



DEL LENGUAJE NUMÉRICO AL ALGEBRAICO. PROPUESTA DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE PRIMARIA¹

María de las Mercedes Palarea Medina

Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

La formación inicial del profesorado de Educación Primaria se ve implicada en la actualidad en cambios curriculares, además de legislativos y organizativos. Los conocimientos matemáticos que tienen los futuros profesores no han sido contextualizados en situaciones de enseñanza (Fennema y Franke, 1992); es preciso, desde la formación del profesorado, abordar la citada reconstrucción desde esta nueva perspectiva.

En este trabajo se toman en consideración el “Análisis Didáctico” y los “Organizadores del Currículo” para presentar el lenguaje algebraico desde la perspectiva del paso del lenguaje aritmético al algebraico en un Programa de formación del profesorado de Educación Primaria.

Abstract

Preservice elementary teachers education is directly influenced by recent changes not only in mathematics curriculum but also in the legislation and embedded organization. The mathematical knowledge of future teachers needs to be contextualized in such a way that includes the new vision of those changes.

In this article, we take into account a “Didactic Analysis” and “Curriculum Organizers” to introduce the algebraic language based on a perspective that shows the transition from arithmetic to algebraic thinking as a part of a proposal for elementary teachers' education.

¹ Este trabajo ha sido financiado con cargo al Proyecto de Investigación: “El uso de diferentes sistemas de representación en la resolución de Problemas de Matemáticas”. Universidad de La Laguna. 2003.

Introducción

Los conocimientos matemáticos que han construido los alumnos de Magisterio no están contextualizados en situaciones de enseñanza (en el sentido de Fennema y Franke, 1992); por tanto, en la formación de profesores, es preciso abordar la citada reconstrucción desde esta nueva perspectiva. Es decir, “no se trata de proporcionarles formación de Matemática superior, sino de ahondar en los saberes de las Matemáticas que deben enseñar (Burgués, 1998)”.

Debemos, en consecuencia, potenciar al máximo la capacidad matemática de los alumnos, futuros profesores de Educación Primaria, en términos de conocimiento didáctico. En este sentido tratamos de aportar algunas reflexiones actuales, con el fin de justificar la inclusión de un tema relativo al inicio del Álgebra, en concreto desde la perspectiva del tránsito del lenguaje aritmético al algebraico. Coincidimos con Alsina y colaboradores en que, en el Programa de formación de un profesor de Educación Primaria, “El aprendizaje de las matemáticas debe ser gradual, sin saltos. El alumnado de primero de ESO no es radicalmente diferente al de sexto de primaria, porque los cambios son graduales; las rupturas de planteamiento educacional siempre han sido negativas” (Alsina y otros, 1996) y, por eso, el fin del tercer ciclo de Primaria, en el que también actuarán nuestros alumnos de la Diplomatura de Magisterio, futuros profesores de esta etapa educativa, es el momento adecuado para comenzar a impartir los conocimientos didácticos relativos al lenguaje algebraico que continuará trabajándose en la Secundaria Obligatoria.

Nos proponemos presentar la unidad temática titulada: “*Del lenguaje numérico al lenguaje algebraico*” en el marco de un programa de Formación de profesores de Educación Primaria. El punto de partida para la inclusión de esta unidad temática en un programa de formación de estos profesores lo constituye, sin duda, la reflexión sobre los resultados de diferentes investigaciones y

desarrollos curriculares; entre otros: los trabajos de los propios autores en lenguaje algebraico, en especial Palarea (1999); las diferentes pruebas aplicadas en distintas ocasiones a alumnos de Magisterio, cuyos resultados han sido comunicados en diferentes reuniones y congresos, desde las V JAEM en Castellón (Palarea y Socas, 1991) hasta los presentados en el VI Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), celebrado en Santiago de Compostela (Palarea y otros, 2002); o propuestas de desarrollos curriculares como las que aporta el NCTM (2000).

El Álgebra es considerada como una de las partes de las Matemáticas que más tiempo ocupa en los currículos, siendo fuente de una gran confusión y de las actitudes negativas de muchos alumnos; la enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar genera muchas dificultades al profesorado y a los alumnos y éstas son de naturaleza diversa.

Durante los últimos veinte y cinco años, aproximadamente, el interés por el estudio de estas dificultades ha sido enorme, tanto desde la perspectiva del investigador, como del profesor.

El Álgebra como materia escolar, se introduce a finales del siglo XIX en los niveles de Secundaria en los países europeos y americanos. Los contenidos y su secuencia han permanecido casi inalterables hasta la fecha. Muchos cursos iniciales de Álgebra en diferentes países empiezan con términos literales y su relación con referencias numéricas dentro del contexto, primero de expresiones algebraicas, y, más tarde, de ecuaciones. Después de un período breve en el que se realizan sustituciones numéricas en expresiones y ecuaciones, se trabaja la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones por métodos formales. De esta manera, la manipulación y factorización de polinomios y expresiones racionales, se convierten en actividades regulares. Eventualmente algunos programas incluyen funciones (lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) y sus representaciones algebraica, tabular y

gráfica. Se intercalan problemas verbales, que pretenden ser aplicaciones al “mundo real” de las técnicas algebraicas recién aprendidas. Estos contenidos son los que comúnmente aparecen en todos los libros de texto de Álgebra elemental (Kieran, 1992).

Los contenidos del Álgebra escolar han permanecido casi inalterables en el ámbito escolar y actualmente hay cierta unanimidad sobre las competencias del Álgebra en la escuela obligatoria, en el sentido de que ésta debe ocuparse del estudio de las “letras” o “variables” y de las propiedades que las relacionan; existen, en consecuencia, diferentes interpretaciones sobre las formas de alcanzar estas competencias en el lenguaje algebraico: aritmética generalizada, resolución de ecuaciones, funcional y estructural.

