FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA V
ISSN: 1695-6613

RECURSOS DIDÁCTICOS GRÁFICOS PARA EL TRATAMIENTO DE DESIGUALDADES

María Celia Ríos Villar
Víctor Manuel Hernández Suárez

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este trabajo se propone una estrategia didáctica que incorpora las representaciones gráficas en la resolución de desigualdades. Éstas se plantean desde tres contextos diferentes: numérico, analítico y gráfico. Se toma como base la necesidad puesta de manifiesto por diversos teóricos como Duval y Vinner, entre otros, respecto del uso y conexión de distintas representaciones o contextos. Ellos señalan que los profesores de Matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual, por lo cual hay resistencias de los estudiantes al uso de consideraciones visuales. Se resalta la trascendencia que el pensamiento visual tiene para lograr el acceso y utilización de los conceptos matemáticos. Asimismo, se han establecido tanto las consideraciones matemáticas como las competencias necesarias de los estudiantes para lograr nuestros objetivos.

Abstract

In this work, a teaching strategy that incorporates graphic representations in the resolutions of inequalities is proposed. These are presented from three different contexts: numerical, analytical and graphical. In all of them we take as a basis the necessity, manifested by diverse theoretical authors such as Duval and Vinner, among others, regarding the use and the connection of different representations or contexts. They point out that Mathematics teachers promote algorithmic thought over the visual; this is a reason by which some resistances by the students to the use of visual considerations are usually observed. The great importance that visual thought has in order to achieve the access and use of mathematical concepts is emphasised. Not only have mathematical considerations been established, but also the necessary competences of students to achieve our objectives.

Introducción

Nuestra experiencia y los resultados de las investigaciones aportadas por autores como Duval y Vinner (entre otros), nos han llevado a reflexionar acerca de cómo nuestros estudiantes han aprendido, o interiorizado, diferentes conceptos matemáticos.

Con frecuencia se detecta, en el aprendizaje de conocimientos matemáticos por parte de nuestros estudiantes, un problema que se ha denominado *disociación algoritmia/conceptualización,* y se refiere a las dificultades que muestran los estudiantes para conectar de manera adecuada los conceptos matemáticos y los algoritmos o procedimientos asociados a éstos, en la resolución de determinados problemas.

En las investigaciones realizadas, se destacan las siguientes observaciones:

- Los intentos de resolución de problemas por parte de los estudiantes se basan generalmente en técnicas de resolución meramente algebraicas, propias de la enseñanza tradicional.
- Los estudiantes muestran serias dificultades para enfrentarse a situaciones problemáticas por sí solos y para resolverlas.
- Muchas veces no consiguen asociar los conceptos que han estudiado con su utilidad en los diferentes contextos.
- Normalmente, no reconocen el momento en que deben o pueden aplicar algún concepto matemático, algoritmo o método de resolución.

La responsabilidad de esto recae sobre ellos, pero también en la tarea del profesor que, tradicionalmente, ha favorecido el contexto algebraico y el algorítmico para resolver situaciones problemáticas en detrimento de los contextos numéricos y gráficos o visuales, que han sido infrautilizados.

Los trabajos de Vinner, Eisenberg y Dreyfus resaltan los siguientes aspectos:

- Existe un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual.

- La resistencia de los estudiantes a usar contextos gráficos, visuales.

- Los profesores somos responsables de este predominio del aspecto algebraico sobre el gráfico.

- Es el profesor quien debe planificar y dirigir un conjunto de actividades que tiendan a generar actividad intelectual por parte del alumno.

Los alumnos aprenden a resolver sistemas de ecuaciones con distintos métodos, derivan e integran funciones, las representan y estudian sus gráficas siguiendo una serie de algoritmos o procedimientos algebraicos y analíticos, pero cuando se trata de resolver problemas en los que haya que determinar un patrón o modelo algebraico que permita reconocer y analizar el comportamiento de un fenómeno o proceso y avanzar así hacia la resolución, muestran bastantes dificultades.

Consideramos que si al estudiante se le proporciona la oportunidad de interactuar con el objeto de estudio en los diferentes contextos (gráfico, algebraico y numérico), puede entonces comprender las manipulaciones algebraicas que se derivan de los procesos de resolución de las situaciones problemáticas.

Por otro lado, los resultados de las investigaciones realizadas por autores entre los que destacan Shoenfeld (1994), Duval (1999) y Herscovics (1980), resaltan las dificultades encontradas en relación con la significación convencional de las ecuaciones lineales. Esta significación convencional, para la ecuación $a x + b y = c$, con a, b, c, distintos de cero, es la de que todos los pares de valores que la satisfacen son coordenadas de puntos de una recta, y viceversa (Courant y Robbins, 1941).

