



ESTUDIO SOBRE DIFICULTADES Y ERRORES EN RELACIÓN CON EL LENGUAJE ALGEBRAICO

Raquel M. Ruano Barrera
Martín M. Socas Robayna
M^a Mercedes Palarea Medina

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio comparativo del origen de errores de alumnos de Secundaria Obligatoria frente a los de los alumnos de Bachillerato en tres procesos específicos del Lenguaje Algebraico: sustitución formal, generalización y modelización. El estudio de errores se hace en relación con los tres ejes siguientes: actitudes afectivas hacia las Matemáticas, ausencia de sentido y obstáculo, y se trata, en este caso, de analizar si se puede establecer una jerarquía en los errores cometidos por los alumnos en los distintos procesos en estudio, pero prestando especial atención al origen.

Abstract

In this report a comparative study of the origin of the mistakes that Compulsary Secondary School pupils make as opposed to Bachillerato in three specific processes of the Algebraic Language: formal substitution, generalization and modelization is presented. The study of mistakes is made in relation with the following axis: affective attitudes about Mathematics, lack of sense and obstacle. On this occasion, we try to analyse if a hierarchy between the mistakes that pupils have made in the different studied processes can be established, and, finally, but paying special attention to the origin.

Introducción

Este artículo tiene como objetivo fundamental analizar y comparar los errores que cometen alumnos de 4º de ESO frente a los de 1º de Bachillerato, cuando se les administra un cuestionario que consta de tareas relacionadas con los procesos de sustitución formal, generalización y modelización.

En un trabajo anterior (Ruano, Socas y Palarea, 2003) se ha realizado un análisis y clasificación de los errores cometidos por tres grupos de alumnos: dos de 4º de ESO y uno de 1º de Bachillerato. En esta ocasión, aunque también se presenta el análisis y clasificación de los errores cometidos en una de las preguntas, se pretende, además, poner de relieve las posibilidades de ciertos instrumentos y técnicas utilizados en dicho análisis: las redes sistémicas y los esquemas de análisis.

Junto al análisis y clasificación de los errores cometidos por alumnos de Secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización, y a la comparación entre 4º de ESO y Bachillerato, se pretende analizar si puede establecerse una jerarquía entre los errores cometidos por los alumnos en los distintos procesos, de un modo similar a lo realizado en un trabajo anterior (Ruano y Socas, 2001) con las tareas, pero prestando, en este caso, especial atención a su origen.

A efectos de presentación, estructuramos este artículo en los siguientes apartados: metodología, análisis y clasificación de los errores, comparación de los errores y conclusiones.

Metodología

En el análisis y clasificación de los errores cometidos por alumnos de Secundaria, y la posterior comparación entre los de los alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato, se ha seguido una metodología principalmente cualitativa, puesto que lo que nos interesa es el proceso desarrollado por los alumnos más que el resultado final.

El principal instrumento de recogida de la información ha sido un cuestionario con 15 preguntas (43 ítems), sobre los tres procesos en estudio: la sustitución formal, la generalización y la modelización. El diseño y modo de construcción del cuestionario, así como los criterios de corrección de las preguntas están recogidos en Ruano y Socas (2001). El cuestionario se administró en dos partes, C1 y C2. La parte C1, contiene 9 preguntas; las 4 primeras están dedicadas a la sustitución formal (13 ítems) y el resto, a la generalización (15 ítems). La parte C2 consta de 6 preguntas (20 ítems); las 3 primeras están relacionadas con la generalización y las siguientes, con la modelización.

El cuestionario se administró a 43 alumnos del IES “San Matías” en La Laguna (Tenerife): dos grupos de 4º de ESO de la opción B (13 y 19 alumnos, respectivamente) y un grupo de 1º de Bachillerato Tecnológico (11 alumnos). Los alumnos no habían recibido instrucción del tema previa a la ejecución de este cuestionario y no se les proporcionó ningún tipo de ayuda.

Aunque el instrumento utilizado es de tipo cuantitativo, se emplea también en su vertiente cualitativa al tratar de analizar los errores que cometen los alumnos al responder a las preguntas contenidas en él. La propuesta de trabajo planteada intenta hacer converger los aspectos cualitativos y cuantitativos de los paradigmas de investigación, y recoge métodos y técnicas de ambos.

Se utilizaron varios procedimientos para el análisis de la información. La clasificación de los errores la realizamos ayudándonos de *esquemas de análisis* en los que se refleja, en primer lugar, el tipo de error cometido, en segundo, los códigos de los alumnos, en tercero, el ítem en el que han fallado y, al final, el número total de errores de cada tipo. En algunas preguntas con respuestas abiertas, para la recogida de la información, se emplearon redes sistémicas, utilizando los parámetros fijados por Bliss, Monk y Ogborn (1983), con algunas modificaciones para ajustarlas a nuestro propósito. En concreto, en el lado

derecho de la red, hemos incluido un recuadro con el código del alumno que ha recorrido cada itinerario. La inclusión de este código nos permite hacer un seguimiento de cada alumno y comprobar si existe una persistencia en el mismo tipo de error por parte de cada alumno o, por el contrario, varía dependiendo de la tarea presentada. Si bien, no se ha realizado este estudio con profundidad, sí nos parece interesante apuntar la utilidad de las redes en este sentido para estudios de casos futuros. Posteriormente, veremos un ejemplo tanto de los esquemas de análisis como de las redes sistémicas.

Análisis y clasificación de errores

A efectos de mostrar el análisis y clasificación de los errores cometidos por este grupo de alumnos de Educación Secundaria, seleccionamos una de las quince preguntas propuestas: la pregunta 2 de la parte C2 relacionada con la generalización. Esta pregunta sirve como ejemplo de las técnicas e instrumentos utilizados para el análisis y clasificación de los errores: las redes sistémicas y los esquemas de análisis.