Desde el punto de vista del desarrollo del currículo de Álgebra, conviene resaltar que, por ejemplo, en la LOGSE, el Álgebra se contempla en el Diseño Curricular Base del Área de Matemáticas para la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) como un Bloque Conceptual dentro del Bloque I de “Números y Operaciones” (MEC, 1989), además de aparecer de manera transversal a lo largo de todos los Bloques Temáticos. Propone desarrollar:

a) Significado y uso de las letras para representar números (un número desconocido fijo, un número cualquiera, una relación entre conjuntos de números...). Fórmulas y ecuaciones.

b) Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas.

Los procedimientos están relacionados con la utilización de distintos lenguajes, con algoritmos y destrezas y con estrategias generales.

Constatamos igualmente en otras propuestas de cambio curricular, como la que se recoge en los Estándares del “National Council of Teachers of Mathematics” (NCTM), la necesidad de reconocer la importancia de una nueva pedagogía (Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991) como apunta la Norma 4: “Conocimiento de la Pedagogía de las Matemáticas” y

también la importancia de promover el Álgebra como disciplina que debe ser enseñada en los niveles K-12 (Curriculum and Evaluations Standards for School Mathematics, 1989). En concreto, los últimos estándares para Matemáticas escolares (NCTM, 2000) expresan, para los grados 3-5 (aproximadamente 8-11 años) que “aunque el Álgebra es una palabra que no se ha oído comúnmente en aulas de los grados 3-5, las investigaciones y las conversaciones incluyen con frecuencia elementos del razonamiento algebraico. Estas experiencias y conversaciones proporcionan contextos ricos para avanzar en la comprensión matemática y son también un precursor importante al estudio formalizado del Álgebra en los grados medio y secundario”. Proponen que se:

- identifiquen o construyan los patrones numéricos y geométricos.
- describan los patrones verbalmente y se representen con las tablas o los símbolos.
- busquen y apliquen las relaciones entre las cantidades que varían para hacer predicciones.
- hagan y expliquen las generalizaciones que parecen trabajarse siempre en situaciones particulares.
- utilicen los gráficos para describir patrones y para hacer predicciones,
- exploren las características del número.
- utilicen la notación inventada, los símbolos estándares y las variables para expresar un patrón, una generalización o una situación.

El currículo español que deriva de la LOGSE contempla ciertas ideas sugeridas por los estándares (NCTM, 1989 y 2000); en especial, porque permite, al valorar de manera concreta el tratamiento de la Matemática como un todo integral, la aportación del Álgebra con su carácter transversal como ejemplo específico dentro de la propia Área.

El Álgebra es considerada, en general, en los Sistemas Educativos, como una de las partes de la Matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo del alumno, situación que se ve favorecida por la potencia y

simplicidad de sus propios lenguajes y métodos. El estudio de las diferentes interpretaciones que se puede otorgar a las letras en el lenguaje algebraico, junto con el análisis didáctico del contenido curricular, tienen como objetivo que los futuros profesores conozcan el lenguaje algebraico desde la perspectiva de su enseñanza/aprendizaje, enfatizando tanto los aspectos sintácticos como los semánticos, al contrario de lo que se hacía en épocas anteriores, en las que se estudiaban los símbolos en sí mismos, sin tener en cuenta su significado ni las dificultades que su uso planteaba a muchos alumnos; se resalta especialmente el interés por tres procesos esenciales del lenguaje algebraico: sustitución formal, generalización y modelización (Ruano y Socas, 2001).

Consideramos que es de gran utilidad la reflexión sobre el lenguaje algebraico en el marco de una propuesta de formación del profesorado de Educación Primaria que permite enlazar los contenidos numéricos de la Primaria con la iniciación del Lenguaje Algebraico en la Secundaria Obligatoria. Esta relación la estableceremos desde una perspectiva que permita ampliar los contenidos del currículo de Matemáticas, de manera que su consideración no sea solamente desde la lógica interna de la disciplina, excesivamente restrictiva, formal y técnica, sino desde la dimensión curricular, perspectiva más abierta del saber matemático que se pretende enseñar. En este sentido organizamos este trabajo en los dos elementos básicos del desarrollo curricular: el análisis didáctico y los organizadores del currículo, que pasamos a detallar a continuación, para terminar con unas breves consideraciones didácticas.

Análisis didáctico y Organizadores del currículo

El término “**análisis didáctico**”, es empleado por algunos autores (Freudhental, 1983; Puig y Cerdán, 1988) para indicar “el análisis de los contenidos de las Matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos” (Puig, 1997).

Creemos que es útil y operativo para la teoría curricular conservar este

sentido del término análisis didáctico y diferenciarlo del término “organizadores del currículo”; en esa dirección, la propuesta que hacemos para caracterizar el término análisis didáctico de un “contenido matemático curricular” es considerar este análisis como el resultado que se obtiene al aplicar un procedimiento metodológico global en términos de la relación triádica: contexto, referente y significado, que estaría caracterizada de la siguiente manera:

El contexto quedaría determinado por un contenido matemático curricular (lenguaje algebraico) extraído del microsistema educativo objeto de la Didáctica de la Matemática.

El referente estaría determinado por la tríada: currículo, dificultades y errores, y representaciones semióticas.

El significado estaría determinado por las tres relaciones básicas: currículo-dificultades y errores, currículo-representaciones semióticas, y dificultades y errores-representaciones semióticas.

El estudio contextualizado de estos tres referentes y las relaciones básicas es lo que estamos considerando como Análisis Didáctico (Socas, 2001). En este caso vamos a considerar los tres referentes: Currículo, dificultades y errores, y representaciones semióticas, que resultan adecuados para analizar y comprender el contenido matemático curricular para la planificación y gestión posterior del proceso de enseñanza/aprendizaje.

El término “**Organizadores del Currículo**” de Matemáticas, es utilizado por Rico (1997), como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas”.

Los Organizadores del Currículo tienen la intención de organizar el tercer nivel de concreción curricular: las Programaciones de Aula.