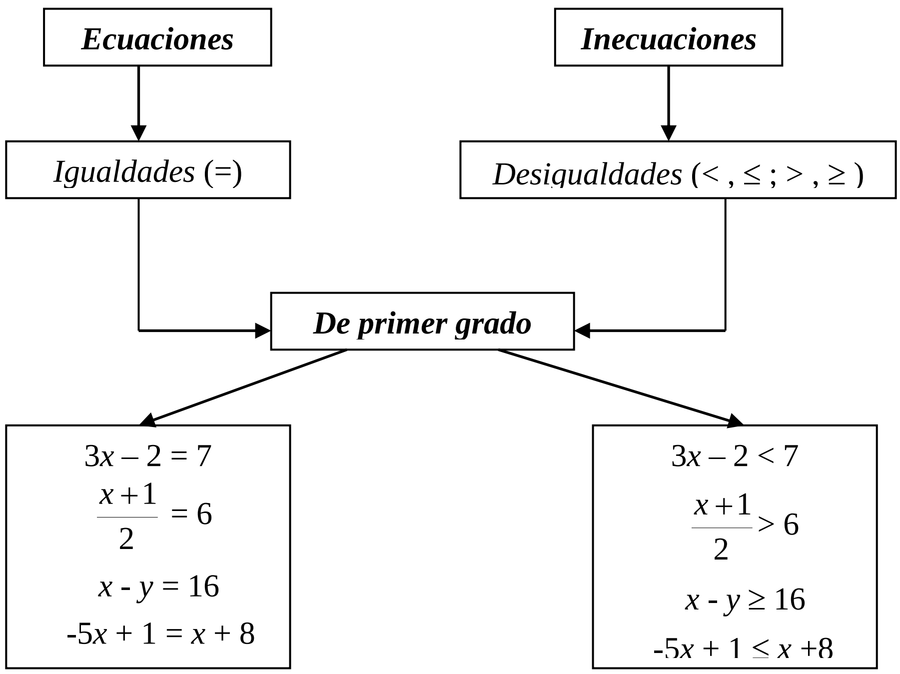
Más adelante, el trabajo de Hoyos (1999) plantea la construcción de una ecuación lineal a partir de su imagen gráfica como una situación apropiada para favorecer la transición entre dos tipos diferentes de pensamiento algebraico: "Variable visual de la representación-Unidad significativa de la escritura algebraica".

Son varios los investigadores que han investigado sobre la construcción de las ecuaciones lineales a partir de su imagen gráfica.

Herscovics (1980); véase Hoyos (1998); considera el aprendizaje del Álgebra como una parte del aprendizaje del lenguaje matemático.

De acuerdo con dicho autor, un nuevo concepto puede introducirse conectándolo con uno simple o con un concepto equivalente conocido por el estudiante.

Esquematizamos a continuación una representación básica, que deben conocer los estudiantes, para diferenciar las ecuaciones de las inecuaciones de primer grado:



También se les debe aclarar que: “Resolver una inecuación significa hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que se verifique la desigualdad”.

Con este planteamiento, nos referimos aquí al tratamiento de las desigualdades algebraicas, para lo que proponemos el estudio de algunos ejemplos desde tres contextos diferentes: numérico, analítico y gráfico.

Los ejemplos que vamos a estudiar son los siguientes:

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

b) $|2x - 1| > 3$

c) $\frac{1}{x-2} > x - 3$

d) $|-x^2 + 9| < |x|$

Desarrollo de las Actividades

♦ **Actividad 1**

***** Para la primera desigualdad, $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, veamos el procedimiento en el contexto numérico. Factorizando previamente, tendremos: $(x - 3)(x + 1) \geq 0$. Para $x = 3$ y $x = -1$, tanto el miembro izquierdo como el derecho de la inecuación son nulos; por lo tanto, se pueden considerar los tres intervalos siguientes: $(-\infty, -l)$, $(-3, -1)$ y $(3, \infty)$.

Probemos el primer intervalo con $x = -2$, tenemos $(-5) \cdot (-1) = 5$, luego $5 \geq 0$ indica que una parte del conjunto solución es el intervalo $(-\infty, -1]$.

En el segundo intervalo, con $x = 0$, tenemos $(-3) \cdot (1) = -3$, valor que no es mayor ni igual que cero. Finalmente, verifiquemos el último intervalo; para $x = 6$ tenemos $(3) \cdot (7) = 21$, luego, es cierto que $21 \geq 0$. Así, podemos expresar el conjunto solución como: $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

* Ahora analicemos el proceso de solución en el contexto algebraico, en los dos casos siguientes:

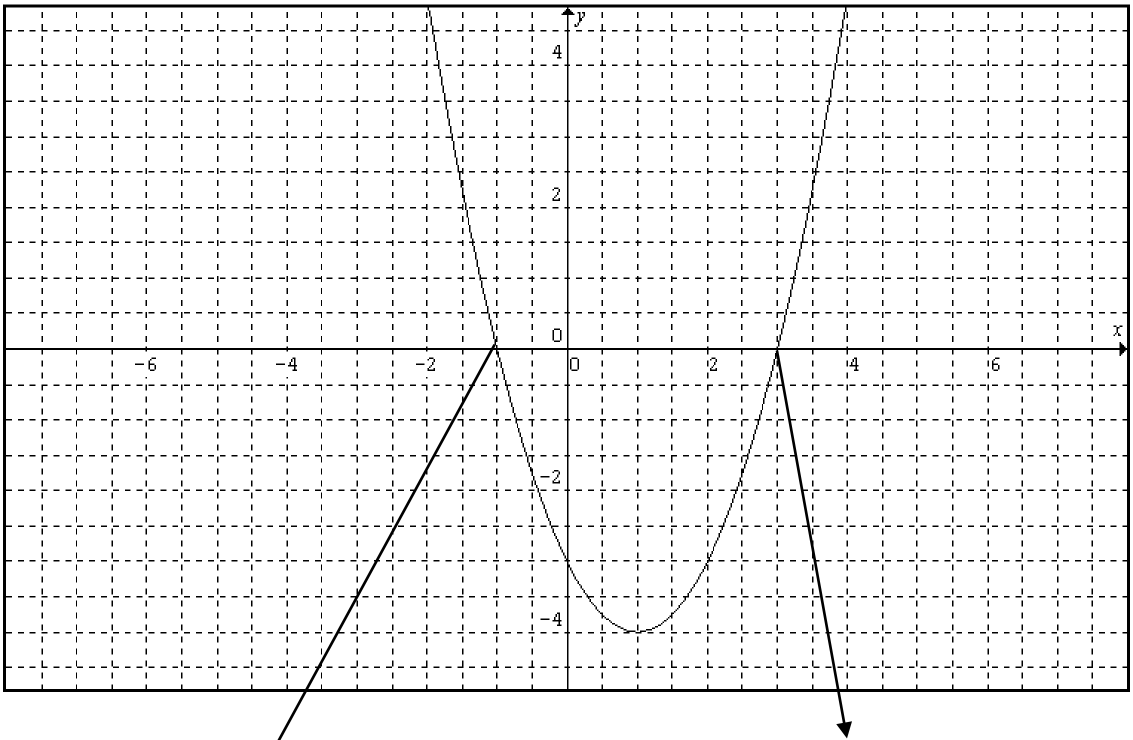
1) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$; factorizando, tenemos $(x - 3)(x + 1) \geq 0$. Para que el producto sea mayor o igual que cero, es preciso que $x - 3 \geq 0$ y $x + 1 \geq 0$; resolviendo, obtenemos $x \geq 3$ y $x \geq -1$, cuya solución parcial es $x \geq 3$. El producto también puede ser mayor o igual que cero si se cumple que $x - 3 \leq 0$ y $x + l \leq 0$; resolviendo, obtenemos $x \leq 3$ y $x \leq -1$, cuya solución parcial es $x \leq -1$. Finalmente, podemos escribir la solución como $x \leq -1$ o $x \geq 3$, o bien, $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

2) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, completando el cuadrado $(x - l)^2 \geq 4$, resolviendo, y utilizando las reglas algebraicas, obtenemos, $x \geq 3$ o $x \leq -1$, o bien, $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

***** Veamos ahora el contexto gráfico.

En este contexto asumiremos que los miembros de la inecuación pueden ser considerados como funciones de x. Distingamos la primera modalidad, en la cual suponemos competencias por parte del estudiante en las representaciones gráficas de funciones del tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in R$.

Para $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, si se considera el primer miembro $y = x^2 - 2x - 3$, esta ecuación corresponde a la de una parábola, abierta hacia arriba y cuyo vértice se localiza en el punto (1, - 4). Esto nos permite elaborar el diseño siguiente:

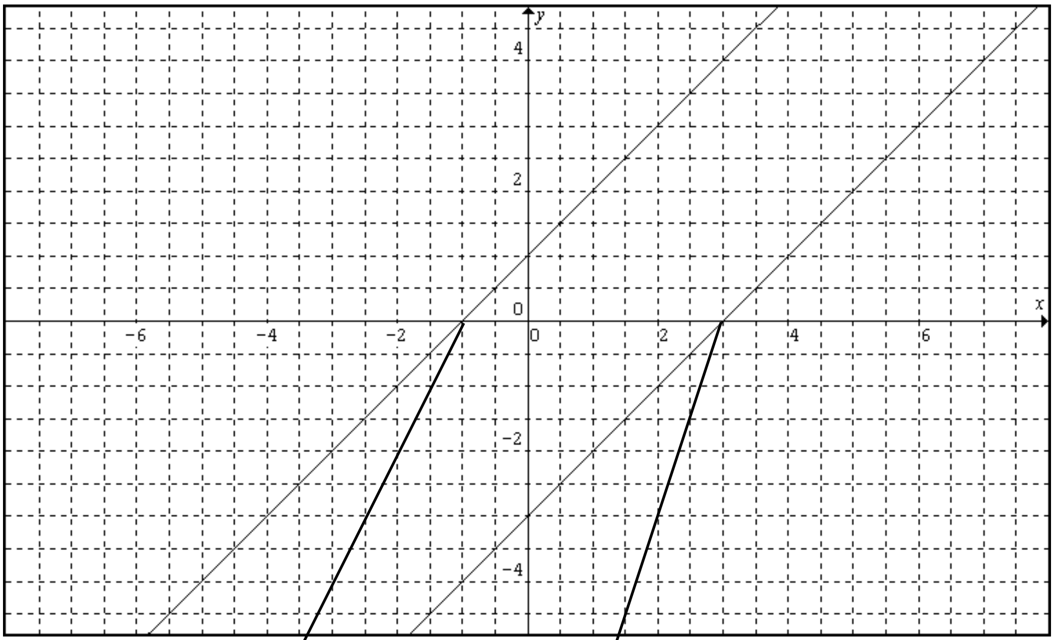


Intersección con el eje de abscisas en x = 3

Intersección con el eje de abscisas en x = - 1

En la figura se ve claramente que a partir de $x = -1$, hacia el infinito negativo, el gráfico está por encima del eje horizontal. También a partir de $x = 3$, hacia el infinito positivo, el gráfico está por arriba del eje horizontal. Tales intervalos forman parte del conjunto solución que buscamos.

En una segunda modalidad, podemos trabajar con la inecuación factorizada, es decir, $(x-3)(x+1) \geq 0$. Para ello tomemos $y_1 = (x - 3)$ e $y_2 = (x + 1)$. Aquí asumiremos que el estudiante tiene competencias geométricas para las funciones del tipo $f(x) = ax + b$, lo que nos permite elaborar el siguiente esquema gráfico:

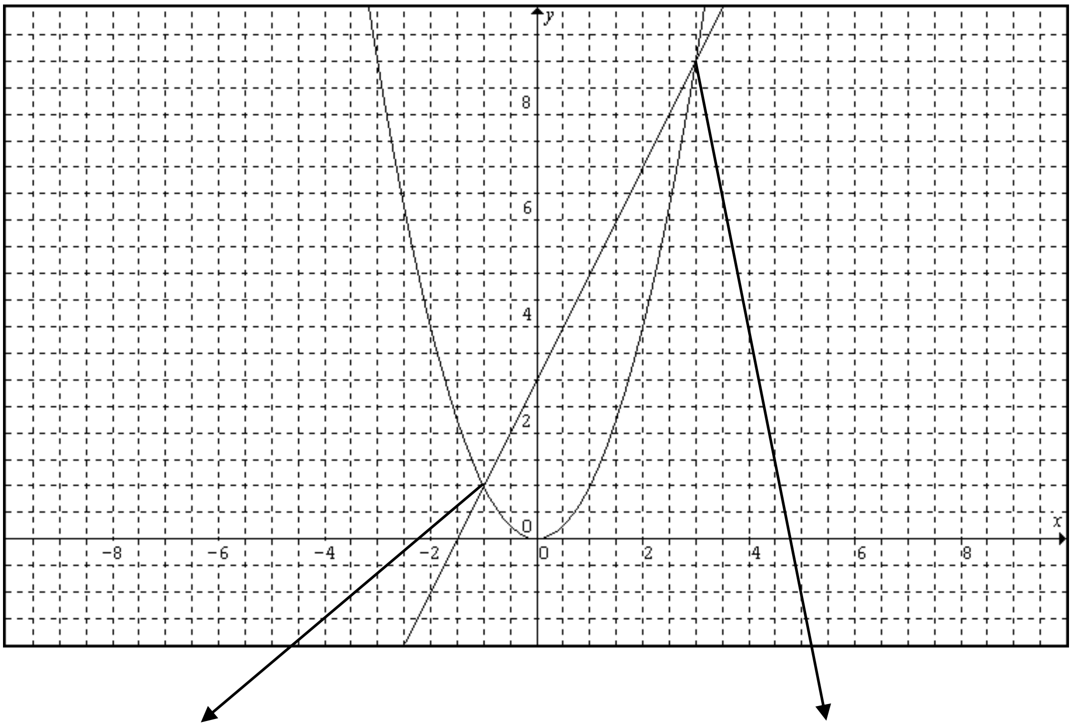


A partir del punto de intersección, cuya abscisa es $x = -1$, hacia la izquierda, es decir, hacia el infinito negativo, los signos de las "rectas” (factores) son negativos, por lo que el producto es mayor o igual que cero, luego dicho intervalo forma parte del conjunto solución.

A partir del punto de intersección, cuya abscisa es $x = 3$, hacia la derecha, es decir, hacia el infinito positivo, los signos de las "rectas" son positivos, por lo que el producto es mayor o igual que cero, luego dicho intervalo forma parte del conjunto solución.

Entre $x = -1$ y $x = 3$, los signos de las "rectas” son opuestos, lo que hace que el producto sea menor que cero; por lo tanto, el intervalo $(-1, 3)$ no forma parte del conjunto solución.

En una tercera modalidad, la desigualdad $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, puede escribirse como: $x^2 \geq 2x + 3$. Aquí consideraremos $y_1 = x^2$ e $y_2 = 2x + 3$. Los diseños de las gráficas respectivas se muestran a continuación.



Punto de intersección en x = -1 Punto de intersección en x = 3

Pueden observarse dos puntos de intersección entre las gráficas, correspondientes a x = -1 y a x = 3, respectivamente, los cuales determinan los extremos de los intervalos de solución. En particular, en el intervalo $(-\infty, -1]$, la parábola está por encima de la recta, lo que significa que este intervalo forma parte de la solución. En el intervalo (-1, 3), la recta está por encima de la parábola, por lo que este intervalo no forma parte de la solución. Finalmente, en el intervalo $[3, \infty)$, la parábola está por encima de la recta, por lo que este intervalo también forma parte de la solución.

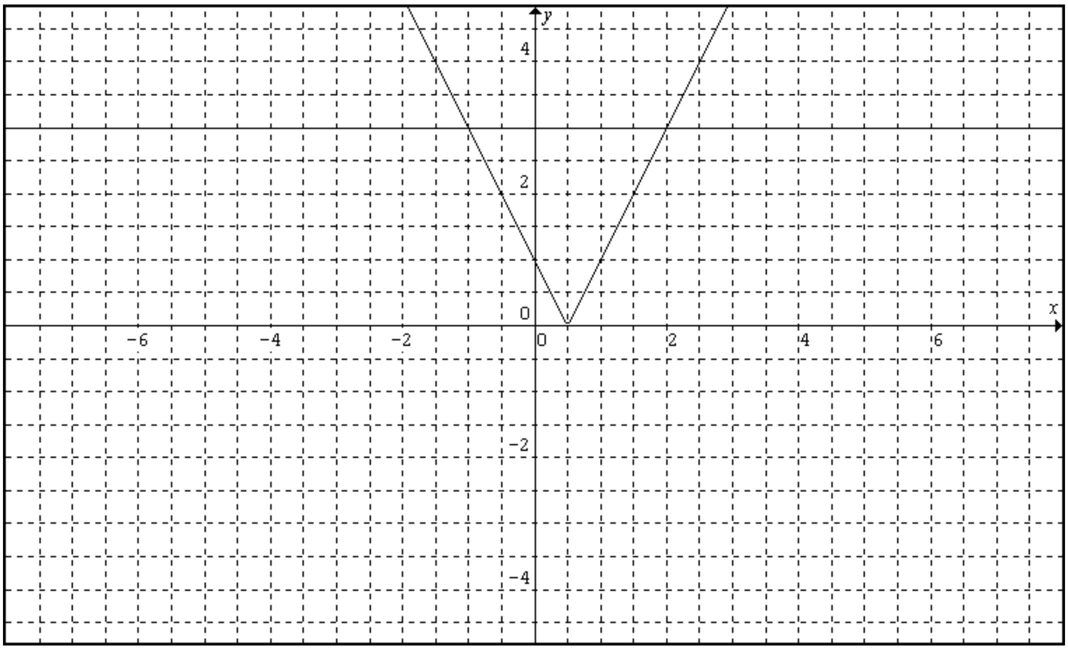
♦ **Actividad 2**

Consideremos otro ejemplo, la desigualdad $| 2x - 1 | > 3$, que analizaremos sólo en el contexto gráfico.

Se aclara que supondremos competencias por parte del estudiante en la representación gráfica de funciones del tipo $f(x) = | a x - c | + b$, con a, b, c $\in$ R. El vértice de la gráfica se obtiene resolviendo la ecuación de primer grado 2x

- 1 = 0, cuya solución es x = $\frac{1}{2}$. Las pendientes de las rectas que constituyen el gráfico de la función valor absoluto son 2 y -2, respectivamente.

De los resultados anteriores, se obtiene el siguiente gráfico:



Se puede observar que la gráfica correspondiente al valor absoluto, está por encima de la recta horizontal de ecuación y = 3, en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$. Los puntos extremos de los intervalos son, respectivamente, los puntos de intersección obtenidos por la resolución de las ecuaciones 2x - 1 = 3 y 1 - 2x = 3, o sea, x = 2 y x = -1.

♦ **Actividad 3**

A continuación, consideremos la desigualdad $\frac{1}{x-2}$ > x-3 que analizaremos solamente en el contexto gráfico.

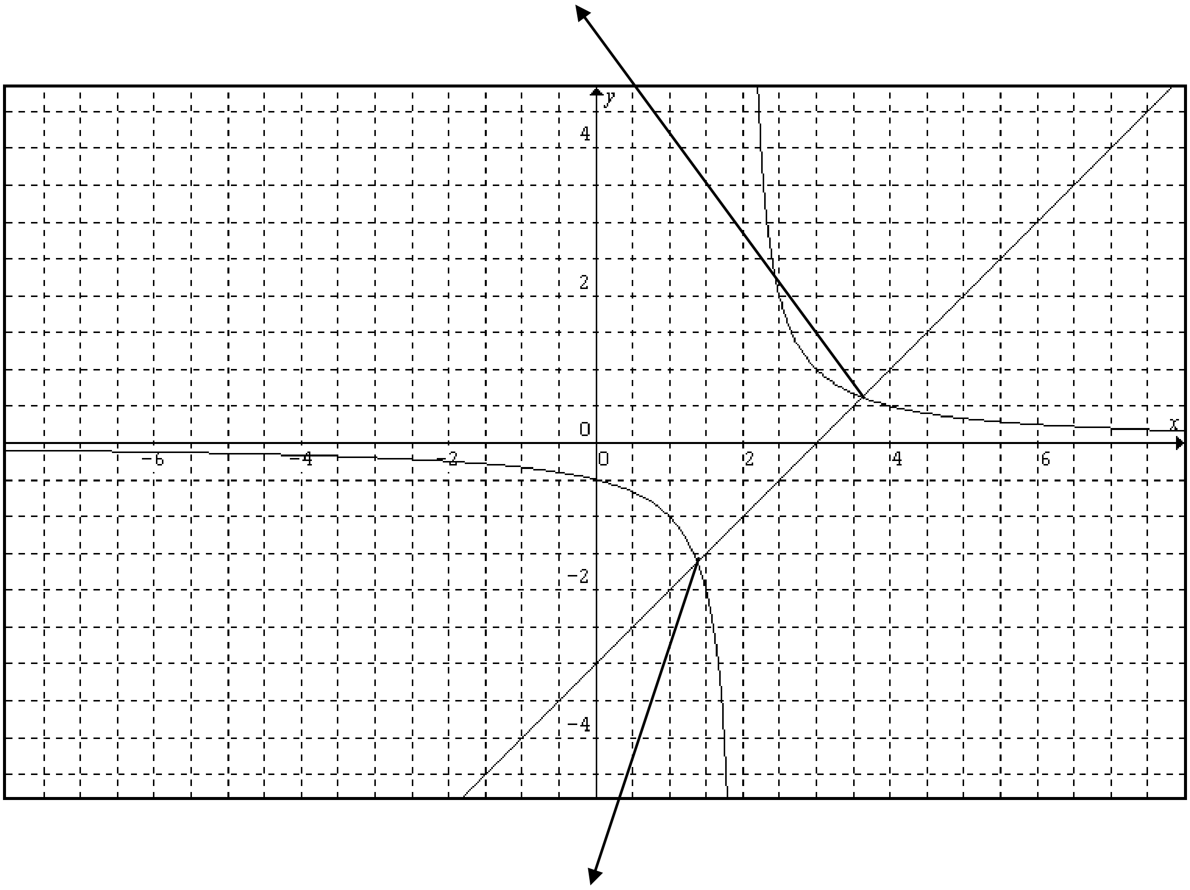
Asimismo, suponemos competencias por parte del estudiante en la representación gráfica de funciones de la forma f(x) = $(\frac{k}{x-c}) + b$, con k, b, c $\in$

R.

Optemos por $y_1 = \dfrac{1}{x-2}$ e $y_2 = x - 3$. Aquí el gráfico de y_1, tiene patrón de comportamiento del tipo $y = \dfrac{1}{x}$, salvo que y_1 está desplazado de manera horizontal y a la derecha en dos unidades, mientras que el gráfico de y_2 es una recta con pendiente m = 1 y ordenada en el origen -3.

Con lo anterior, se obtiene el siguiente dibujo:

Punto de intersección de las gráficas en $x = x_2$



Punto de intersección de las gráficas en $x = x_1$

La búsqueda de la solución de la desigualdad propuesta puede interpretarse, en términos gráficos, de la siguiente manera: nos interesan los intervalos en los que la gráfica de la función racional está por encima de la recta inclinada; esto ocurre en $(-\infty, x_1) \cup (2, x_2)$.

Para encontrar los puntos de intersección tenemos que resolver la ecuación:

$$\frac{1}{x-2} = x-3 \quad ,$$

Luego,

$$x^2 - 5x + 5 = 0,$$

Si completamos el cuadrado, obtenemos:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0,$$

Finalmente,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2},$$

Por lo que,

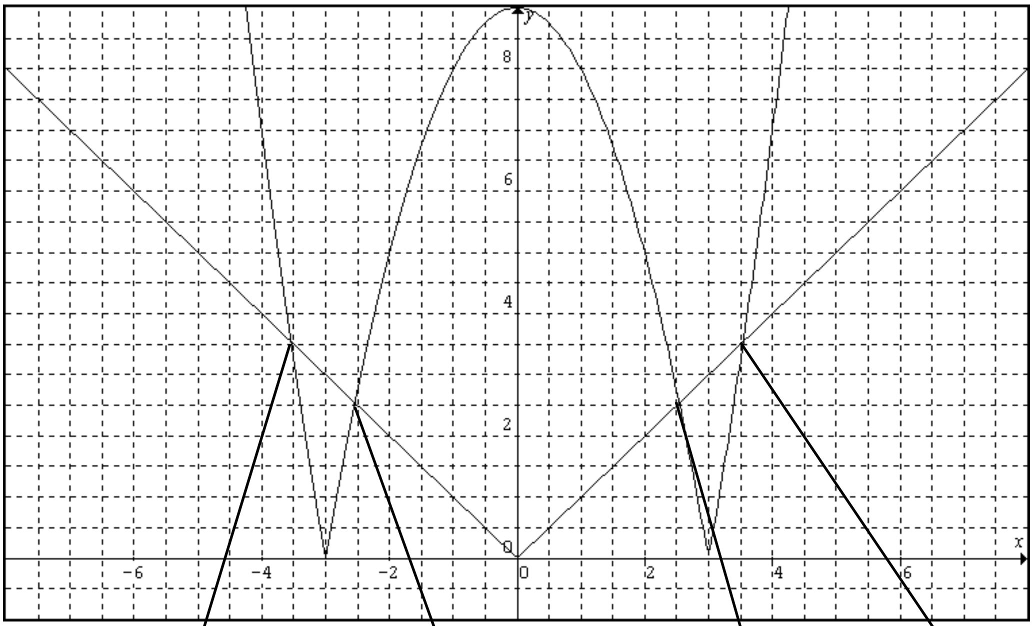
$$x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

El conjunto solución, por tanto, es:

$$(-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}) \cup (2, \frac{5+\sqrt{5}}{2})$$

♦ **Actividad 4**

Resolver: $\left|-x^2+9\right| < |x|$. Aquí también analizaremos sólo el contexto gráfico.



Los puntos de intersección de las dos gráficas son:

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}$; $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{37}}{2}$; $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}$; $x_4 = \dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$

P_1 es simétrico de P_4 respecto del eje OY

P_2 es simétrico de P_3 respecto del eje OY

La solución de la desigualdad propuesta se interpreta en términos gráficos de la siguiente manera: nos interesan los intervalos en los que la gráfica de la función $y_1 = \left|-x^2+9\right|$ está por debajo de la gráfica de la función $y_2 = |x|$, formada por la dos semirrectas.

Dichos intervalos son $\left(\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right)$

Los valores x_1, x_2, x_3, y x_4 los hemos obtenido resolviendo la ecuación $-x^2+9 = x$, teniendo en cuenta, además, la simetría.

♦ Actividad 5

Por todo lo visto anteriormente, defendemos la necesidad y el interés de trabajar previamente a las inecuaciones el bloque de nuestro programa "El lenguaje de las funciones y de las gráficas".

En este bloque de contenidos, iniciamos el trabajo a partir de actividades que sugieren situaciones reales, que dan pie a la elaboración de una tabla de valores que después serán representados en una gráfica que comentamos y analizamos y otras que, partiendo de una gráfica, nos llevan a describir una situación. También estudiamos algunos modelos de funciones especialmente interesantes: la función lineal y la función afín, la función cuadrática y la función de proporcionalidad inversa, por ser modelos de situaciones que habitualmente se presentan al trabajar problemas de proporcionalidad directa o inversa, problemas de movimientos, así como algunas funciones de los tipos valor absoluto y exponencial, entre otras.

Estos conocimientos resultan especialmente útiles cuando queremos tratar la resolución de ecuaciones de una variable, pero también la de inecuaciones de la forma $f(x) \geq g(x)$ o $f(x) \leq g(x)$.

El siguiente problema, es un ejemplo de actividad propuesta en la asignatura optativa "*La resolución de problemas matemáticos en la enseñanza obligatoria"*, de la Facultad de Formación del Profesorado (FFP) de la ULPGC:

Si x, y, z son tres números positivos, entonces ¿Qué es mayor $(1 + x^2) \cdot (1 + y^2) \cdot (1 + z^2)$ o $(8 \cdot x \cdot y \cdot z)$?

Para su resolución, proponemos la estrategia de simplificar el problema, particularizar y descomponer en problemas más sencillos.

Inicialmente, consideramos el enfoque numérico, y damos valores concretos a las variables x, y, z.

Así, comprobamos que para las ternas de valores:

$x = 1$	$x = 2$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 10$
$y = 1$	$y = 2$	$y = 0$	$y = 2$	$y = 2$
$z = 1$	$z = 2$	$z = 0$	$z = 3$	$z = 7$

los resultados que se obtienen son, en el primer caso, iguales para las dos expresiones y en los demás casos resulta siempre mayor el valor de la primera expresión.

Comprobamos también, que ocurre lo mismo (la primera expresión toma valores mayores que la segunda) para valores de x, y, z comprendidos entre 0 y 1.

Analizamos ahora la situación bajo el enfoque algebraico, desarrollando para ello la primera expresión.

Así resulta:

$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 + x^2 y^2 z^2 + 1$, que se comprueba fácilmente que es mayor que $8\,x\,y\,z$.