Como ya comentamos en el apartado relacionado con la metodología, queremos poner de relieve la utilidad de dichas técnicas e instrumentos para el análisis de los errores, aunque parece claro que no son suficientes para un estudio completo.

En la pregunta 2 de la parte C2 se pedía a los alumnos que determinaran, en una serie de expresiones algebraicas, cuál es la mayor y cuál la menor, indicando los motivos.

PREGUNTA 2

2. Dadas las expresiones:

p

$p + 7$

$p - 2$

$2p$

¿Puedes contestar?:

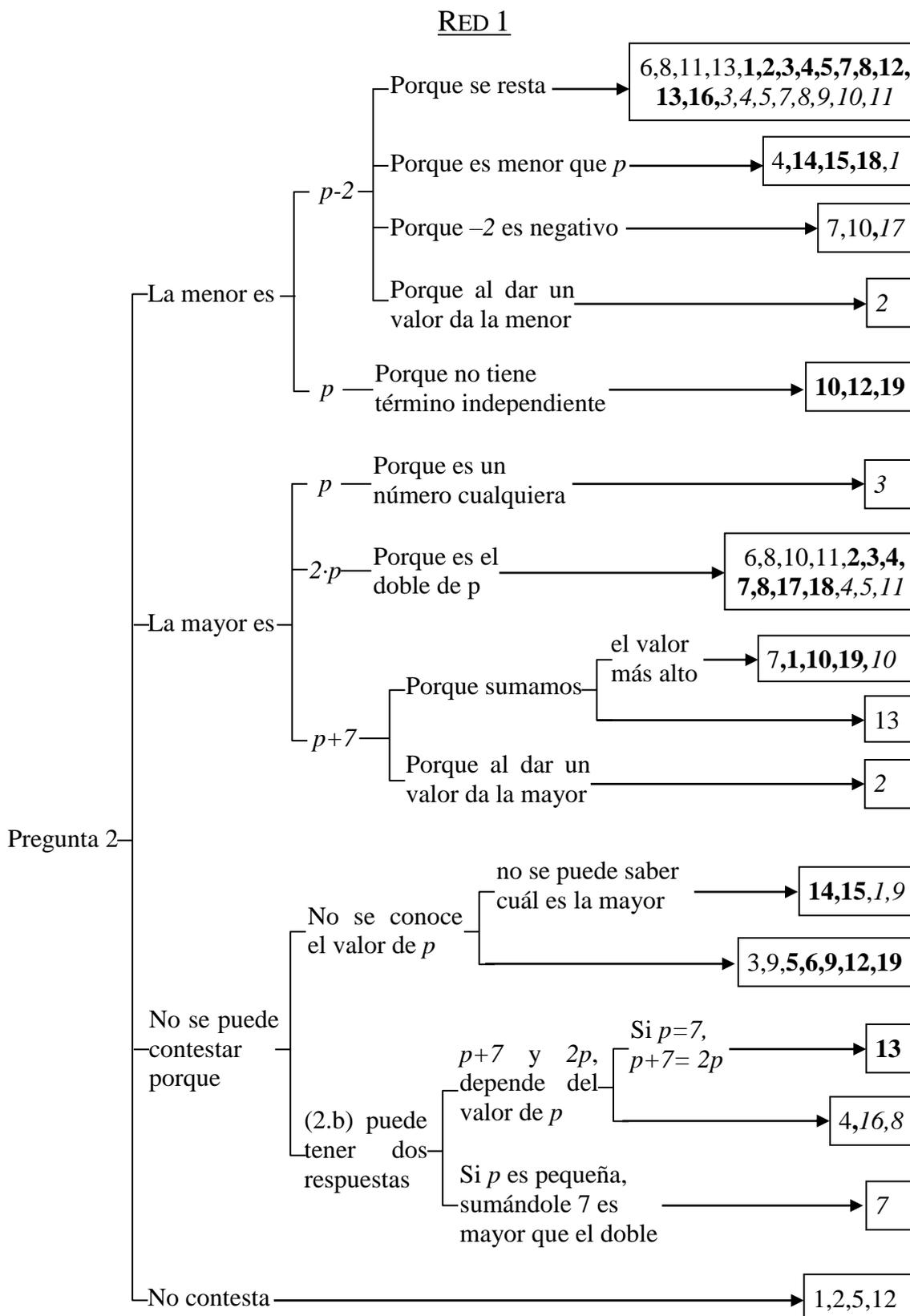
a) La menor de ellas es _____ porque _____

b) La mayor de ellas es _____ porque _____

c) No se puede contestar porque _____

Dado que esta pregunta admite una respuesta abierta, se creyó conveniente introducir una red sistémica (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) con las distintas respuestas dadas por los alumnos, antes de tratar de organizar los errores. Ésta nos dio una idea de cuáles fueron los pasos seguidos por éstos para llegar a las distintas conclusiones. La respuesta del alumno codificado con un 6 del grupo de Bachillerato, la única correcta, no está incluida en la red.

Los números que aparecen en los rectángulos se corresponden con los códigos de los alumnos. En letra normal, se representan los códigos de los alumnos que pertenecen al grupo 1, en negrilla los del grupo 2 y, finalmente, en cursiva los del grupo 3.