Para el autor, los organizadores más relevantes son los siguientes:

- los errores, dificultades y obstáculos asociados a los conceptos y procedimientos de cada unidad que se han puesto de manifiesto en las

investigaciones;

- los diversos modos de representación de los conceptos y procedimientos;
- las modelizaciones usuales de los conceptos;
- los fenómenos de los que han surgido los conceptos como formas de organización así como las aplicaciones prácticas de los conocimientos;
- los materiales y recursos que puedan emplearse en la enseñanza;
- los aspectos históricos de interés;

a los que añade las orientaciones establecidas en los documentos curriculares editados por la Administración Educativa, la estructura de los contenidos específicos y su secuenciación, así como la bibliografía y los documentos necesarios para el diseño y su desarrollo. No cabe duda de que la noción de organizador es una noción amplia y abierta que permite añadir otros organizadores diferentes, o no explícitos en los mencionados por el citado autor; por ejemplo: las actividades, los tipos de tareas... o, a nivel más general, los mismos elementos del diseño curricular, es decir, objetivos, contenidos, metodología, evaluación, cuando éstos son considerados con el propósito de organizar Programaciones de Aula.

Lo que realmente es útil en la propuesta que hace el profesor Rico (1997), no es tanto un organizador u otro, sino la necesidad de entender que el profesor, aún conociendo la propuesta curricular, no posee la formación adecuada para realizar las adaptaciones curriculares correspondientes que le lleven desde el currículo a las programaciones de aula, puesto que el documento curricular en sí mismo no proporciona al profesorado información suficiente para utilizar de manera efectiva sus componentes (objetivos, contenidos, orientaciones metodológicas y criterios de evaluación) en la planificación y gestión de las programaciones de aula. No aporta, por ejemplo, elementos e información significativa para seleccionar, secuenciar y organizar los contenidos, ni criterios para valorar los logros en el aprendizaje, ni para el tratamiento adecuado de las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos, ni para gestionar el

trabajo en el aula, etc. Como señala Rico (1997) la estructuración del currículo en objetivos, contenidos, metodología y evaluación es adecuada para informar la propuesta curricular, pero es insuficiente en tareas de diseño y planificación del trabajo en el aula. Es necesario, en consecuencia, plantear nuevos conceptos o herramientas que faciliten de forma operativa el paso desde el currículo a las programaciones de aula.

De esta manera, los organizadores facilitan la planificación de unidades didácticas. Sin embargo, para Rico (op. cit.), de manera análoga, algunos de estos organizadores: errores y dificultades, modelos y representaciones, fenomenología del conocimiento matemático, materiales y recursos y evolución histórica del contenido, son elementos que a la vez que ofrecen la posibilidad de realizar un Análisis Didáctico de cada uno de los temas del currículo de Matemática, generan nuevos niveles de reflexión que deben considerar los profesores en aras a la planificación de unidades didácticas. Tanto para los organizadores como para los elementos del análisis didáctico encontramos justificación en el marco teórico general, que configura la Didáctica de la Matemática como disciplina científica y como asignatura en un plan de formación del profesorado. Son, por tanto, en estos campos del conocimiento, que fundamentan la Didáctica de la Matemática, en los que encontramos las fuentes y los elementos que conforman y dan sentido, tanto a la investigación como a la planificación de la enseñanza en esta Área.

No obstante, desde el punto de vista de planificación de la enseñanza de la Matemática conviene clarificar, si existen diferencias entre los elementos que configuran el análisis didáctico y los organizadores del currículo, a efectos especialmente, de precisar, por un lado estos constructos y, por otro, de hacerlos operativos que es, en definitiva, el objetivo para el que fueron propuestos.

En este sentido, proponemos asignar funciones diferentes a los elementos del análisis didáctico y a los organizadores del currículo. Nuestra propuesta es aplicar nuevamente un procedimiento metodológico global y considerar, en este

caso, tres referentes para los organizadores del currículo: contexto, enseñanza-aprendizaje y evaluación.

El estudio de estos organizadores básicos y los derivados de las relaciones principales permitirá planificar y gestionar el currículo en el tercer nivel de concreción o programaciones de aulas, a partir del análisis didáctico realizado previamente y que forman parte del primer referente de la tríada que denominamos contexto.

Proponemos utilizar los dos constructos anteriores: Análisis Didáctico y Organizadores del Currículo con caracterizaciones más precisas y con funciones diferentes en el paso de las propuestas curriculares a las programaciones de aula.

Los elementos del Análisis Didáctico: currículo, dificultades y errores y representaciones semióticas, son considerados como elementos de análisis del contenido curricular objeto de enseñanza, que facilita la comprensión de este contenido en términos de poder organizar una propuesta coherente de enseñanza/aprendizaje.

Los Organizadores del Currículo: contexto, enseñanza/aprendizaje y evaluación, serán elementos operativos que, enlazados con los anteriores, facilitan y proyectan la planificación y gestión del contenido curricular objeto de enseñanza/aprendizaje.

Esta propuesta que nos facilita un paso gradual desde el currículo a las programaciones de aula, y, en consecuencia, analizar un contenido matemático desde una propuesta de enseñanza/aprendizaje, se puede concretar en:

- Análisis y comprensión de un contenido de la propuesta curricular objeto de enseñanza/aprendizaje, en términos de los elementos del Análisis Didáctico.
- Planificación y gestión de las Programaciones de Aula de un contenido de la propuesta curricular, en términos de los Organizadores del Currículo.

Proponemos, en definitiva, un uso diferenciado de los elementos del Análisis Didáctico y de los Organizadores del Currículo; los primeros facilitan el análisis y comprensión de un contenido curricular objeto de

enseñanza/aprendizaje, mientras que los últimos facilitan la planificación y gestión de las Programaciones de Aula.

