los trece equipos afirman que no es posible calcular el área.</td><td colspan="2" rowspan="2">Tres representan la función y mencionan que la curva es infinita o que la gráfica no esta acotada.</td><td rowspan="2">E4</td></tr>
<tr><td>Dieciséis afirman que la región rayada es infinita.</td><td>E4-E5-E6</td></tr>
<tr><td>Ocho estudiantes mencionan que la función no es continua o que tiene una asíntota.</td><td>E3</td><td rowspan="3">Ocho no representan la función.</td><td rowspan="2">Siete mencionan que la función no es continua o que la función tiende a infinito cuando x se aproxima a cero o que hay una asíntota en x=0.</td><td rowspan="2">E1-E2-E3-E5-E6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Un estudiante afirma que es posible calcular el área, plantea una integral.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Un estudiante no responde.</td><td></td><td>Uno menciona que la región es cerrada y no se cumplen con las condiciones para calcular la integral.</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 4

<table>
<tr><td rowspan="5">10</td><td>Nueve estudiantes plantean integrales. Dos estudiantes rayan las regiones cuyas áreas se desean calcular.</td><td>E1-E2-E3-E4-</td><td rowspan="3">Diez equipos mencionan que la integral no es calculable dado que la función no es continua.</td><td>Cuatro afirman que se puede calcular aproximando valores de x cercanos a los puntos de discontinuidad, plantean y resuelven las respectivas integrales .</td><td>E1-E3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nueve afirman que no es posible calcular el área dado que la función no es continua.</td><td rowspan="2"></td><td>Tres plantean integrales considerando los extremos de cada porción.</td><td>E2-E5</td></tr>
<tr><td>Tres no muestran cálculos.</td><td></td></tr>
<tr><td>Un estudiante calcula el área por aproximación numérica y dibuja rectángulos sobre la región pedida.</td><td>E6</td><td colspan="2">Dos equipos mencionan que es posible calcular la integral y aproximan los valores de x cercanos a los puntos de discontinuidad, plantean y resuelven las respectivas integrales.</td><td>E4-E6</td></tr>
<tr><td>Doce estudiantes no responden.</td><td>E5</td><td colspan="2">Un equipo no responde.</td><td></td></tr>
</table>

Continuación tabla 4

Segundo grupo de preguntas

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Por grupo en la Prueba escrita
31 estudiantes asistentes</td><td>Estudiante seleccionado</td><td colspan="2">Por equipo en el laboratorio de ordenadores
26 estudiantes asistentes- 13 equipos</td><td>Estudiante seleccionado</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="3">Los estudiantes no graficaron la función valor absoluto, la definieron de manera seccionada, plantearon integrales.</td><td>Catorce estudiantes plantearon dos integrales en $[-3,-1]$ y $[-1,-4]$ respectivamente.</td><td>E1-E7-E5-E6</td><td colspan="2" rowspan="4">Los trece equipos calculan la integral utilizando el comando Calcular de DERIVE.</td><td rowspan="4">E4-E5-E6</td></tr>
<tr><td>Once estudiantes consideraron a cero como uno de los límites de integración.</td><td>E2</td></tr>
<tr><td>Tres estudiantes plantearon dos integrales en $[-3,4]$.</td><td>E4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tres no respondieron.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td colspan="2">Veintitrés estudiantes afirman que la proposición es verdadera y justifican su respuesta rehaciendo los cálculos.</td><td>E1-E2-E3-E4-E5-E6</td><td rowspan="3">Los trece equipos afirman que la proposición es verdadera.</td><td>Cinco justifican su respuesta rehaciendo los cálculos.</td><td>E6</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Ocho responden que la proposición es falsa y sus argumentos son: unos mencionan que se debe pasar el denominador al numerador y otros que el resultado debe ser cero.</td><td rowspan="2"></td><td>Cinco justifican su respuesta en la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo.</td><td>E3-E5</td></tr>
<tr><td>Tres calculan la integral con DERIVE y utilizan el resultado para avalar su respuesta.</td><td>E1-E2-E4-</td></tr>
</table>

Tabla 5

Tercer grupo de preguntas

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Por grupo en la Prueba escrita
31 estudiantes asistentes</th><th>Estudiantes seleccionado</th><th colspan="2">Por equipo en el laboratorio de ordenadores
26 estudiantes asistentes- 13 equipos</th><th>Estudiante seleccionado</th></tr>
<tr><td rowspan="5">5</td><td rowspan="3">Nueve estudiantes responder que la proposición es verdadera.</td><td>Un estudiante da ejemplos planteando integrales.</td><td>E4</td><td rowspan="3">Cinco equipos mencionan que la proposición es verdadera.</td><td>Tres equipos dan ejemplos planteando integrales.</td><td>E1</td></tr>
<tr><td>Dos estudiantes basan su justificación en un gráfico que elaboran.</td><td>E1</td><td>Dos mencionan que es una propiedad de la integral definida.</td><td></td></tr>
<tr><td>Seis estudiantes mencionan que es una propiedad de la integral definida.</td><td>E2</td><td>Escriben en sus propias palabras la proposición.</td><td>E2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ocho estudiantes responder que la proposición es falsa y justifican su respuesta en el desconocimiento de las funciones y/o los limites de integración.</td><td>E3-E5-E6</td><td colspan="2" rowspan="2">Seis equipos mencionan que la proposición es falsa y justifican su respuesta en el desconocimiento de los límites de integración o en que la función no esta acotada o no es continua.</td><td rowspan="2">E3-E4-E5-E6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Catorce no responden.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">6</td><td rowspan="3">Dieciocho afirman que la proposición es verdadera</td><td>Un estudiante da ejemplos planteando integrales</td><td>E4</td><td rowspan="5">Los trece equipos afirman que la proposición es verdadera</td><td>Tres dan ejemplos planteado integrales.</td><td>E1-E2</td></tr>
<tr><td>Un estudiante basa su justificación en un gráfico que elabora.</td><td></td><td>Cinco mencionan que dan el intervalo de integración.</td><td>E4-E6</td></tr>
<tr><td>Dieciséis dan justificaciones teóricas, tales como que la proposición es la recíproca de la proposición 5, es consecuencia del Teorema fundamental, etc.</td><td>E1-E2-E3-E5-E6</td><td>Tres mencionan que es una propiedad de la integral definida.</td><td>E3-E5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dos estudiantes afirman que la proposición es falsa y justifican su respuesta indicando que la funciones no están bien definidas.</td><td></td><td>Un equipo menciona que es la recíproca de proposición 5.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Once no responden.</td><td></td><td>Escribe en sus propias palabras la proposición.</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 6