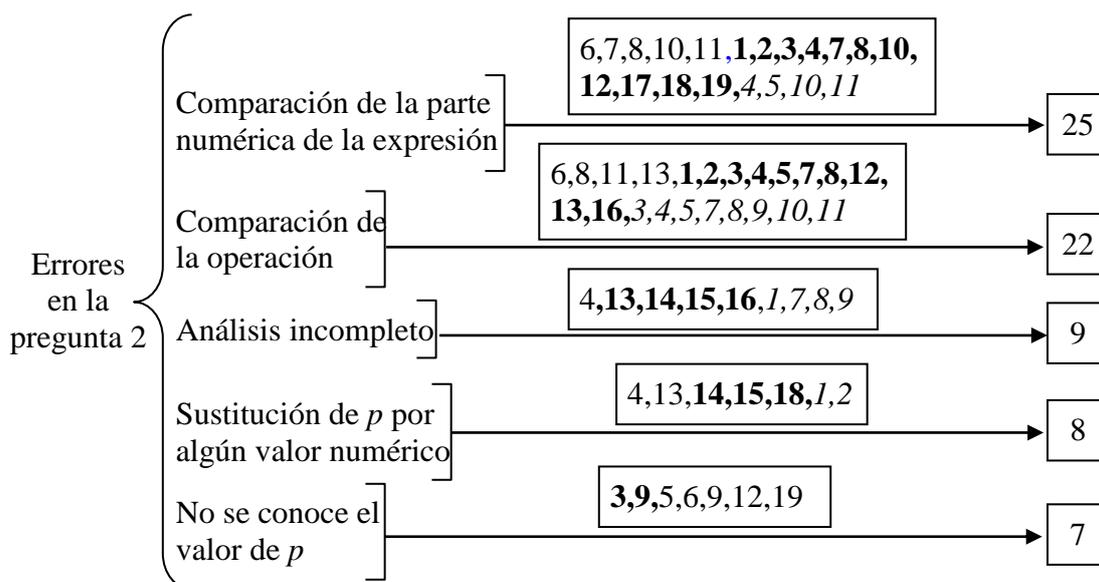
Como se observa en la red, los alumnos realizaron un análisis parcial de las expresiones.

Básicamente, los razonamientos seguidos fueron los siguientes:

1. Sustituyen la “ p ” por algún valor numérico, en general, un único valor entero positivo, y responden, atendiendo a los valores que han obtenido tras la sustitución. Ejemplos: “ $p-2$ es la menor porque al darle un valor a la p , da la menor expresión” o bien, “ $p-2$ es la menor porque es menor que p ”.
2. Realizan la comparación de una parte de la expresión, normalmente la numérica: $+7$, -2 ..., “el doble de”, y responden por comparación de esta parte. Algunos ejemplos son: “ $p - 2$ es la menor expresión porque -2 es el número menor”, o bien “ p es la menor porque no tiene término independiente”.
3. Comparación de la operación. Algunas contestaciones que corresponderían a este tipo de razonamiento son: “ $p+7$ es la mayor, porque se suma”, o “ $p-2$ es la menor, porque se resta”.
4. No consideran p susceptible de tomar distintos valores y, como desconocen el valor de p , piensan que la pregunta no se puede contestar.
5. Realizan un análisis parcial, sólo para responder a cuál es la mayor. Algunas respuestas que entrarían en este grupo son: “como no conocemos el valor de p no podemos averiguar cuál es la mayor expresión”.

Atendiendo a estos razonamientos podemos *organizar los errores* del siguiente modo:

ESQUEMA 1

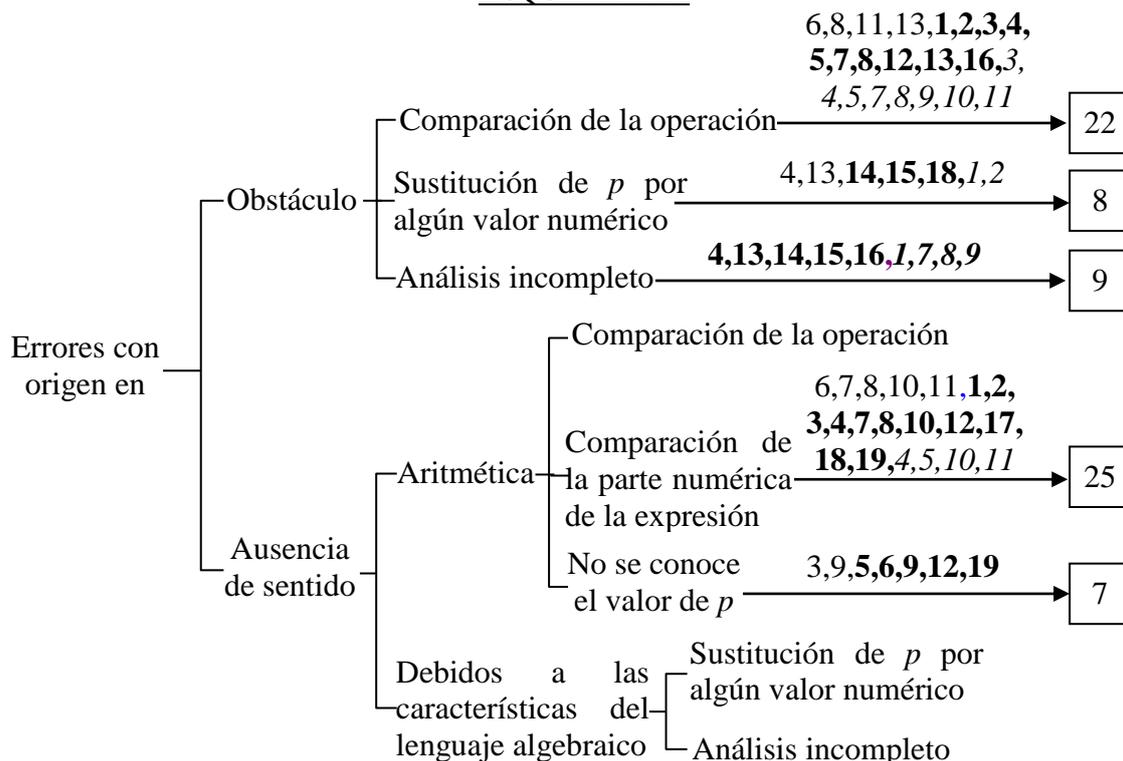


En el esquema se observa que gran parte de los errores se produjo por la comparación de la parte numérica de las expresiones, omitiendo la parte literal. Este tipo de error podría tener su origen en una ausencia de sentido. Para estos alumnos las letras carecen de significado o valor, y en ningún caso las consideran como números generalizados, necesitan remitirse a la parte numérica para poder realizar la ordenación, lo que indicaría la fijación de estos alumnos en el pensamiento numérico. Veintidós alumnos han realizado la ordenación comparando las operaciones: la expresión que contiene una suma es mayor que la que no contiene ninguna operación y, a su vez, ésta última es mayor que la que contiene una resta. Este tipo de error se produce por la falsa generalización de las propiedades de los números naturales; por tanto, también se trataría de un error por ausencia de sentido que tiene su origen en la Aritmética, o bien podría tener su origen en un obstáculo didáctico, puesto que los profesores no enfatizamos que no todos los conjuntos numéricos verifican las mismas propiedades. Ocho de los errores se produjeron porque los alumnos le dieron un valor numérico a p , y, respondieron, atendiendo a los resultados obtenidos tras la sustitución. Estos alumnos no tienen claro que para poder generalizar un resultado no es suficiente con comprobar que se verifica la hipótesis para un

único valor. Este tipo de error es probable que se deba a la forma de enseñanza, ya que, con frecuencia, los profesores tampoco insistimos suficientemente en la fase de validación de la generalización. Así podemos considerar que este tipo de error también podría tener su origen en un obstáculo didáctico, o bien, que se trata de un error propio del Álgebra, asociado a la dificultad que entraña la fase de validación de la generalización y que tiene su origen en una ausencia de sentido. Nueve alumnos realizaron un análisis incompleto de la situación, aunque los niveles de análisis de cada uno fueron distintos. En lo que todos coincidieron fue en que sólo realizaron el análisis para averiguar cuál es la mayor de las expresiones, porque tienen dudas entre $2 \cdot p$ y $p+7$. Este tipo de error, tiene las mismas características que el anterior, a pesar de que los alumnos han llegado a un nivel de generalización mayor, por tanto, su origen será el mismo. Por último, 7 alumnos consideraron que no se puede realizar la ordenación de las expresiones porque no se les da el valor de p . Estos alumnos estarían dentro del grupo que no encuentra significado a las letras. Como ya mencionamos, este tipo de error tiene su origen en una ausencia de sentido.

En el siguiente esquema se resumen los *orígenes de los errores* cometidos en esta pregunta. Esta organización está basada en la realizada por Socas (1997) que sitúa los orígenes de los errores en tres ejes no disjuntos: actitudes afectivas, ausencia de sentido y obstáculo.

ESQUEMA 1.A



Comparación de los errores

Constituye este apartado la parte central del trabajo en el que analizaremos y comparemos los errores cometidos por alumnos de los grupos de 4º de ESO y Bachillerato, seleccionados. El objetivo de esta comparación es tratar de averiguar si existen diferencias entre los errores cometidos por los alumnos de Secundaria Obligatoria y los cometidos por los de Bachillerato. Asimismo, también queremos conocer si los errores en los distintos procesos son similares o, por el contrario, dependen de las tareas presentadas.

Compararemos detalladamente los errores que se cometen en la pregunta número 2 de la parte C2 dedicada a la generalización, cuyo análisis y clasificación de errores expusimos anteriormente.

En general se observa que no existen demasiadas diferencias entre los grupos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato, puesto que casi todos los alumnos (36 del total) respondieron de forma incorrecta. Si bien cabe destacar que el único alumno que dio una respuesta correcta fue el alumno codificado con el número 6

del grupo de Bachillerato y que de los dos alumnos que tuvieron la pregunta regular (13 y 7), uno de ellos también pertenecía a dicho grupo. También debemos señalar la mayor predisposición de los alumnos de este grupo a responder a la pregunta, ya que todos dieron una respuesta, mientras que hubo alumnos de 4º de ESO que dejaron esta pregunta sin contestar.

Observando el esquema 1.A, vemos que, en líneas generales, los alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato cometen el mismo tipo de error, aunque no ha habido ningún alumno de Bachillerato que haya cometido el tipo de error que hemos denominado “No se conoce el valor de p ”. Ya mencionamos anteriormente que los alumnos que cometen este tipo de error estarían dentro del grupo que no encuentra significado a las letras y no consideran la p como susceptible de tomar distintos valores. Así, estos alumnos son resistentes al uso de las letras y los situaríamos en un pensamiento puramente numérico.

Podemos sintetizar la comparación realizada con todas las preguntas en las siguientes tablas, cada una de ellas dedicada, respectivamente, a uno de los procesos en estudio: la sustitución formal, la generalización y la modelización, respectivamente. En las tablas se observa el origen del error, la denominación que le hemos dado a cada tipo de error y el número de errores que cometen los alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato, en relación a cada tipo de error. Para la correcta interpretación de estas tablas hay que tener en cuenta que el número de alumnos encuestados pertenecientes a 4º de ESO fue 32 y los 11 restantes pertenecían a Bachillerato. Así, parece lógico que el número de errores de los alumnos de 4º de ESO sea generalmente mayor que el de los de Bachillerato.

Tabla 1

ERRORES EN LA SUSTITUCIÓN FORMAL				
ORIGEN		TIPO DE ERROR	4º ESO	1º BACHILLERATO
<i>Actitudes afectivas</i>		$x - 5$	3	2
		Respuesta no relacionada	3	0
		Explicación incompleta	2	0
<i>Ausencia de sentido</i>	Aritmética	Particularización	49	23
		$x +$ fracción	11	4
		Fracción o $x/2$	11	3
		No uso del paréntesis	10	2
		Confusión de multiplicación y potencia	8	2
		Confusión entre operaciones	6	0
		$x-5$	3	2
	Procedimiento	Uso incorrecto de la propiedad distributiva	1	2
	Características propias del lenguaje algebraico	No atiende a la parte numérica	4	0
		Misma letra para la sustitución	4	0
Sustitución de una expresión numérica por una algebraica incorrecta		5	0	
<i>Obstáculo</i>	Cognitivo	Necesidad de clausura	19	0
	Didáctico	No uso del paréntesis	10	2
	Cognitivo	Omite las relaciones entre las variables	7	0
	Cognitivo	Concatenación	2	1

Como se observa en la tabla precedente, existen diferencias sustanciales entre el número de errores que cometen los alumnos de 4º de ESO y el de los de Bachillerato. En muchas ocasiones los alumnos de Bachillerato no han tenido errores, y, sólo en un caso, el número de errores de éstos supera al de los de 4º de ESO. Así, dos alumnos de 1º de Bachillerato han usado incorrectamente la propiedad distributiva, mientras que sólo uno de 4º de ESO tiene este tipo de

error. Esto puede venir motivado porque el error se ha producido al desarrollar una expresión tras realizar una sustitución, y fueron pocos los alumnos de 4º que desarrollaron las expresiones.

Ha habido errores que se han repetido en las distintas preguntas relacionadas con la sustitución formal. Éstos han sido: la necesidad de clausura y de particularización. La necesidad de clausura se presenta en todas las preguntas, excepto en la número 2. Los alumnos tienen la necesidad de particularizar las expresiones, especialmente, en las preguntas 3 y 4, aunque también hay un alumno que particulariza en la pregunta 1.

Respecto a la necesidad de clausura, se observa que el grupo de alumnos de Bachillerato no tiene esta necesidad de cerrar las expresiones; en cambio 11 de los 32 alumnos de 4º de ESO, sí la tienen. Los alumnos encuestados de 1º de Bachillerato tienen superada la necesidad de clausura, al menos en lo que se refiere a las preguntas relacionadas con la sustitución formal, mientras que un 34,37% de los alumnos de 4º de ESO, no. Cabe destacar que sólo el alumno codificado con el número 4 del grupo 1 ha tenido la necesidad reiterada de clausurar las expresiones, de hecho, lo hizo en todas las preguntas excepto en la número 2, que no se prestaba a ello. Podemos inferir que este alumno mantiene un pensamiento netamente numérico.

Se observa que el error de particularización es el más repetido, 49 errores, seguido por el de la necesidad de clausura con 19. En este caso sí hubo alumnos de Bachillerato que vieron la necesidad de particularizar las expresiones, además en un porcentaje alto. Siete de los errores de particularización en la pregunta número 3 fueron cometidos por alumnos de Bachillerato, mientras que este número aumentó hasta 16 en la número 4. Aunque persisten las diferencias entre el grupo de Bachillerato y el de 4º de ESO, éstas no son tan grandes como ocurría con la necesidad de clausura, pues un número elevado de alumnos de Bachillerato sigue manteniendo la necesidad de particularizar las expresiones para resolver las preguntas planteadas. Sólo el alumno codificado con el 7 del

grupo 2 de 4° de ESO particularizó en las preguntas 1, 3 y 4, lo que denota, como ocurría con la necesidad de clausura, que está en un nivel de pensamiento numérico. Hubo varios alumnos que particularizaron tanto en la pregunta 3 como en la 4 (los alumnos **3** y **11** del grupo 2 y los *1*, *9* y *11* del grupo 3). Esta reiteración en la particularización implica la necesidad de usar un pensamiento numérico para poder resolver el problema e indica una fijación en dicho tipo de pensamiento.

Algunos alumnos tuvieron tanto la necesidad de clausurar como de particularizar las expresiones (alumno 8 del grupo 1 y de los alumnos **15** y **19** del grupo 2). En definitiva, parece que, de los 43 encuestados, aproximadamente 10, un 23,26%, están detenidos en el pensamiento numérico y no se ha producido la necesaria transición al pensamiento algebraico. Aunque parezca contradictorio, el porcentaje de alumnos de 4° de ESO que tiene fijación en el pensamiento numérico es menor que el de alumnos de Bachillerato: 21,88% y 27,27%, respectivamente.

Otro error bastante frecuente ha sido el no uso del paréntesis. En este caso, sólo la pregunta 1 se prestaba a que los alumnos incurrieran en este tipo de error, pero como observaremos posteriormente, es un tipo de error habitual. Por otro lado, los alumnos tienen dificultades con los porcentajes; 22 de 32 (68,75%) alumnos de 4° de ESO han cometido un error relacionado con este concepto, mientras que en el grupo de Bachillerato han sido 7 de 11 (63,64%). Los errores relacionados con este concepto han sido de diferente tipo; algunos alumnos simplemente escriben $x + \text{fracción}$, sin calcular el porcentaje a que se refiere la fracción, mientras que otros olvidan sumar el porcentaje hallado a la cantidad inicial y escriben $\text{fracción} \cdot x$. Observamos que también se han producido bastantes errores por la confusión entre multiplicación y potencia o la confusión entre otras operaciones cualesquiera. Como comprobaremos en las tablas siguientes, éste también es un error que se repite en varias preguntas.

Si ahora nos fijamos en los orígenes de los errores, comprobamos que podemos considerar que los errores tienen tres orígenes distintos no disjuntos: en actitudes afectivas de los alumnos hacia las Matemáticas, en ausencia de sentido y en obstáculos. Como se observa en la tabla, la mayoría de los orígenes de los errores se encuentra en una ausencia de sentido y estos errores son especialmente debidos a cuestiones que han quedado sin resolver en la Aritmética. Al origen de los errores en una ausencia de sentido le sigue el origen en un obstáculo. Observamos que podemos decir que la mayoría de los errores (necesidad de clausura, omisión de las relaciones entre variables y concatenación) tienen origen en un obstáculo cognitivo, mientras que el no uso del paréntesis es un error con origen en un obstáculo didáctico. Finalmente, son pocos los errores cuyo origen lo atribuimos a actitudes afectivas, aunque debemos tener en cuenta el número de personas que no respondieron a las preguntas relacionadas con el proceso de sustitución formal. Estas personas no han incurrido en ningún error, pero cabe preguntarse por qué no han respondido a las preguntas: quizá por miedo al error, por bloqueos, ansiedad ante las preguntas, desgana... En general, los porcentajes de ausencia de respuesta de los alumnos en preguntas relacionadas con la sustitución formal han sido bajos; parece que los alumnos se sienten bastante confiados ante este tipo de preguntas, aunque en algunos ítems como el (2.d), (3.a) o (4.d) estos porcentajes han aumentado considerablemente, superando en estos tres casos el 60%.

Pasemos ahora a analizar los errores de los alumnos en preguntas relacionadas con el proceso de generalización, para lo cual, utilizaremos una tabla análoga a la anterior.

Tabla 2

ERRORES EN LA GENERALIZACIÓN				
ORIGEN		TIPO DE ERROR	4º ESO	1º BACHILLERATO
<i>Actitudes afectivas</i>		Análisis incompleto	54	15
		16	16	1
		Omisión de lados	12	1
		Tabla incompleta	5	5
		Como máximo 2 errores	4	0
<i>Ausencia de sentido</i>	Aritmética	Confusión de multiplicación y potencia	18	8
		Comparación de la parte numérica de la expresión	20	5
		Comparación de la operación	14	8
		Omisión del paréntesis	10	2
		No se conoce el valor de p	7	0
		Regla de 3	4	1
		No están todos los lados	0	4
		Cierra la figura o actúa como si estuviera cerrada	3	0
	Geometría	Omisión de lados	12	1
		Intuición directa	10	0
		Intuición mixta	3	3
		Confunde cubos y caras	5	1
	Procedimiento	Confusión en la fórmula del área del rectángulo	18	1
		Multiplicación de lados	6	0
		Intuición referencial	4	0
		Perímetro por separado de los rectángulos	1	1
	Características propias del lenguaje algebraico	No atiende a la parte numérica	4	0
		Misma letra para la sustitución	4	0
		Sustitución de una expresión numérica por una algebraica incorrecta	5	0
		Análisis incompleto	68	15
		Errores en el dibujo	45	15
		Tabla incompleta	5	5
		Al 1	8	0
		Sustitución de p por algún valor numérico	6	2
		Posición siguiente	7	0
		Posición 16	6	0
		n + 2	3	0
<i>Obstáculo</i>		Comparación de la operación	14	8
		Omisión del paréntesis	10	2
		Concatenación	5	5
		Análisis incompleto	5	4
		Sustitución de p por algún valor numérico	6	2
		Consideran el lado como 2x	1	4

Como se observa en la tabla, también existen diferencias entre el número de errores de los alumnos de 4º de ESO y los de 1º de Bachillerato, aunque, en general, no son tan altas como en el proceso de sustitución formal. Estas diferencias sólo son relevantes en los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido debida a las características propias del lenguaje algebraico. Tal y como se refleja en la tabla, en muchas ocasiones los alumnos de Bachillerato no han cometido ningún error, de modo que la mayoría de éstos corresponden a alumnos de 4º de ESO. Nos parece interesante destacar que de los 38 tipos de errores, los alumnos de Bachillerato no han tenido ningún error en 13 ocasiones, mientras que esto sólo ha ocurrido en una ocasión para los alumnos de 4º de ESO. También resaltaremos que la mayor parte de los errores se ha producido al tratar de responder a las preguntas 1, 2 y 3 de la parte C2 del cuestionario.

Han habido errores que se han repetido en varias preguntas de las relacionadas con este proceso. Por ejemplo, la confusión entre la multiplicación y la potencia, expresiones incorrectas para expresar la generalidad, errores en el dibujo o análisis incompletos de las situaciones presentadas. La confusión entre la multiplicación y la potencia es un error que también se produjo en el proceso de sustitución formal que ya analizamos anteriormente. Es el tipo de error que más se ha repetido en aquellos que tienen su origen en una ausencia de sentido y que son ocasionados por dificultades no solucionadas en la Aritmética. El error de procedimiento más usual ha sido la confusión en la fórmula del área del rectángulo; en este caso, existen grandes diferencias entre el número de errores de alumnos de Bachillerato y de 4º de ESO, 1 y 18, respectivamente.

En relación con los orígenes de los errores, vemos que, al igual que ocurría en el proceso de sustitución formal, podemos considerarlos con tres orígenes distintos no disjuntos: en actitudes afectivas de los alumnos hacia las Matemáticas y, en particular, hacia el Álgebra; en ausencia de sentido; y en obstáculos. Como se observa en la tabla, gran parte de los errores tiene su origen

en una ausencia de sentido: muchos de ellos son causados por problemas que han quedado sin resolver en la Aritmética o la Geometría y que ocasionan errores en el Álgebra, pero que no son propios de ésta; algunos son errores de procedimiento, como por ejemplo la confusión en la fórmula del área de un rectángulo; pero, en esta ocasión, la mayoría de los errores es debida a las características propias del lenguaje algebraico. Al origen en una ausencia de sentido, le siguen los errores que tienen su origen en actitudes afectivas hacia las Matemáticas, de modo que el error más frecuente con este origen es el análisis incompleto; creemos que en este caso los alumnos pueden no haber estado motivados suficientemente o tener un exceso de confianza. Finalmente, con el menor número de errores, se encuentra el origen en un obstáculo. El tipo de error más repetido con este origen ha sido la comparación de la operación; se trata de un obstáculo didáctico debido a que los profesores no enfatizamos suficientemente el hecho de que no todos los conjuntos numéricos tienen las mismas propiedades.