Análisis didáctico del lenguaje algebraico

Desarrollamos ahora cada uno de los elementos del análisis didáctico que hemos tomado en consideración: currículo, dificultades y errores y representaciones semióticas.

Currículo

El elemento currículo supone de hecho reorganizar el análisis general que se ha hecho del currículo de Matemática de toda una etapa educativa, por ejemplo, la Educación Primaria, y centrarnos en el contenido curricular que pretendemos organizar para la propuesta de enseñanza/aprendizaje. Ahora bien, si lo que consideramos es el Lenguaje Algebraico, que es un elemento de contenido de la ESO, el elemento currículo del análisis didáctico supone, en este caso, tomar del currículo de Matemática de la ESO todas aquellas referencias que se hacen en relación con este contenido.

En el caso concreto del Álgebra para la Educación Secundaria Obligatoria, se pueden tomar como referencias diferentes documentos: BOC (1994), BOC (1995), BOE (1991a), BOE (1991b), BOE (2001), o MEC (1989).

El elemento de análisis que denominamos currículo debe incluir un estudio de las capacidades o competencias matemáticas exigidas a los alumnos para superar los objetivos de una etapa o ciclo. Las capacidades como referente de la competencia matemática, representan, junto con la organización cognitiva de los conocimientos matemáticos en tres grandes campos: conceptual, procedimental y actitudinal, un papel esencial en el análisis y comprensión del contenido matemático curricular, lo que permitirá más tarde una conexión con los elementos organizadores del currículo a efecto de las Programaciones de Aula.

De manera general, debemos señalar que el referente currículo, en el

Análisis Didáctico, supone un análisis de los contenidos en las orientaciones oficiales en términos cognitivos: conceptos, procedimientos y actitudes, así como las consideraciones históricas, epistemológicas, fenomenológicas y prácticas que afectan a los contenidos curriculares que, a efectos de simplificar esta exposición, no desarrollamos en este apartado. Insistiremos, en este trabajo, en mostrar una propuesta global para la formación de profesores en el marco de la teoría curricular, y trataremos aspectos más específicos únicamente cuando formulemos las actividades.

Dificultades y errores

En el aprendizaje de las Matemáticas existen dificultades y obstáculos de procedencia y naturaleza variadas que dan lugar a errores observables en la actividad de los alumnos. Socas (1997) clasifica las dificultades en cinco categorías, debidas o asociadas a la complejidad de los conceptos matemáticos, a los procesos de pensamiento, a la enseñanza, al desarrollo cognitivo, y a las actitudes y emociones.

Estas dificultades también provienen de la existencia de obstáculos, que se pueden caracterizar como conocimientos anteriores resistentes al cambio (Brousseau, 1986). Los errores de los alumnos en Matemáticas forman parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje y están normalmente asociados a la existencia de las dificultades y obstáculos mencionados; se producen cuando el alumno proporciona una respuesta incorrecta a una tarea matemática. El interés del conocimiento de los errores por parte del profesor es evidente para entender la problemática de un conocimiento objeto de enseñanza. Los errores constituyen la base sobre la que se debe articular la enseñanza. Los trabajos de investigación en este campo se orientan a descubrir las áreas susceptibles de errores graves y desconocidos, a detectar dichos errores y a diseñar una enseñanza basada en el desarrollo de estructuras conceptuales que los eviten.

El elemento del análisis didáctico que hemos denominado “dificultades y

errores” pretende que el futuro profesor conozca, en líneas generales, algunos resultados de las investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes, en términos de dificultades y errores. Diferentes investigaciones que se desarrollan en el campo de la Educación Matemática van dirigidas al análisis de las dificultades y los errores que tienen los alumnos para adquirir los conocimientos matemáticos.

El profesor en formación deberá disponer, al hacer un análisis didáctico, de información sobre cuáles son los errores o conocimientos insuficientes que poseen los estudiantes sobre un tópico concreto, así como aquellos aspectos en los que van a tener una dificultad especial. Esto sugerirá posibles formas de ayudar a los alumnos a corregir dichos errores y superar alguna de estas dificultades.

Además, el profesor debe conocer formas de diagnóstico de esos errores y cómo articular modelos de intervención para superarlos. Esto último constituye un tema de investigación de actualidad.

El Análisis Didáctico en relación con las dificultades, los obstáculos y los errores en Matemáticas, se hará siguiendo el marco teórico descrito en Socas (1997).

El Álgebra escolar es considerada como una de las partes de la Matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo, por la potencia y simplicidad de sus registros formales y por sus métodos, pero su aprendizaje genera muchas dificultades a los alumnos. Estas dificultades, de procedencia distinta, se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos, mediante errores.

En relación con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del Álgebra, observamos como éstos operan a dos niveles: el nivel semántico (los signos son dados con un significado claro y preciso), y el nivel sintáctico (los signos pueden ser operados mediante reglas, sin referencia directa a ningún

significado). Son estos dos aspectos los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

En relación con las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento en Álgebra, también se observa que se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica del Álgebra y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento algebraico.

Los modos de pensamiento algebraico provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo: el saber algebraico.

Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos. Si se quedan implícitas, es muy difícil incorporar otro saber nuevo.

A título de ejemplo, podemos señalar, que cuando un modelo queda implícito constituye un conflicto para otros. Así por ejemplo a los modelos “ x^2 ”, “ \sqrt{x} ” o “ $1/x$ ”, se les suele aplicar las propiedades de linealidad:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, 1/(x + y) = 1/x + 1/y,$$

en las que este primer error adquiere más fuerza a causa de la analogía con la igualdad:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje del Álgebra tienen que ver con la institución escolar, con el currículo y con los métodos usados para su enseñanza.

Las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos tienen que ver con los estadios generales del desarrollo intelectual,

representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Álgebra que los alumnos son capaces de hacer.

En relación con las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales, sabemos de las dificultades de muchos estudiantes hacia el Álgebra, muchos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia dicha materia. Sin lugar a duda, muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de Matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas.