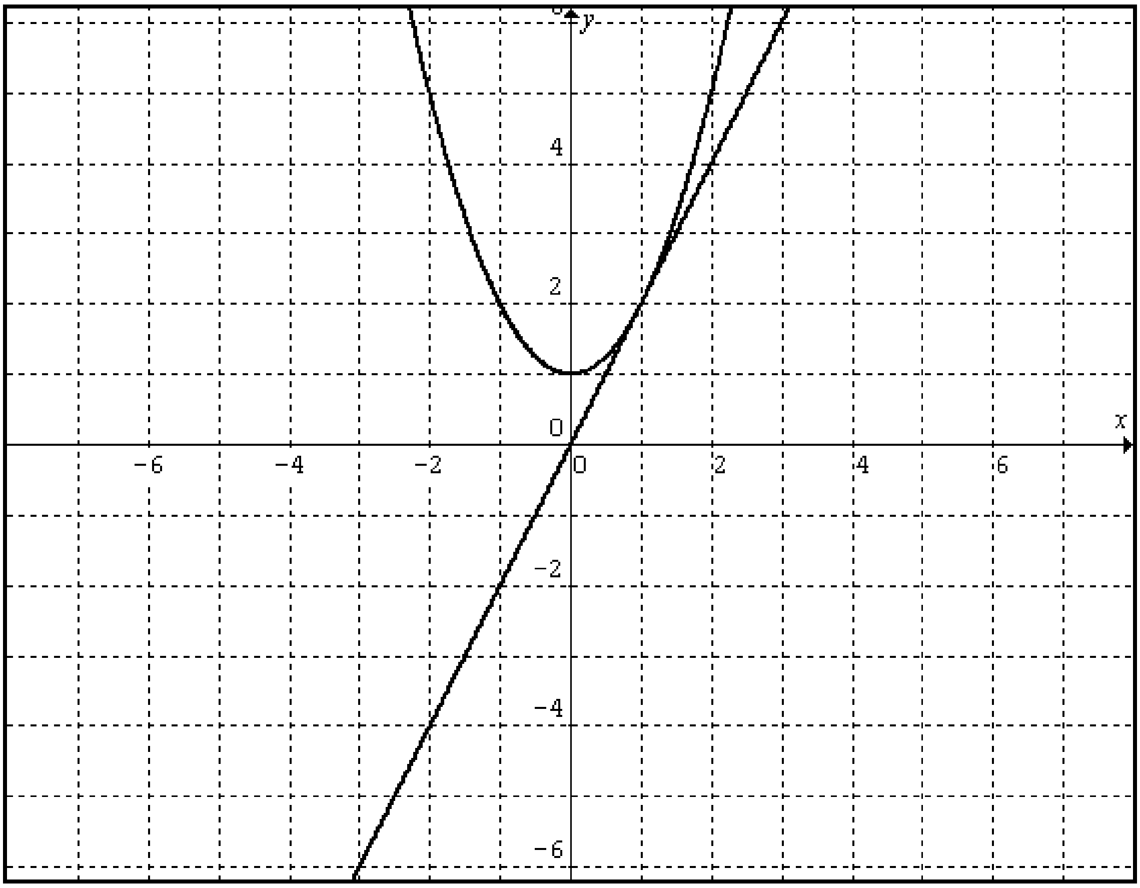
Se investiga ahora el contexto gráfico.

Expresamos el producto $8\,x\,y\,z$ en la forma $2x \cdot 2y \cdot 2z$ para comparar:

$$(1 + x^2) \cdot (1 + y^2) \cdot (1 + z^2) \quad \text{con} \quad 2x \cdot 2y \cdot 2z$$

El problema se reduce entonces a comparar entre sí cada término del primer producto con su correspondiente del segundo.

Representamos las gráficas de las funciones: $y_1 = 1 + x^2$ e $y_2 = 2\,x$ y las comparamos para los valores positivos de x.



Se ve claramente, que la parábola está por encima de la recta, salvo en el punto de abscisa x =1, para el que ambas ordenadas son iguales, por lo que (1,2) es un punto de tangencia de ambas gráficas.

Esto permite visualizar y, a continuación, generalizar la observación hecha a partir de los casos particulares considerados en el enfoque numérico, y concluir que la primera expresión es siempre mayor que la segunda, excepto en el caso x = y = z =1 en el que toman el mismo valor: 8.

Todas las representaciones gráficas, incluidas en este artículo, han sido realizadas con el Programa informático ***Graphmatica, versión 2.0c***.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo Editorial Ibero América.

De Las Fuentes, M.; Valdés, C. (2000). *Una alternativa gráfica para la resolución de desigualdades*. En http://www.mat.uson.mx/semana/Memorias%20XIII/de%20las%20Fuentes%20Lara.pdf.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Santiago de Cali. Colombia.

Dreyfus, T.; Eisenberg, T. (1990). On the reluctance to visualize in Mathematics. En *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematical Association of America, 25-37.

Filloy, E.; Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought (A clinical study with 12-13 years old). En *Proceedings of the Sixth Annual Conference for the PME*, North American Chapter (51-56), Madison, WI: University of Madison.

Filloy, E.; Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics*. 27 (1), 59-78.

Hoyos, V. (1998): *Revisitando la construcción de significado en torno a las ecuaciones lineales con dos incógnitas. Observaciones empíricas con estudiantes de 16-18 años de edad*, Investigaciones en Matemática Educativa II, Edición del 35 Aniversario del CINVESTAV, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hoyos, V. (1999). Conexiones entre dominios matemáticos distintos: El caso de la Geometría y el Álgebra básicas. En http://perl.ajusco.upn.mx/piem/inve99.html

Sfard, A.; Linchevski, L. (1991). Rules without reasons as processes without objects. The case of equations and inequalities. En *Proc. PME XV*, Assisi, II, 1-36.

Sfard, A.; Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. En *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Center for Teaching and Learning of Mathematics, V, 11, 149-156.