Por último, y de forma análoga a lo presentado para los procesos de sustitución formal y generalización, compararemos los errores relativos al proceso de modelización.

Tabla 3

ERRORES EN LA MODELIZACIÓN				
ORIGEN		TIPO DE ERROR	4º ESO	1º BACHILLERATO
<i>Actitudes afectivas</i>		Ingleses o guanches	11	4
		Modelo incompleto	6	2
<i>Ausencia de sentido</i>	Aritmética	Particularización	17	1
		Faltan datos	3	5
		No sabemos número de guanches ni de ingleses	3	3
		Área del terreno dado entre 2	3	0
		Área nuevo terreno entre 2	0	1
		Confusión de multiplicación y potencia	0	1
	Geometría	Suma área y longitud	3	0
		Calcula el área del nuevo terreno. No acaba el problema	3	0
	Características propias del lenguaje algebraico	Cambio de registro incorrecto	7	3
		Sólo dibujo	3	3
		Calcula el área del nuevo terreno. No acaba el problema	3	0

En primer lugar, debemos señalar que los porcentajes de ausencia de respuesta en las tres preguntas relacionadas con la modelización son bastante elevados, sobre todo, en las preguntas 5 y 6. Habría que realizar un estudio más profundo (entrevistas) para poder saber por qué los alumnos no han respondido a estas preguntas, para comprobar si esta ausencia de respuesta es debida a bloqueos emocionales.

Como podemos ver en la Tabla 3, el número de errores no es excesivamente elevado en ninguno de los dos grupos (4º de ESO y 1º de

Bachillerato), si bien, es cierto que en la mayoría de las ocasiones, los alumnos de 4º de ESO cometen más errores que los de 1º de Bachillerato. El tipo de error que hemos denominado “faltan datos” es más frecuente en alumnos de Bachillerato que en alumnos de 4º de ESO. Este tipo de error podríamos considerarlo de la misma naturaleza que el que denominamos “no sabemos el número de guanches ni el de ingleses”, ya que en ambos casos los alumnos consideran que les faltan datos para resolver el problema. También, si consideramos ambas denominaciones como un mismo tipo de error, el número de errores de los alumnos de Bachillerato es mayor que el de 4º de ESO. Asimismo es mayor el número de errores en alumnos de 1º de Bachillerato en los tipos que hemos denominado “Área nuevo terreno entre 2” y “Confusión de multiplicación y potencia”, aunque esta diferencia no es tan grande como la presentada en primer lugar.

Ha habido errores que se han cometido en las distintas preguntas relacionadas con la modelización. La “particularización” y el tipo de error denominado “faltan datos” son errores que se han dado tanto en la pregunta 5 como en la 6. La particularización es el error más frecuente en el proceso de modelización, hecho que también ocurría en el proceso de sustitución formal. Cabe destacar que sólo un alumno de 1º de Bachillerato ha tenido la necesidad de particularizar las expresiones para poder resolver el problema, mientras que el número de alumnos asciende hasta 10 en el caso de 4º de ESO. Dos de estos alumnos han tenido necesidad de particularizar tanto en la pregunta 5 como en la 6. Consideramos que el error denominado “faltan datos” es debido a que los alumnos no ven la necesidad de utilización de las letras, lo que en muchos casos implica una fijación en el pensamiento numérico. Dos alumnos de 4º de ESO y uno de Bachillerato han incurrido en este error, tanto en la pregunta 5 como en la 6. También podemos considerar que se han repetido los errores relativos al cambio de registro ya que en la pregunta 4, consideramos que aquellas personas que sólo realizaron el dibujo, aún siendo capaces de convertir el enunciado al

registro gráfico, no han sabido interpretarlo para poder dar un resultado numérico a la pregunta. Por otro lado, en la pregunta 5, han realizado el cambio del registro verbal (enunciado del problema) al lenguaje algebraico, pero en la mayoría de las ocasiones ha sido incorrecto. El número de errores del tipo “sólo dibujo” es el mismo en alumnos de 4º de ESO y de 1º de Bachillerato y es mayor en los de 4º de ESO cuando se trata del cambio de registro incorrecto.

En relación con los orígenes de los errores, comprobamos que en esta ocasión hemos encontrado que ninguno de los errores de los alumnos encuestados tiene su origen en un obstáculo. Así podemos situar los errores con dos orígenes distintos no disjuntos: en las actitudes afectivas de los alumnos hacia las Matemáticas y en ausencia de sentido. Aunque aproximadamente un 27% de los errores tiene su origen en las actitudes de los alumnos, gran parte de los errores lo tiene en una ausencia de sentido. Como se observa en la tabla, muchos de los errores con origen en una ausencia de sentido se deben a cuestiones que han quedado sin resolver en la Aritmética o en la Geometría. En esta ocasión, no encontramos errores ocasionados por la incorrecta utilización de fórmulas o procedimientos ya conocidos que se suelen producir en el estadio estructural de la adquisición de nuevos conceptos. En cambio, sí ha habido algunos errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico, en concreto, la mayoría de ellos se ha producido por cambios de registro incorrectos.

Conclusiones

En primer lugar queremos señalar ciertas limitaciones de este estudio debidas a la metodología empleada. Si bien el uso de los *esquemas* de análisis descritos anteriormente ha resultado útil para organizar los errores cometidos por los alumnos en la mayoría de las preguntas y las *redes sistémicas* han sido un complemento perfecto para ayudar a ver cuáles son los razonamientos seguidos por los alumnos en preguntas más abiertas, encontramos que estas

estrategias han sido insuficientes para identificar con garantías los distintos orígenes de los errores. Nos reiteramos en la necesidad de completar el estudio con datos obtenidos mediante *entrevistas individuales* que nos permitan situar con más precisión el origen de los errores.

En general, los alumnos de 1º de Bachillerato tienen mayor predisposición a responder a las preguntas planteadas que los de 4º de ESO, lo que se refleja en los porcentajes de ausencia de respuesta. Las diferencias entre ambos son más significativas en preguntas relacionadas con la modelización, a las cuales los alumnos de 4º de ESO apenas han respondido.

Si comparamos los errores cometidos en cada proceso, podemos concluir que, en general, los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y del proceso; sin embargo, algunos errores se han repetido independientemente del proceso desarrollado: la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión entre la multiplicación y la potencia. Así, parece conveniente prestar especial atención a la prevención y remedio de estos errores en el tratamiento del lenguaje algebraico, fijándonos principalmente en su origen.

Resumiendo, si procedemos a comparar los tipos de errores que han tenido los alumnos de 4º de ESO y de 1º de Bachillerato, respectivamente, en relación con los distintos procesos, observamos que los alumnos de Bachillerato parecen haber superado la necesidad de clausurar las expresiones, al menos, en preguntas relacionadas con la sustitución formal. En el resto de errores no existen tantas diferencias entre ambos grupos, llegando incluso, a ser mayor el número de errores de los de Bachillerato que los de 4º en el uso incorrecto de la propiedad distributiva. Respecto a las preguntas relacionadas con la generalización, vemos que los errores dependen en gran parte de la pregunta presentada y que, aunque en general los alumnos de 4º cometen más errores que los de Bachillerato, las diferencias no son tan grandes como inicialmente cabía esperar. En relación con el proceso de modelización, observamos que el error

más frecuente es la particularización de las expresiones y en este tipo de error sí existen grandes diferencias entre el grupo de Bachillerato y el de 4º de ESO. Sólo un alumno de Bachillerato ha tenido la necesidad de particularizar las expresiones, mientras que los alumnos de 4º de ESO han cometido 17 errores de este tipo.

A efectos de presentar la comparación de los errores cometidos por cada grupo respecto al proceso y al origen, construimos una Tabla – resumen en la que, en primer lugar, se recoge el proceso; seguidamente, el origen del error; las dos columnas siguientes se refieren al número de errores de cada grupo; en la columna total se refleja el número total de errores respecto a cada origen y, finalmente, el número de errores en relación con cada proceso.

Tabla - resumen

Proceso	Origen		4º ESO	1º Bach.	Subt.	Total	
<i>Sustitución formal</i>	Actitudes afectivas		8	2		10	201
	Ausencia de sentido	Aritmética	98	36	134	150	
		Procedimiento	1	2	3		
		Características propias del lenguaje algebraico	13	0	13		
	Obstáculo		38	3		41	
<i>Generalización</i>	Actitudes afectivas		91	22		113	567
	Ausencia de sentido	Aritmética	76	28	104	388	
		Geometría	30	5	35		
		Procedimiento	29	2	51		
		Características propias del lenguaje algebraico	161	37	198		
Obstáculo		41	25		66		
<i>Modelización</i>	Actitudes afectivas		17	6		23	85
	Ausencia de sentido	Aritmética	26	11	37	62	
		Geometría	6	0	6		
		Características propias del lenguaje algebraico	13	6	19		

En esta tabla se observa que puede establecerse una jerarquía entre los procesos dependiendo del número de errores; así, la generalización es el proceso

en el que se produce mayor número de errores y la modelización en el que menos. Hemos de señalar que esta conclusión no es del todo válida ya que, en primer lugar, la ausencia de respuesta en preguntas relacionadas con la modelización ha sido muy elevada y, por tanto, el número de errores bajo. En segundo lugar, de las 15 preguntas, 8 estaban relacionadas con el proceso de generalización, así que parece lógico que el número de errores sea mayor.

En lo referente al origen de los errores, comprobamos que, en general, podemos situarlos en relación con tres orígenes distintos: actitudes afectivas hacia las Matemáticas, ausencia de sentido y obstáculo, aunque resaltaremos que en el proceso de modelización no hemos encontrado ningún error con origen en obstáculos. El origen más frecuente en los tres casos ha resultado la ausencia de sentido, con porcentajes del 74,63%, 68,63% y 72,94% para los procesos de sustitución formal, generalización y modelización. En la mayoría de las ocasiones, esta ausencia de sentido está relacionada con aspectos que han quedado sin resolver en la Aritmética o la Geometría; éstos son los casos de los procesos de sustitución formal y modelización. Así, es importante identificarlos para tratar de corregirlos en el ámbito aritmético o geométrico y que no resulten un problema añadido a la hora de introducir el Álgebra. En el proceso de generalización, la ausencia de sentido se ha producido, mayoritariamente, por las características propias del lenguaje algebraico. Para la corrección de este tipo de errores sugerimos que se recurra a situaciones que permitan crear esquemas fáciles de recuperar, que estén apoyados en distintos sistemas de representación y no sólo en argumentos formales. Por otra parte, debemos tener muy en cuenta los errores que tienen su origen en actitudes afectivas, así como buscar las razones por las que los alumnos no han dado respuesta a algunas preguntas. En muchas ocasiones los bloqueos que las actitudes causan en los alumnos son la principal causa que les llevan al error. Así, debemos motivarlos y prepararlos para que no tomen el error como un fracaso, sino como un elemento importante del aprendizaje de un concepto.

Referencias bibliográficas

- Bliss, J.; Monk, M.; Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*, Croom Helm. London
- Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4º de ESO. En Socas, Camacho y Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III*, pp. 239-265. CAMPUS. La Laguna
- Ruano, R. y Socas, M. M. (2003). Sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en matemáticas: implicaciones didácticas, Trabajo inédito.
- Ruano, R.; Socas, M. M; Palarea, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de Secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra, *Actas del VII simposio de SEIEM*. Granada.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap. V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Horsori. Barcelona.