Un segundo elemento que tiene que ver con la organización de los errores son los obstáculos. El concepto de obstáculo fue introducido por primera vez por el filósofo francés Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales, bajo la denominación de obstáculo epistemológico.

Atendiendo a su causa, podemos caracterizar, a nuestro juicio, dos grupos de errores que se producen en el aprendizaje del Álgebra. Unos tienen su origen en un obstáculo, mientras que otros lo tienen en una ausencia de significado. Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas: una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos y de los procesos de pensamiento algebraico, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra. Estos tres ejes estarían determinados por: I) Errores que tienen su origen en un obstáculo; II) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido; y, III) Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales (Socas, 1997).

Aportaciones recientes al estudio de errores y sus orígenes relativas a los tres procesos básicos del lenguaje algebraico: sustitución formal, generalización y modelización se encuentra en el trabajo de Ruano y Socas (2001).

Representación semiótica

Las representaciones semióticas son el tercer elemento del Análisis Didáctico. Como señalan Janvier y Vergnaud (1994), el término representación

tiene un sentido amplio en Educación Matemática:

- “Situaciones o conjunto de situaciones físicas externas estructuradas, que pueden describirse matemáticamente englobando ideas matemáticas (representaciones físicas externas que van desde geoplanos a micromundos).
- Sistemas simbólicos externos estructurados. Incluyen sistemas lingüísticos, notaciones y constructos matemáticos formales, o aspectos simbólicos de entornos computacionales.
- Representaciones internas y sistemas de representación. Incluyen representaciones de ideas matemáticas (fracciones, razones, proporciones, funciones,... así como las más amplias teorías de representación cognitiva, desde el esquema de imágenes hasta la planificación heurística”.

Esta noción amplia de representación cubre los diferentes aspectos y situaciones dadas en un proceso de enseñanza/aprendizaje.

El papel de las representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas es importante, fundamentalmente, por dos razones: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; Vega, 1985). Sin embargo, los diferentes desarrollos del currículo del Álgebra han ignorado el enorme interés que los Sistemas de Representación Semióticos (SRS) tienen en la construcción del conocimiento algebraico y lo han considerado, en el mejor de los casos, como un añadido al proceso de conceptualización. Mas, en el aprendizaje del Álgebra, los SRS ocupan un lugar central en el que la habilidad para cambiar de registros constituye una capacidad matemática esencial.

Los objetos matemáticos no son accesibles por medio de la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata al contrario de lo que ocurre con los objetos comúnmente señalados como “reales” o “físicos”. Es necesario poder proporcionar representantes.

Los objetos matemáticos se representan por tanto, mediante los SRS y existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos; sin embargo, existe la preocupación entre los matemáticos y los profesores de Matemáticas para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas, es por ello por lo que se ha favorecido más los SRS formales que los SRS de naturaleza visual caracterizados también como representaciones intuitivas.

El dominio de un SRS formal es más una meta que un camino en la que aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo que se dan, hasta producir competencia, en su manejo:

1) Estadio semiótico: Los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos.

2) Estadio estructural: El sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo; aparecen en este estadio estructural verdaderas dificultades cognitivas que, al no ser explicadas por el sistema antiguo, obliga a recurrir a la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado.

3) Estadio autónomo: Los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior (Socas, 1997).

Este es el proceso de generalización de las Matemáticas y constituye una de sus características como parte inherente del desarrollo de sus signos. Es, por tanto, el sistema nuevo, una fuente de dificultades por el hecho de encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo, como es el caso del Álgebra. De ahí que insistamos en la necesidad del uso de diferentes sistemas de representación como fuentes de significado, en especial, el del objeto geométrico como un registro de representación semiótica del Álgebra.

En esta unidad temática podemos usar distintos modelos que se pueden expresar mediante diferentes representaciones de naturaleza analógica o digital:

de equilibrio, numéricos, analíticos, gráficos, geométricos ...

Las representaciones gráficas o geométricas aportan distintas representaciones visuales discretas o continuas que dan significado al lenguaje algebraico. Las conversiones entre diferentes lenguajes: habitual, gráfico, aritmético, geométrico y algebraico, facilitan los procesos de sustitución formal y generalización típicos del lenguaje algebraico en esta etapa educativa.

También son útiles diferentes materiales didácticos como tableros de fichas, balanzas, Puzzle Algebraico, dominós, barajas, diagramas, juegos de reglas para el Álgebra, tramas de papel punteado, palillos..., y recursos como la calculadora gráfica y determinados programas de ordenador.

Organizadores del currículo para el lenguaje algebraico

Pasamos a desarrollar cada uno de los elementos de los organizadores del currículo: contexto, enseñanza/aprendizaje y evaluación.

Contexto

A efectos prácticos, consideramos dos aspectos en el organizador “contexto”: “Situación inicial” y “Objetivos-contenidos”.

La situación inicial supone colocar la unidad de aprendizaje en las condiciones del Centro, Alumnos y Currículo, es decir, se retoman los elementos del análisis didáctico realizado con anterioridad y se sitúan en un centro y unos alumnos concretos.

El segundo apartado explicita el binomio objetivos/contenidos, que permite la reflexión anunciada del tránsito de lo aritmético a lo algebraico, y que pueden quedar caracterizados como sigue:

Objetivos

- Conocer la orientación curricular del Álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria y la importancia otorgada a los significados y al razonamiento algebraico en el tránsito de la Aritmética al Álgebra.

- Conocer distintas interpretaciones de las letras en Álgebra y su

transferencia al enfoque de enseñanza-aprendizaje.

- Reconocer generalidades en contextos aritméticos y geométricos.
- Representar situaciones y patrones numéricos con tablas.
- Representar situaciones y patrones numéricos con expresiones verbales.
- Representar situaciones y patrones numéricos con expresiones algebraicas.
- Representar situaciones y patrones numéricos con relaciones.
- Probar relaciones y regularidades sencillas.
- Reconocer igualdades algebraicas como expresión de propiedades generales de los números (conmutativa, asociativa y distributiva).
- Hacer traducciones entre los lenguajes habitual, numérico, algebraico y geométrico.
- Interpretar y expresar en lenguaje habitual expresiones algebraicas sencillas.
- Interpretar numéricamente expresiones sencillas escritas en forma simbólica.
- Determinar el valor numérico de una expresión algebraica sencilla.
- Interpretar geoméricamente expresiones sencillas escritas en forma simbólica.
- Construir tablas de valores a partir de una fórmula.
- Leer e interpretar fórmulas.
- Manipular (despejar incógnitas) fórmulas.
- Saber operar y simplificar expresiones algebraicas sencillas (monomios) con las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir y las propiedades distributiva y sacar factor común.
- Respetar la jerarquía de operaciones.
- Usar adecuadamente los paréntesis.
- Utilizar símbolos para expresar variables, regularidades, relaciones y enunciados verbales.

- Describir, ampliar y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos.
- Conocer modelos, recursos, materiales didácticos y representaciones semióticas para el trabajo inicial con el lenguaje algebraico.
- Analizar el desarrollo del Álgebra desde la perspectiva epistemológica y fenomenológica.
- Analizar los procesos de construcción del conocimiento algebraico.
- Potenciar una enseñanza/aprendizaje del Álgebra desde la perspectiva de la conexión entre diferentes contextos y la integración de varios sistemas de representación.
- Analizar la competencia algebraica deseable en el alumnado.
- Analizar las dificultades, los obstáculos y los errores que se presentan en la enseñanza/aprendizaje del lenguaje algebraico.

Contenidos

- Análisis de los momentos clave en el desarrollo histórico del Álgebra y su aplicación en la enseñanza/aprendizaje.
- El tránsito de la Aritmética al Álgebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.
- Características del lenguaje algebraico. Uso y significado de las letras. Diferentes enfoques del Álgebra.
- Estudio curricular del Álgebra. Énfasis en las diferentes fuentes de significado para el lenguaje algebraico.
- Dificultades, obstáculos y errores en Álgebra.
- Habilidades cognitivas (de carácter conceptual y operacional) y afectivas que mediatizan el desarrollo de la competencia algebraica.
- Reconocimiento de generalidades en los contextos aritmético y geométrico.
- Formulación algebraica de regularidades.
- Formulación algebraica de relaciones.

- Probar relaciones y regularidades.
- Generalización de propiedades numéricas.
- Expresión algebraica de enunciados de problemas, dados en lenguaje habitual o geométrico.
- Interpretación en lenguaje habitual de expresiones algebraicas sencillas.
- Interpretación de expresiones sencillas escritas en forma simbólica en contextos numéricos y geométricos.
- Lectura y manipulación de fórmulas en contextos geométricos y físicos.
- Reglas para desarrollar y simplificar expresiones algebraicas sencillas: suma y resta de monomios, producto de monomios, tratamiento de la propiedad distributiva y sacar factor común, y cociente de monomios.
- Resolución de ecuaciones de forma general $a x + b = c x + d$, en las que a, b, c y d son enteros.
- Modelos, representaciones semióticas, materiales didácticos, recursos, contextos y entornos informáticos para comunicar y pensar sobre el lenguaje algebraico.

Enseñanza/aprendizaje

A efectos prácticos, consideramos, nuevamente, dos aspectos en el organizador “Enseñanza/aprendizaje”: “Recursos y organización espacio-temporal” y “Proceso de enseñanza/aprendizaje: actividades”.

En relación con los recursos y la organización espacio-temporal, señalamos, a modo de ejemplo, que los recursos se organizan en torno a los siguientes elementos:

- Guiones de trabajo y documentos elaborados por el profesor.
- Análisis didáctico: bibliografía básica recomendada.
- Análisis de la enseñanza y el aprendizaje: cuadernos, controles y producciones de alumnos de Educación Primaria y de Magisterio relacionados con el tema.
- Planificación: esquema de una unidad didáctica.

- Modelos y materiales didácticos.
- Audiograbaciones del trabajo desarrollado en el aula.
- Vídeograbaciones de entrevistas clínicas con protocolos sobre aspectos concretos relacionados con el proceso de enseñanza/ aprendizaje del contenido del tema.

El proceso de enseñanza/aprendizaje que se propone para desarrollar este tema tiene en sí un fin formativo, es decir, aspira a ser un modelo metodológico de enseñanza para los futuros docentes.

Para el desarrollo de la clase, al iniciarse el desarrollo del tema cada uno de los alumnos dispondrá del currículo oficial básico, así como de la bibliografía necesaria aportada por el profesor en forma de fotocopias o indicada para su búsqueda.

Cada estudiante construye su propio conocimiento didáctico en un proceso individual y social; por eso es imprescindible la reflexión individual y las interacciones con los compañeros. Cada alumno dispondrá de su propio material.

Además se realizará una evaluación de diagnóstico para confirmar las creencias y concepciones previas respecto a los lenguajes aritmético y algebraico.

A continuación indicamos, a modo de ejemplo, diferentes elementos indicados para facilitar la construcción del conocimiento didáctico:

- Lectura de documentos de historia del Álgebra que muestran aspectos significativos de su construcción.

Estas lecturas proporcionan a los alumnos aspectos significativos de su construcción y les informan de dificultades y obstáculos que se han dado en la construcción de este conocimiento y de las diferentes representaciones semióticas en la que los aspectos semánticos y sintácticos suponen un papel clave en la construcción y desarrollo de este lenguaje algebraico. Estos documentos se seleccionarán de libros, revistas y de Internet. También se les

planteará la reflexión sobre el Informe Cockcroft (1985) y los Estándares del NCTM (1989, 2000) en lo relativo al Álgebra.

- Contestar pruebas o cuestionarios relacionados con el Álgebra y en especial con el lenguaje algebraico y analizarlas junto a las de autores como, Palarea (1999) o Trigueros y otros (1996).

- Enseñar estrategias de adquisición de habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual en el tratamiento del Álgebra.

El conocimiento de las habilidades de los dos tipos, así como de las estrategias para su adquisición, facilitará en gran manera la comprensión del lenguaje algebraico.

- Asimismo se enseñará a detectar regularidades y patrones, así como a generalizar mediante el material entregado para ello.

- Se plantearán, con ejemplos, dificultades, obstáculos y errores más comunes existentes en el tratamiento del Álgebra escolar.

- Reflexión acerca de los contenidos de Álgebra escolar implicados en el proyecto SMP y de trabajos de profesores en activo.

Como ejemplo de actividades seleccionamos las siguientes:

- 1) Utilizando los textos de (Socas y otros, 1989) y de Kieran (1992), los alumnos deben realizar un breve análisis histórico del desarrollo de las tres etapas del Álgebra y su simbolismo.

Se pondrá énfasis en las tres etapas: retórica, sincopada y simbólica, en la evolución del álgebra y su simbolismo. Se relacionarán estas tres etapas con los estadios de desarrollo cognitivo de los signos matemáticos (Socas, 1997).

- 2) Estudio de un material de desarrollo curricular del Álgebra, entre otros, Palarea (1999), SMP (1985), Socas y otros (1989), Grupo Azarquiel (1993) o Coriat y otros (1994).

Este trabajo ayudará a comprender las propuestas y secuencias didácticas para expresiones algebraicas y ecuaciones.

3) Leer documentos en los que se recogen conocimientos didácticos relacionados con el Álgebra y más específicamente con el lenguaje algebraico: Revistas (Números, Suma, Aula, Cuadernos de Pedagogía, Uno...), Libros (Orton, 1990; Alsina y otros, 1996; Pimm, 1990), los Estándares del NCTM (1989, 1991, 2000)...

4) Discutir y analizar la posición en el currículo del inicio del Álgebra en la escuela.

Se utilizarán los documentos del MEC (1989, 1992) relativos a la LOGSE, la LOCE (BOE, 2002) o los Estándares del NCTM (2000).

5) Cada grupo de estudiantes elige un recurso o material para la enseñanza del Álgebra (balanza, área de rectángulos, tableros de fichas de colores, juegos, software, Puzzle Algebraico, entre otros), hace un informe del mismo y lo presenta al resto de compañeros.

En el análisis se deberá especificar la descripción del material o recurso elegido, los objetivos didácticos que se pueden conseguir con él, las actividades contextualizadas que pueden realizarse con el material o recurso y una crítica del mismo.

6) Se presentan respuestas erróneas de alumnos de distintos niveles educativos. Los estudiantes en grupo de trabajo analizan e identifican las causas de los errores y proponen formas para tratar de superarlos.

Las respuestas de los alumnos se pueden tomar del Grupo Azarquiel (1993), Socas y Palarea (1997), Palarea (1999) y Palarea, Hernández y Socas. (2001). Los errores son analizados desde la perspectiva descrita en Socas (1997) y los alumnos han de intentar proponer formas de actuación para corregirlos.

Junto al trabajo descrito en las actividades anteriores en el desarrollo de la unidad temática se irá incluyendo otro tipo de actividades, que incide fundamentalmente en la utilización por parte de los alumnos de capacidades específicas en diferentes representaciones semióticas, en relación con el lenguaje algebraico como son, por ejemplo:

- Expresar igualdades de cantidades con números y símbolos (Socas y otros, 1989).
- Pasar de un enunciado verbal a la representación simbólica mediante el uso de un material didáctico: balanza... (Socas y otros, 1989, 1993).
- Pasar de un enunciado verbal a su expresión simbólica mediante el uso de diagramas y plantear ecuaciones de primer grado con una incógnita y de segundo grado.
- Resolver ecuaciones de primer grado de las formas $a + x = b$ y $a x = b$ y $ax + b = c$, mediante diagramas y con cartulina y fichas bicolores (Socas y otros, 1989, p. 197-199).
- Resolución de ecuaciones de segundo grado de las formas $x^2 = a$, $x^2 + a = b$ y $x^2 + a x + b = 0$ con el modelo propuesto en (Socas y otros, 1989, p. 200 y siguientes) y con su inversión.
- Uso de pasatiempos algebraicos: Cuadrados mágicos, Crucigramas algebraicos, Ruedas algebraicas, Círculos algebraicos, Estrellas algebraicas, Dominós algebraicos, Chinchón algebraico (García, 1998).
- Juegos de adivinar números, con tarjetas de preguntas y respuestas, Juego de preparación de resolución de ecuaciones (Aizpún, 1986).
- Representación y uso de los objetos algebraicos mediante el Puzzle algebraico (Socas, 2000 a y 2000 b).
- Actividades para el acercamiento a la generalización utilizando bordes, palillos, fichas, superproblemas (Friedlander, 1996).
- Actividades con las Regletas de Cuisenaire.
- Visualizaciones: Demostración de la distributividad, igualdades notables, operaciones con monomios...
- Actividades de plegado de papel.
- Viñetas de apoyo en traducción de lenguajes.
- Utilización de planos o fotografías para relacionar el Álgebra con la medida.

Evaluación

A efectos prácticos, consideramos, igualmente, dos aspectos en el organizador “Evaluación”: “Capacidades y criterios” y “Evaluación del alumno y de la Unidad Temática”.

De manera muy breve podemos señalar que esperamos que los alumnos en formación sean capaces de:

- Realizar en grupo una secuencia de actividades relacionadas con la unidad temática.
- Hacer un informe de un material didáctico.
- Enunciar algunos ítemes para un test de Álgebra.
- Realizar un listado de recursos que pueda ser útil para un primer acercamiento al Álgebra escolar.
- Realizar un comentario acerca de su actitud hacia el Álgebra, antes y después de la instrucción, (éste no será evaluado cuantitativamente).

Implicaciones didácticas

El conocimiento profesional que debe poseer el profesorado de Educación Primaria para desarrollar con garantías las demandas del currículo, supone, entre otros muchos aspectos, adquirir habilidades específicas que le permitan diseñar, desarrollar y evaluar unidades de intervención en el aula.

La propuesta metodológica de formación de profesores que se considera, tomando como ejemplo el Lenguaje Algebraico, concede prioridad a las actividades prácticas con la participación activa de los alumnos, proporcionándoles una información, lo más clara posible, de los medios que pueden utilizar. Éstos se concretan en los dos esquemas de análisis desarrollado: la tríada de elementos del Análisis Didáctico y la tríada de los Organizadores del currículo, que permiten concretar, de manera operativa, las unidades de intervención en el aula.

Referencias bibliográficas

- Aizpún, A. (1986). Preparación a la resolución de ecuaciones lineales en EGB. *Informes de las IV Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*, pp. 157-167.
- Alsina, C. y otros (1996). *Enseñar Matemáticas*. Barcelona: Graó.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico. México: Siglo Veintiuno).
- BOC (1994). *Decreto 310/1993 de 10 de Diciembre*, que establece el currículo de la ESO en la Comunidad Autónoma de Canarias (BOC, núm. 12, de 28 de Enero de 1994).
- BOC (1995). *Resolución de 23 de junio de 1995*, de la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, por la que se establecen orientaciones para la elaboración de la secuencia de contenidos y criterios de evaluación para los dos ciclos de la Educación Secundaria Obligatoria (BOC, núm. 96, de 26 de Julio de 1995).
- BOE (1991a). *Real Decreto 1007/1991, de 14 de Junio*, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- BOE (1991b). *Real Decreto 1345/1991 de 6 de Septiembre*, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (BOE, núm. 220).
- BOE (2001). *Real Decreto 3473/2000, de 29 de Diciembre*, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (BOE, núm. 14, de 16 de enero de 2001).
- BOE (2002). *Ley orgánica 10/2002, de 23 de Diciembre. Ley Orgánica de Calidad de Educación LOCE*, por la que se establece el marco general de los distintos aspectos del sistema educativo que inciden de modo directo en al calidad de la educación.
- Burgués, C. (1998). Aportación de la didáctica de las matemáticas a la formación profesional de los futuros maestros y maestras. *Uno*, 17, 31-35.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 33-115.
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.
- Coriat, M. y otros (1994). *Matemáticas*. Educación Secundaria Obligatoria. Sevilla: Algaida, Proyecto 2000.
- Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 147-164. Reston, Virginia: NCTM.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel. Publishing Company. Dordrecht. Holland.
- Friedlander, A. (1996). Superproblemas del álgebra en hojas de cálculo *Uno*, 9,

71-75.

- García, A. (1998). Los juegos de conocimientos: un recurso para enseñar matemáticas. *Uno*, 18, 47-71.
- Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Janvier, C. y Vergnaud, G. (1994). The PME Working Group on Representations. *Proceedings of the 18th International, for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 8). Lisboa: Universidad de Lisboa.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- MEC (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas*. Madrid: Servicio de publicaciones del MEC.
- MEC (1992). *Secundaria Obligatoria. Matemáticas (Cajas Rojas)*. Madrid: MEC.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. (Traducción al castellano: *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM, Thales, 1991).
- NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston. VA: NCTM.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: MEC-Morata.
- Paivio, A. (1978). Mental Comparisons involving abstract attributes. *Memory and Cognition*, 6, pp. 199-208.
- Palarea, M. M. (1999). "La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años". Tesis Doctoral. La Laguna. Tenerife.
- Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1991). Enseñanza de resolución de ecuaciones y expresiones algebraicas, mediante la yuxtaposición de sistemas de representación. *Actas V JAEM. Castellón (en prensa)*.
- Palarea, M. M., Hernández, J. y Socas, M. M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de maestros. En M. M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III*, pp. 213-226. La Laguna: CAMPUS.
- Palarea, M. M. y otros (2002). Estudio sobre habilidades básicas en Matemáticas de alumnos de Magisterio. *Actas VI Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Santiago de Compostela.

- Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. Routledge & Kegan: Londres. (Trad. cast.: 1990, P. Manzano, *El lenguaje matemático en el Aula*. Ministerio de Educación y Ciencia y Ediciones Morata: Madrid).
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI.
- Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4º de ESO. En M. M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III*, pp. 115-125. La Laguna: CAMPUS.
- SMP (1985). *School Mathematics Project, 11-16*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI.
- Socas, M. M. (2001). Enseñanza de la matemática escolar. Diversidad e interacción. En L. Rico (Ed.), *Currículo de matemática para la enseñanza obligatoria: innovaciones en la década de los 90*. Capítulo IV. Madrid: Síntesis. Colección: Educación Matemática en Secundaria. (Pendiente de Publicación).
- Socas, M. M. y otros (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Socas, M. M. (2000a). Álgebra para todos. Análisis de un material didáctico: Puzzle Algebraico. En M. M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática II*, pp. 299-330. La Laguna:
- Socas, M. M. (2000b). *Guía del Puzzle algebraico*. La Laguna: Campus.
- Socas, M. M. y otros (1993). Juegos de estrategia y resolución de problemas en los Diseños Curriculares Base de Matemáticas. En E. Santana (Ed.), *Actas de las III Jornadas Didácticas de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB* (pp. 177-220). Las Palmas: Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Socas, M. M. y Palarea, M. M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en Álgebra escolar. *UNO*, 14, 7-24.
- Trigueros y otros (1996). *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (3) 351-363).
- Vega, M. (1985). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza.