



GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este trabajo se estudia la generalización del teorema de Pitágoras debida a Pappus de Alejandría (s. III), la de Thabit ibn Qurra (s. IX) y la más reciente referente a figuras semejantes. Al final, como divertimento, se hacen algunas prolongaciones arborescentes de dicho teorema.

Abstract

In this paper, we study the extension of the theorem of Pythagoras by Pappus of Alexandria (3rd century), the other one by Thabit ibn Qurra (9th century) and the most recent relating to similar figures. At the end, as entertainment, we make some arborescent prolongations of the aforesaid theorem.

Introducción

Tal como se ha especificado en el resumen, trataremos de recordar la magnífica generalización del teorema de Pitágoras hecha por Pappus de Alejandría. A la vez, se estudian los diversos casos que puedan presentarse.

Seguiremos con la de Thabit ibn Qurra, que, como veremos, considera solamente cuadrados trazados sobre dos de los lados de un triángulo cualquiera. A continuación, estudiaremos, de un modo casi exhaustivo, lo que sucede con tres figuras, semejantes entre sí, cuando sus áreas están relacionadas con los lados de un triángulo cualquiera.

Terminaremos haciendo algunas prolongaciones arborescentes del teorema de Pitágoras, inspirándonos en una construcción que aparece en *Matemática nella realtà*, página 58, de Emma Castelnuovo y Mario Barra.

Pappus de Alejandría (s. III)

En el libro IV de la *Colección (Synagoge)* de Pappus podemos ver el siguiente teorema: Si en dos lados de un triángulo cualquiera ABC (Fig. 1) se construyen dos paralelogramos AEDB y ACGF, en el tercer lado se puede construir otro paralelogramo que sea equivalente a la suma aquellos.

La construcción es muy sencilla. Basta con prolongar los lados DE y FG de los paralelogramos arbitrarios, unir el punto P con el vértice A y trazar las paralelas respectivas a AP por B y C para obtener el paralelogramo equivalente BCC'B'. La demostración es evidente, pues los triángulos ABC y PB'C' son iguales por paralelismo, lo mismo sucede con las parejas de triángulos BB'D, APE, y CGC', AFP. De este modo es fácil ver que BCC'B' queda totalmente cubierto por BAED y CGFA. Para mayor claridad en el relleno se ha trazado su simétrico respecto de BC.

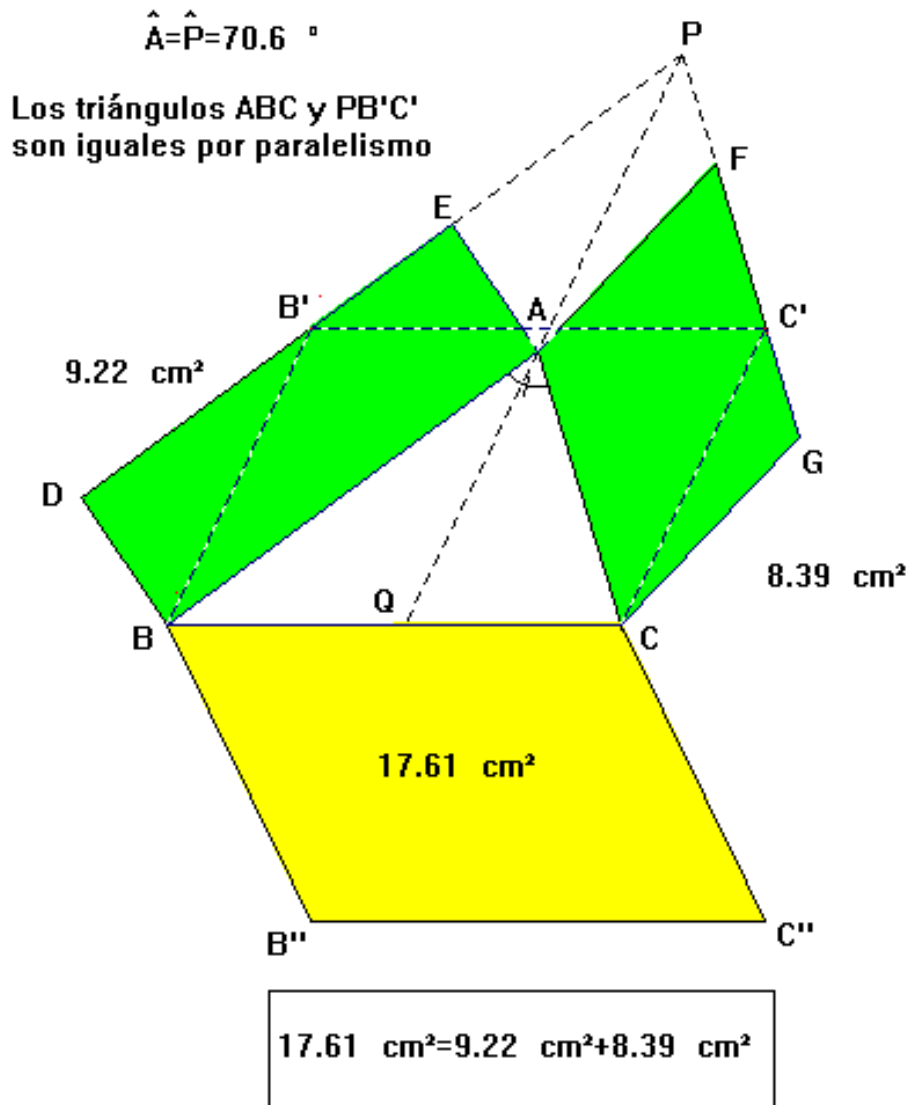


Fig. 1

Aclararemos que nos hemos auxiliado del *Cabri II*, como haremos en lo sucesivo, no sólo para confeccionar la figura, sino también para determinar las áreas de las figuras poligonales (en este caso paralelogramos).

Seguidamente estudiaremos distintos casos particulares, atendiendo a la forma de los paralelogramos y a los valores del ángulo A.

- ◆ Que los dos paralelogramos sean cuadrados:

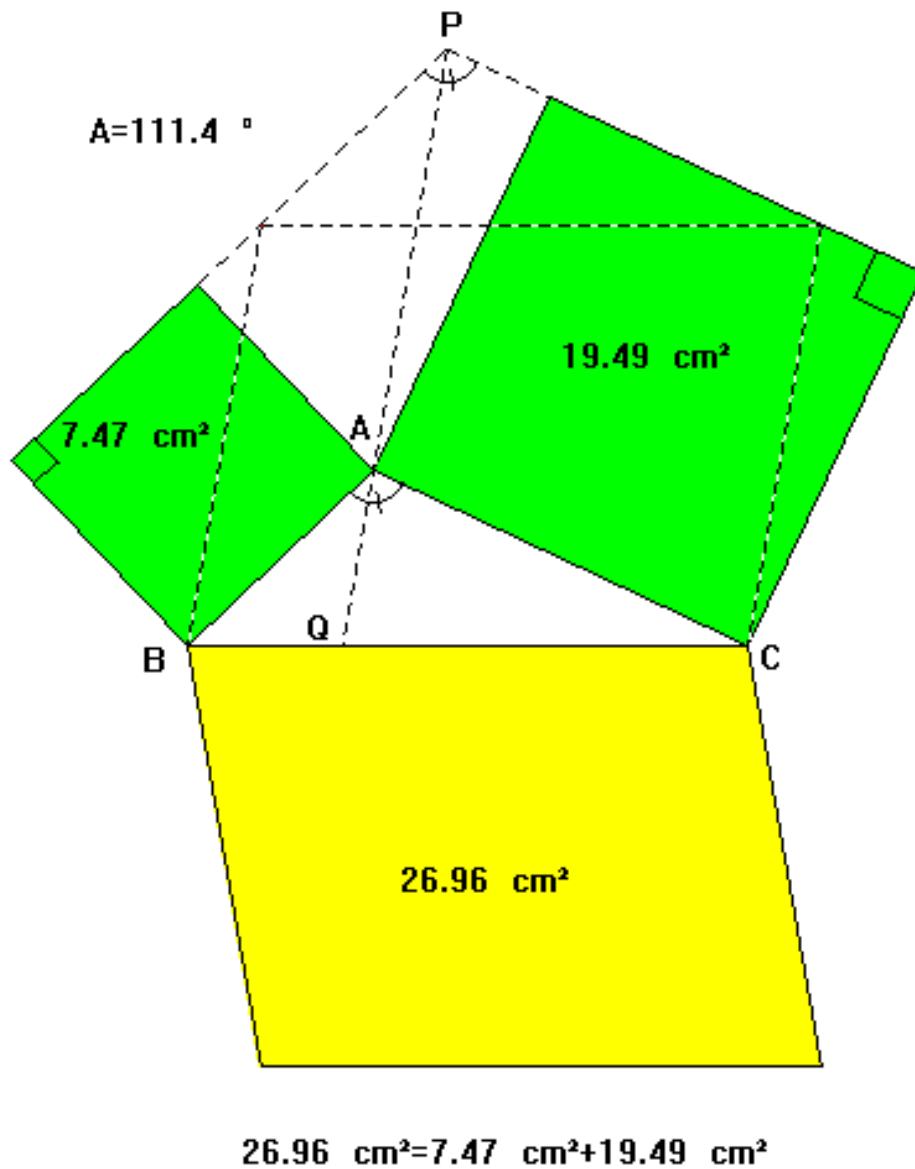


Fig. 2

La figura 2 nos pone de manifiesto que el paralelogramo resultante no es un cuadrado aunque lo sean los dos de partida.

- ◆ Que los dos paralelogramos de partida sean cuadrados y $A=90^\circ$

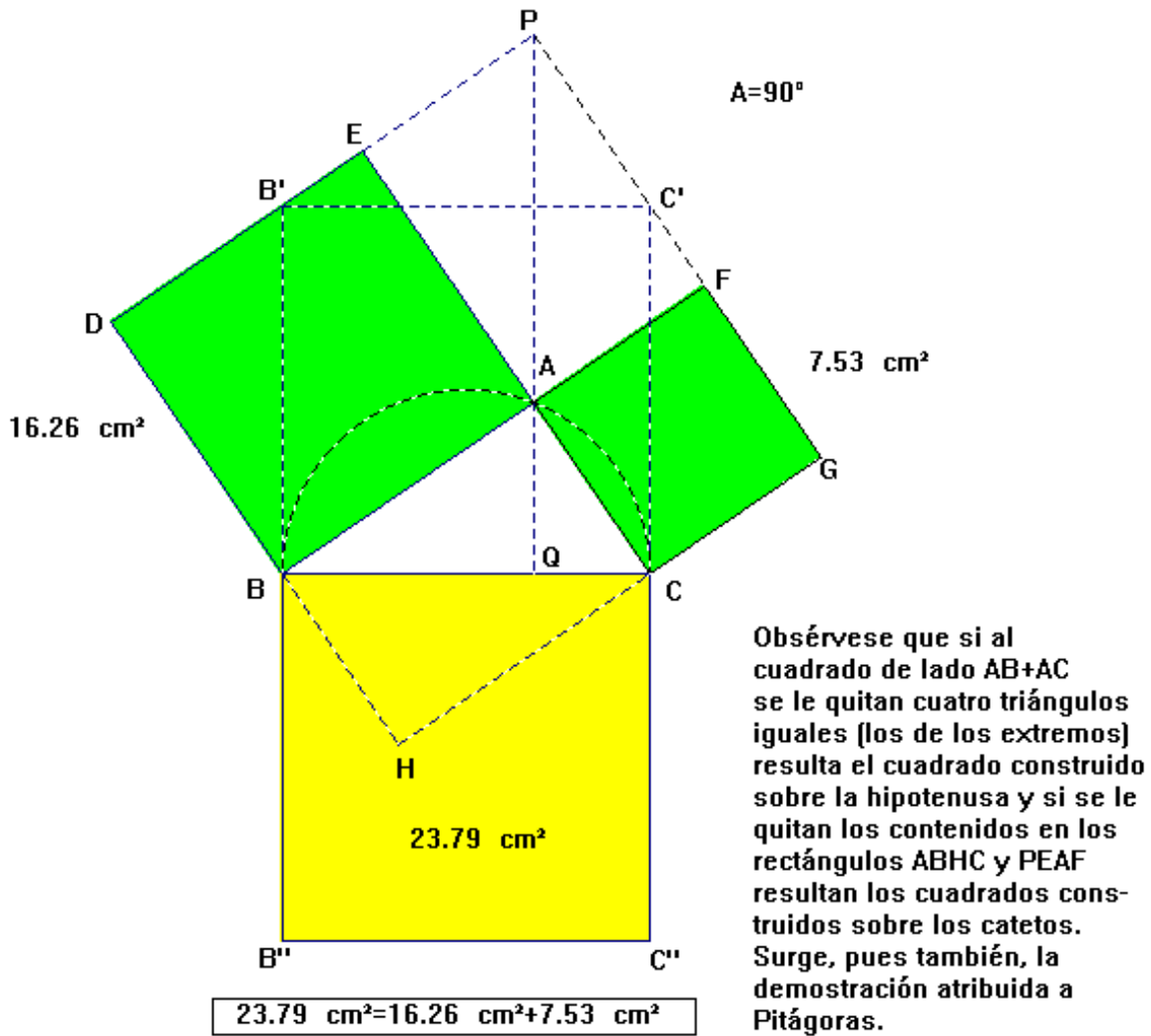
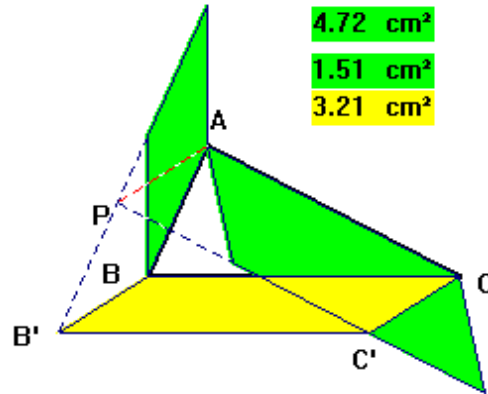


Fig. 3

En este caso aparece el conocido teorema de Pitágoras como caso particular del teorema de Pappus.

Asimismo, en el margen derecho de la figura adjunta se da una bella demostración geométrica de dicho teorema, precisamente la que se le atribuye a Pitágoras.

- ◆ Estudiemos ahora el caso en que uno de los paralelogramos se construya hacia el interior del triángulo.



$BB'C'C = \text{Diferencia de paralelogramos}$

Fig. 4

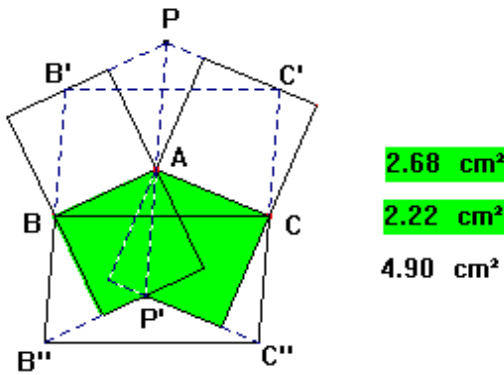


Fig. 5

Como se puede observar en la figura 4, el paralelogramo resultante tiene por área la diferencia de las áreas de los dos paralelogramos de partida.

Pero en la figura 5, los dos paralelogramos están construidos hacia el interior del triángulo, y el paralelogramo resultante es suma de las áreas de los dos de partida.

Por tanto, podemos concluir que el área del paralelogramo resultante, independientemente del sentido en que se construyan los de partida, es siempre la suma *algebraica* de sus áreas.

Thabit ibn Qurra (826-901)

El matemático árabe, Thabit ibn Qurra, hace también una generalización del teorema de Pitágoras. En la parte superior de la figura 6, se da una demostración de ella.

Bastará con llevar sobre A los ángulos C y B, para construir los triángulos ABE y AFC semejantes al ABC. Se deduce de inmediato la equivalencia de los cuadrados de lados b y c con los respectivos rectángulos FF'C'C y BB'E'E. Sólo si $A=90^\circ$ los rectángulos se unirán; pero, si es menor se solaparán.

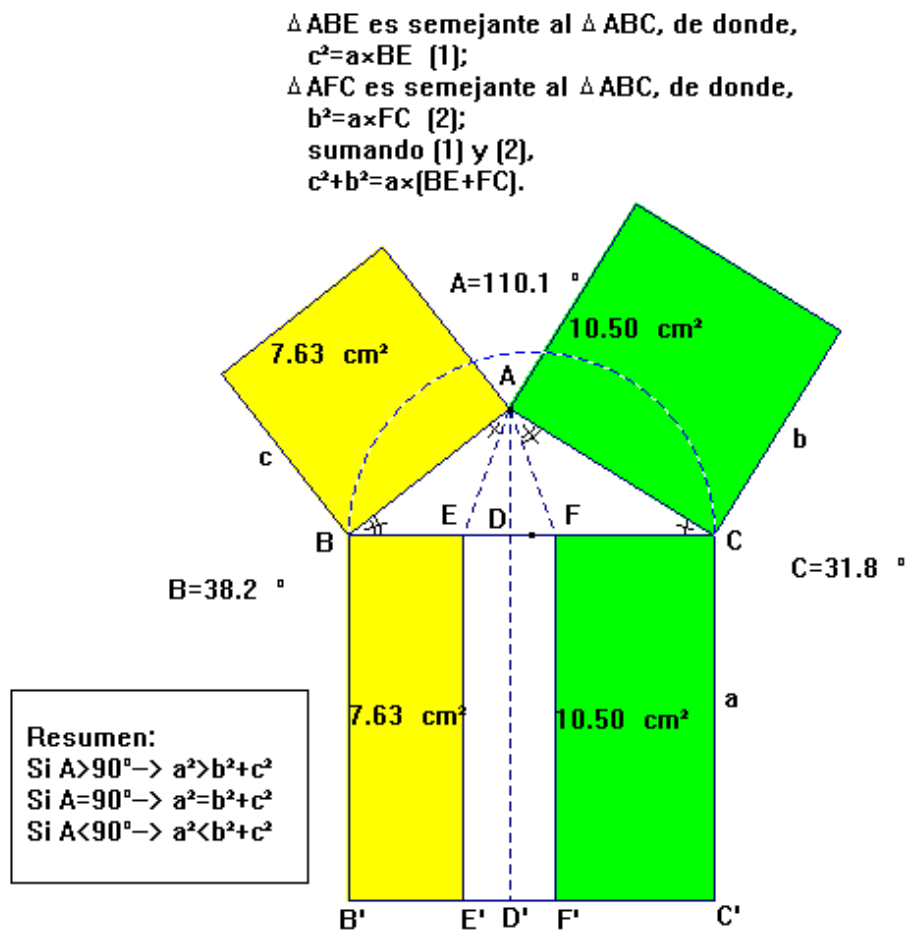
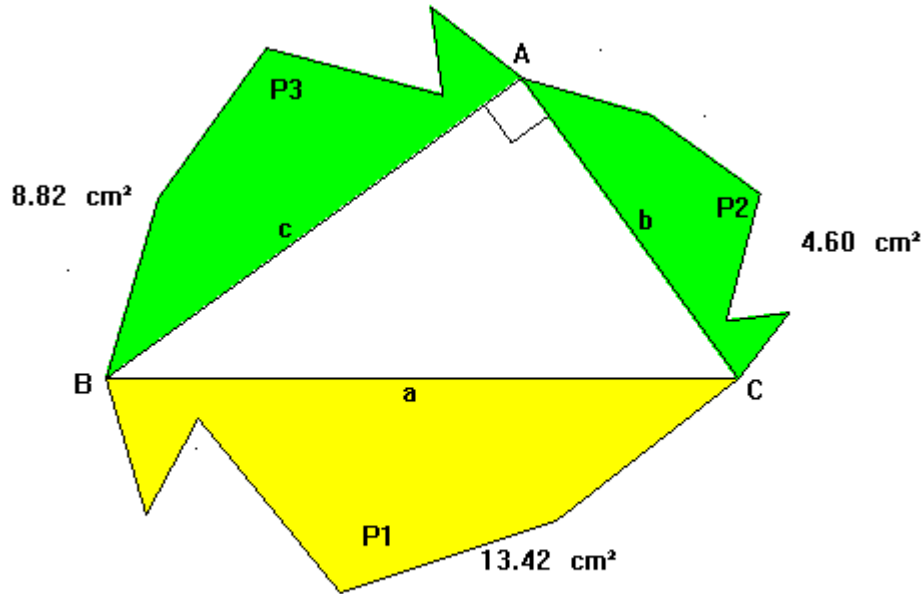


Fig. 6

Polígonos semejantes construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo



$$13.42 \text{ cm}^2 = 8.82 \text{ cm}^2 + 4.60 \text{ cm}^2$$

Fig. 7

El hecho de que la razón de las áreas de dos polígonos semejantes sea igual al cuadrado de la razón de semejanza nos autoriza a escribir lo que sigue (Fig. 7):

$$\frac{\text{Área}(P_1)}{a^2} = \frac{\text{Área}(P_2)}{b^2} = \frac{\text{Área}(P_3)}{c^2} = \frac{\text{Área}(P_2) + \text{Área}(P_3)}{b^2 + c^2} \quad (1)$$

y como $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene: $\text{Área}(P_1) = \text{Área}(P_2) + \text{Área}(P_3)$

Por tanto, el área del polígono construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos, siempre y cuando se cumpla la condición (1).

Distintos casos que puedan presentarse:

- ◆ Los lados homólogos de los polígonos semejantes no coinciden en su totalidad con los lados del triángulo (Fig. 8)

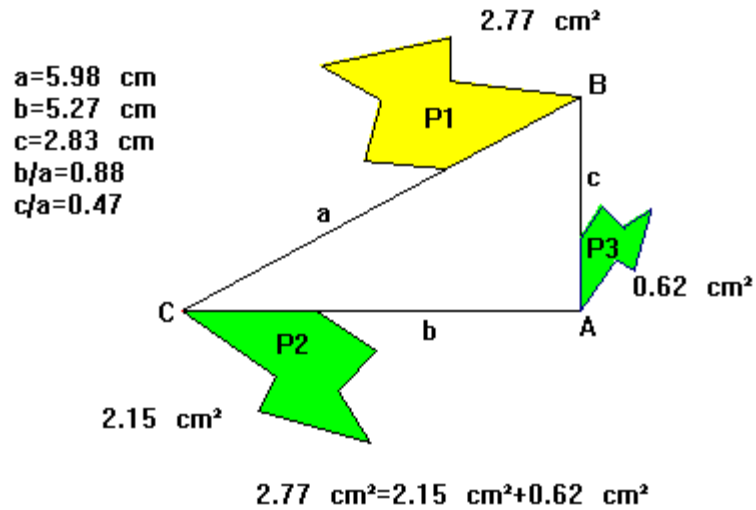


Fig. 8

- ◆ Que puedan tener con el triángulo sólo un punto común (Fig. 9)

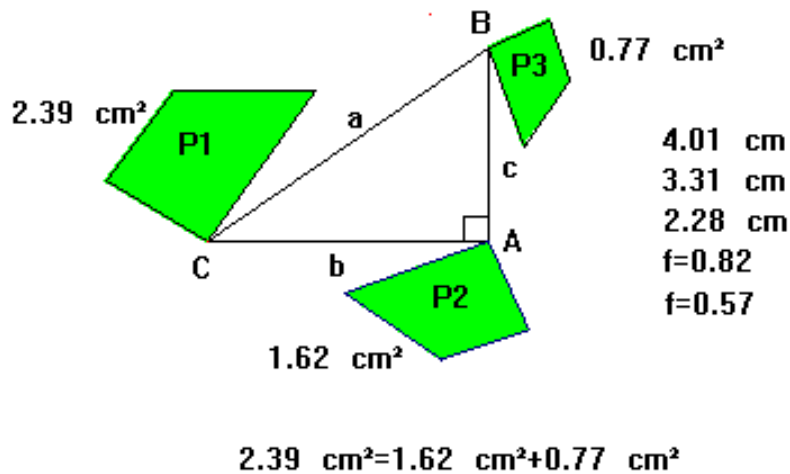


Fig. 9

- ◆ O incluso ninguno (Fig. 10)

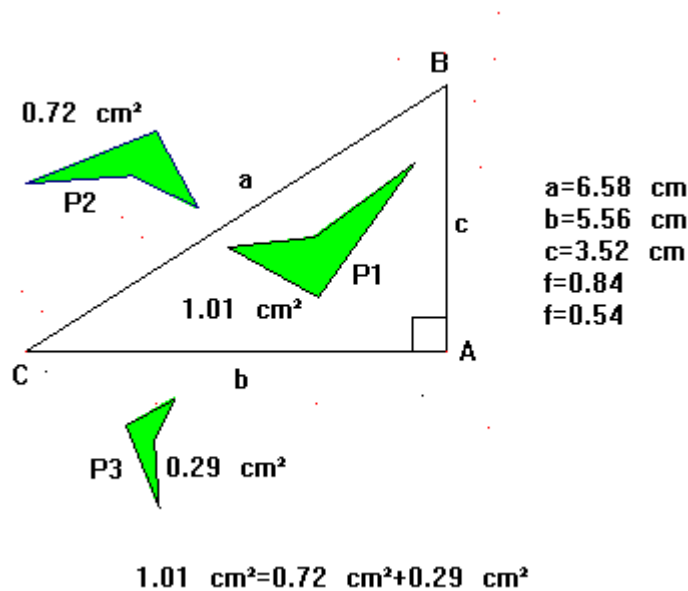


Fig. 10

Lógicamente, estos polígonos semejantes tendrán que estar relacionados con los lados del triángulo ABC. De P_1 se ha pasado a P_2 y P_3 mediante las respectivas reducciones b/a y b/c .

Figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo

Como sobre el contorno de una figura cualquiera podemos inscribir un polígono cuyo número de lados sea suficientemente grande, no cabe duda de que, cuando este número crezca indefinidamente, la línea poligonal tenderá al contorno de dicha figura; por lo que, podemos aplicar lo dicho hasta ahora a figuras no poligonales. Si bien es verdad que las áreas que da el *Cabri II* son las de polígonos inscritos en ellas.

A modo de ilustración presentaremos un par de ejemplos (Fig. 11 y 12):

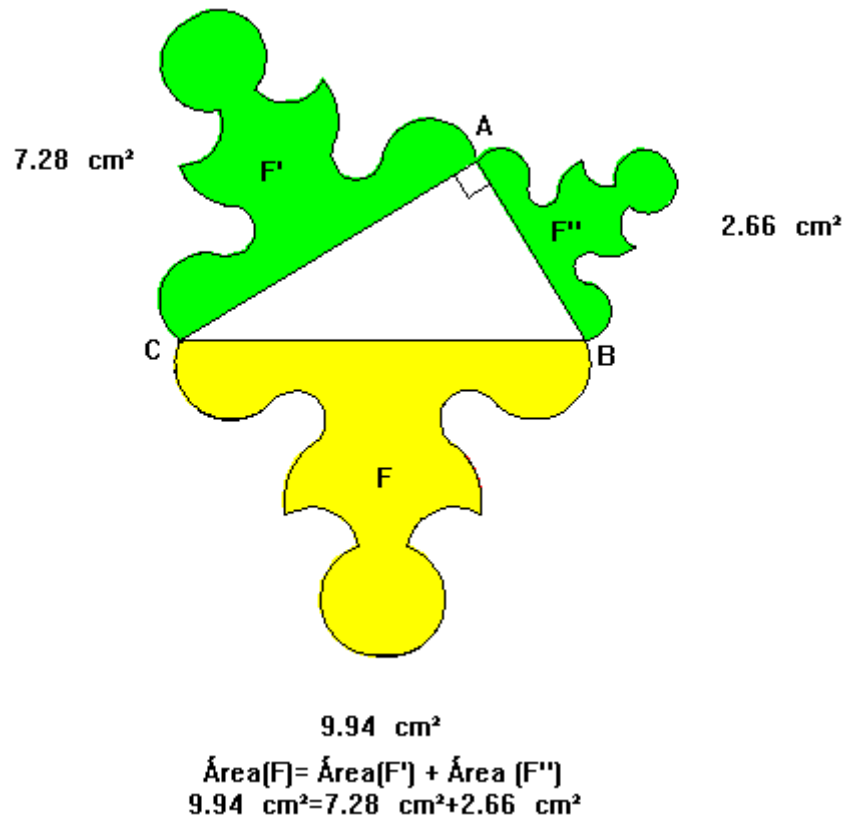


Fig. 11

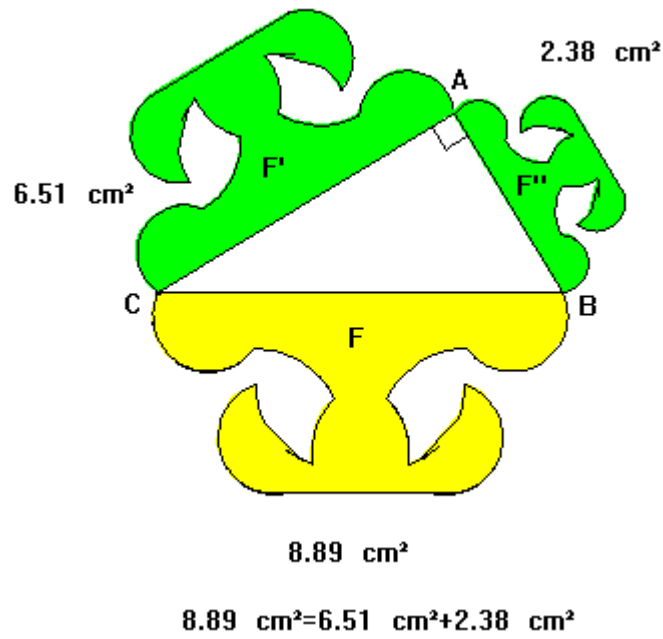


Fig. 12

Polígonos semejantes construidos sobre los lados de un triángulo cualquiera

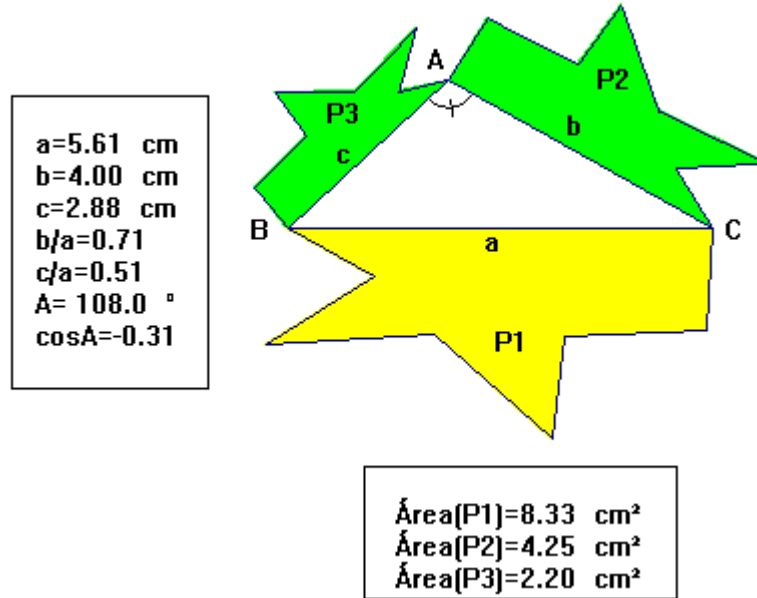


Fig. 13

Las tres figuras semejantes de la figura 13, en las que a , b y c son lados homólogos, nos permiten escribir:

$$\frac{\text{Área}(P_1)}{a^2} = \frac{\text{Área}(P_2)}{b^2} = \frac{\text{Área}(P_3)}{c^2} = k^2,$$

y sustituyendo los valores de a , b y c en el teorema del coseno resulta la fórmula (2)

$$\text{Área}(P_1) = \text{Área}(P_2) + \text{Área}(P_3) - 2\sqrt{\text{Área}(P_2)}\sqrt{\text{Área}(P_3)} \cos A, \quad (2)$$

que podemos considerar como una generalización más del teorema de Pitágoras. Como es evidente, para $A = 90^\circ$ resulta la fórmula (1) ya demostrada.

En nuestro ejemplo, el valor del área de P_1 será:

$$8.33 \text{ cm}^2 = 4.25 \text{ cm}^2 + 2.20 \text{ cm}^2 - 2 \times \sqrt{4.25 \text{ cm}^2} \times \sqrt{2.20 \text{ cm}^2} \times (-0.31)$$

Todo lo ya dicho para el triángulo rectángulo lo podemos aplicar a cualquier triángulo en virtud de (2). Veamos algunos ejemplos:

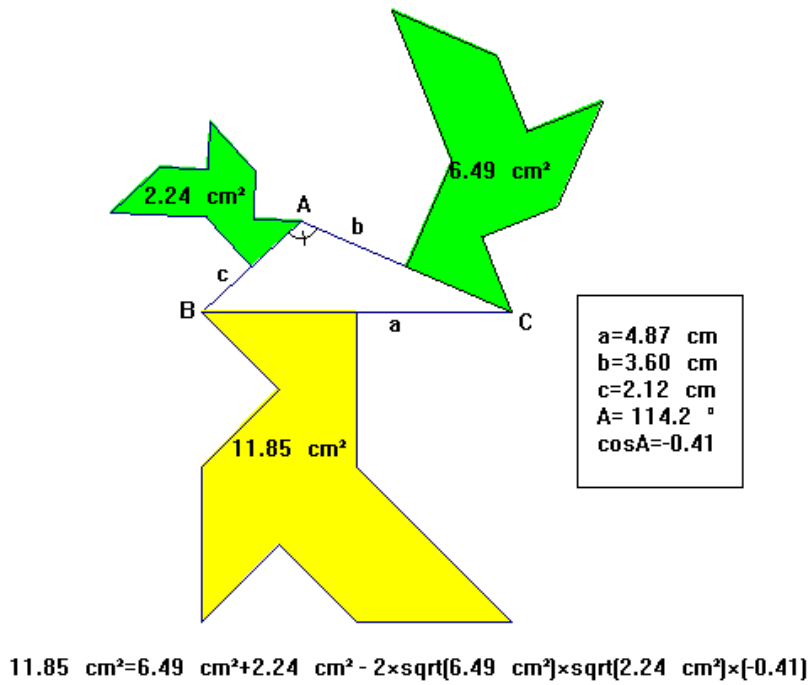


Fig. 14

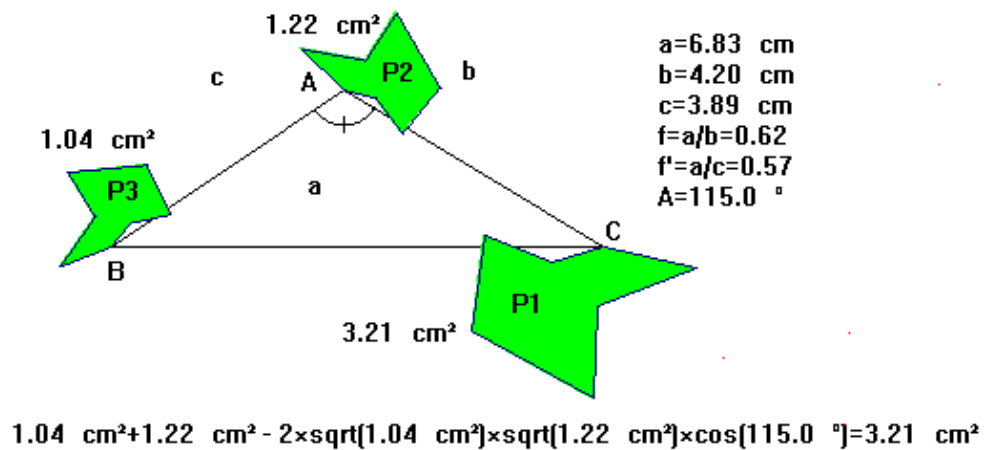


Fig. 15

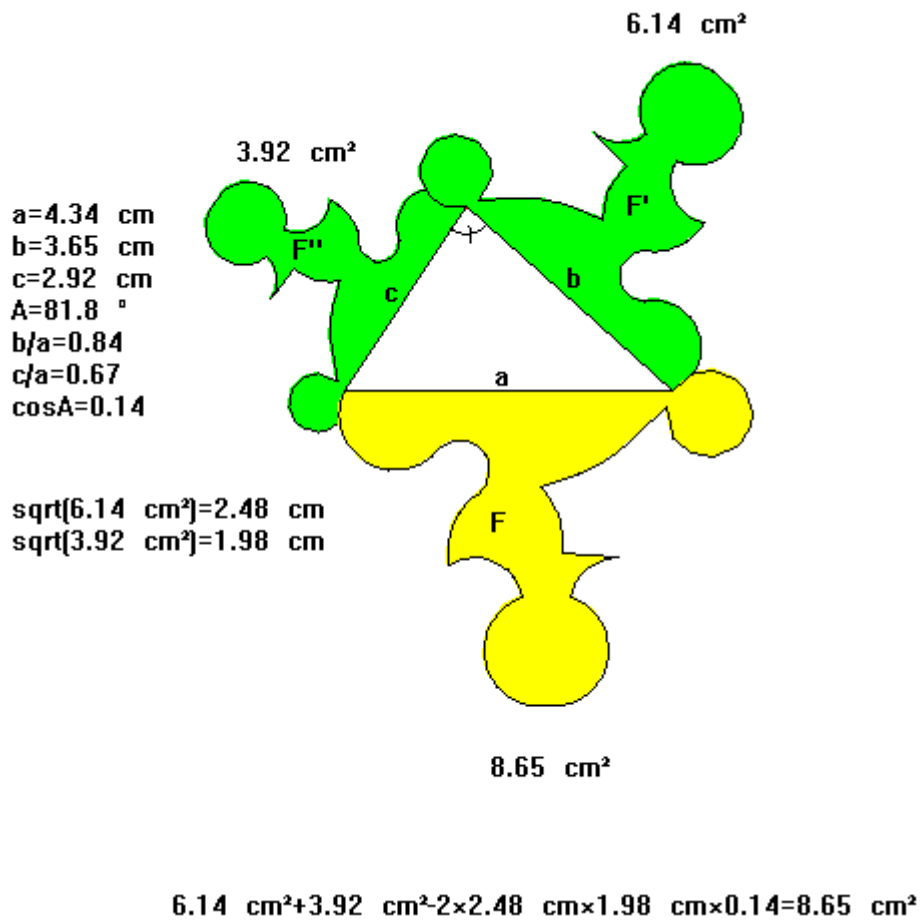


Fig. 16

Como puede observarse en la figura 16, las superficies de F' y F'' están algo solapadas en los extremos de los lados del triángulo; sin embargo, las áreas calculadas por el *Cabri II* son las totales, incluyendo, por tanto, las partes ocultas.

Insistimos en que siempre hay que partir de un triángulo, no basta con que tres figuras sean semejantes entre sí para que se cumpla la relación (2), pues F' y F'' proceden de F por aplicación de los respectivos factores b/a y c/a . Así, como ejemplo, los polígonos P_1 , P_2 y P_3 (Fig. 17) son semejantes; sin embargo, sus áreas no cumplen la propiedad (2), ya que se pasa de P_1 a P_2 y P_3 mediante las respectivas reducciones $4/8$ y $3/8$, y los números 8, 4 y 3 no forman triángulo.

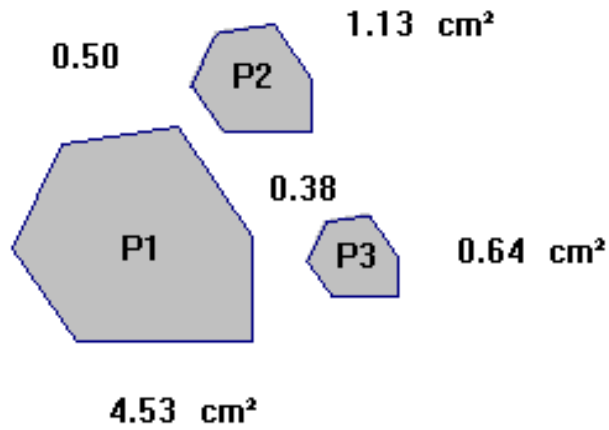


Fig. 17

Prolongaciones arborescentes del teorema de Pitágoras

A continuación, y para terminar, daremos unos cuantos ejemplos sobre sucesivas aplicaciones del teorema de Pitágoras.

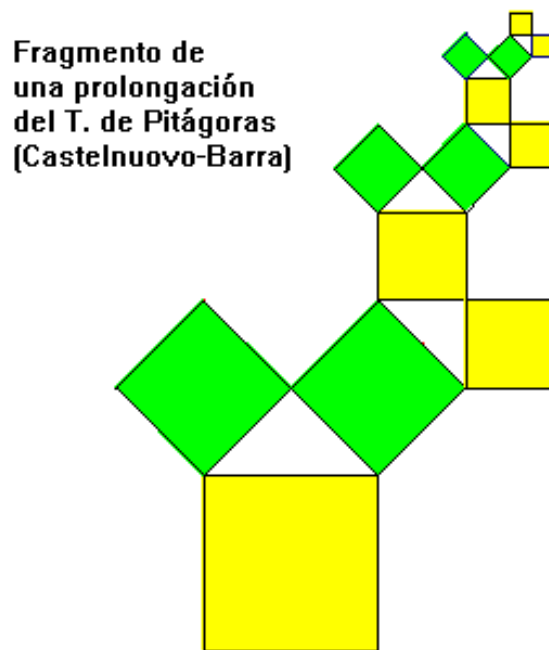


Fig. 18

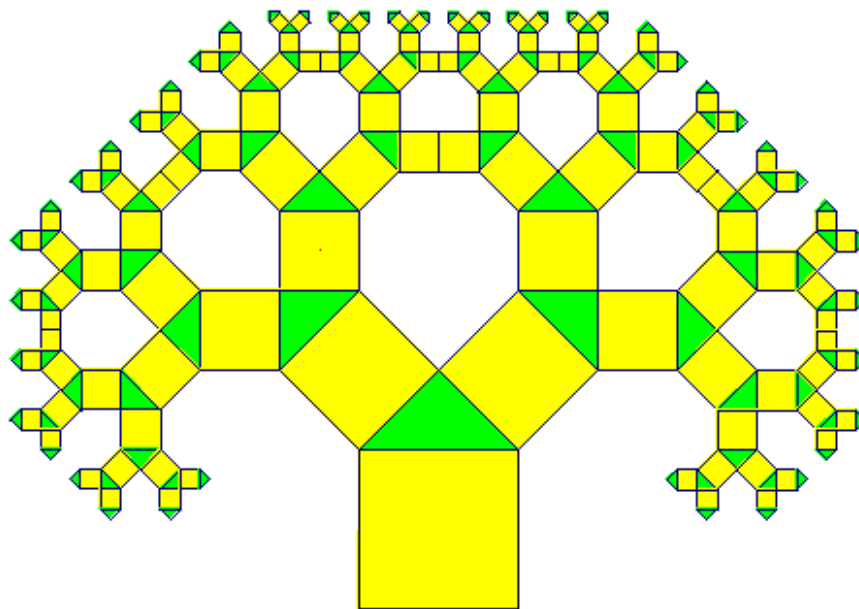


Fig. 19

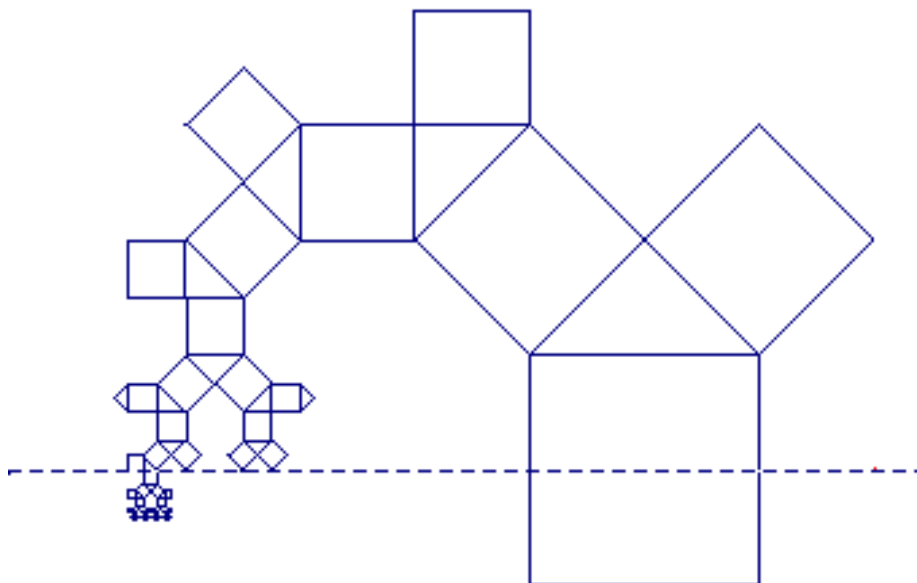


Fig. 20

Esta figura 20 es un ramal un poco más ampliado del árbol representado en la figura 19.

La figura 21 es otro pequeño ramal de la figura 19

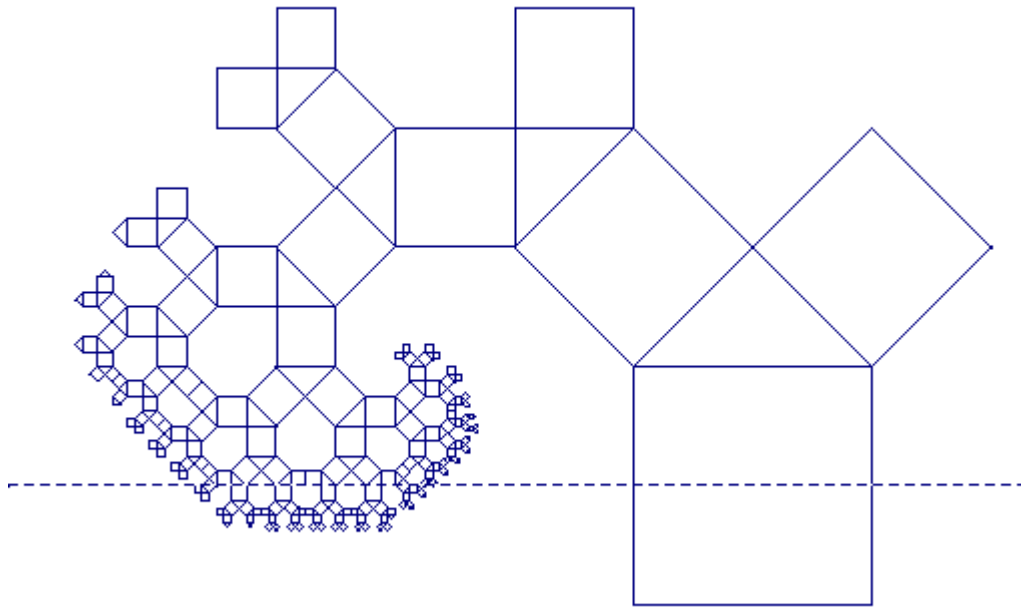


Fig. 21

Esta figura 21 es una ramificación más prolija de la anterior.

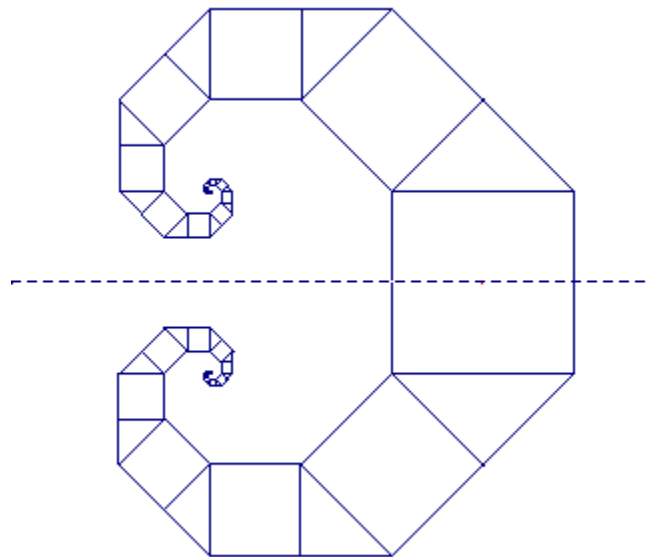


Fig. 22

En la figura 22, se ha querido destacar una espiral de la anterior, ampliada con la figura simétrica respecto del eje punteado

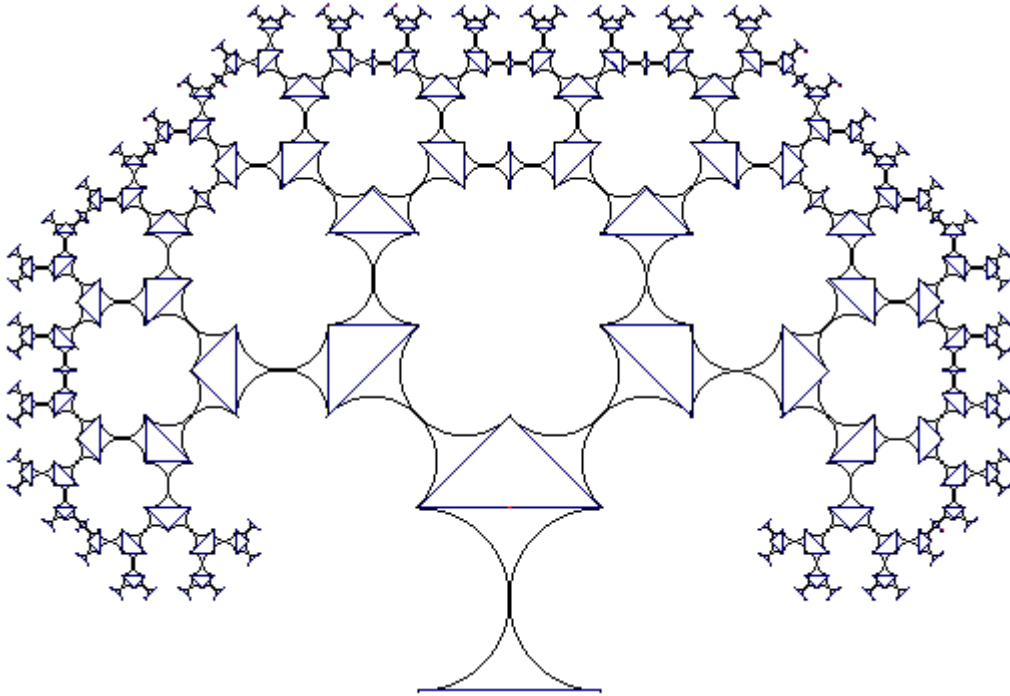


Fig. 23

Seguimos con triángulos rectángulos isósceles, pero esta vez sobre cada uno de sus lados (Fig. 23) no se han construido cuadrados, sino una superficie limitada por dos arcos semicirculares iguales que se tocan en sus puntos medios y dos segmentos de la misma longitud, siendo esta igual al diámetro de la circunferencia a la que pertenecen los arcos. La forma arborescente es bastante patente.

Ni que decir tiene que la figura continuaría, teóricamente, creciendo en ramales, hasta terminar en puntos.

A continuación (Fig. 24) expondremos la parte central de este árbol, un poco más acabado, que imita a una copa rebosante.

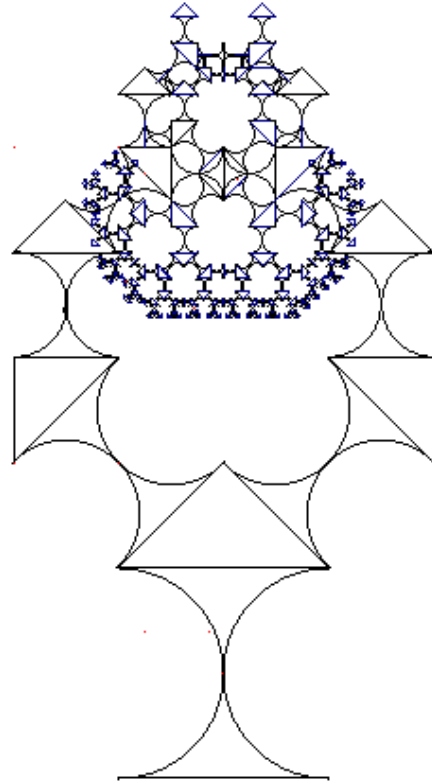


Fig. 24

Terminaremos este divertimento con otra rama de árbol, pero con triángulos rectángulos no isósceles.

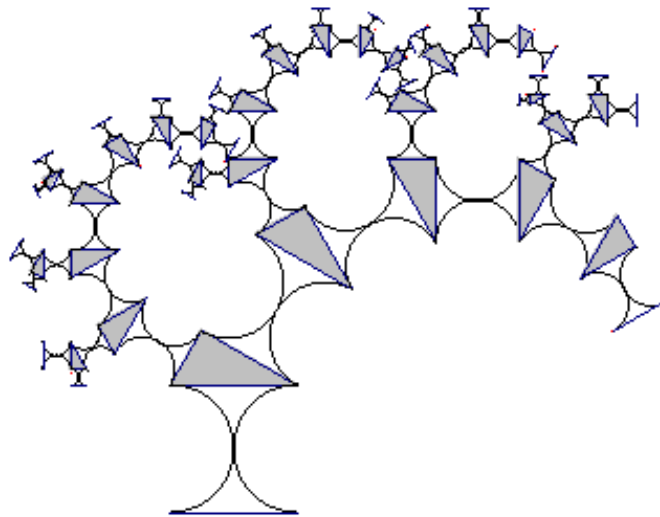


Fig. 25

Referencias bibliográficas

Boyer, C.B. (1986). *Historia de la Matemática*, AUT. Madrid.

Castelnuovo, E.; Barra, M. (1976). *Matematica Nella Realtà*, Boringhieri. Torino.

Heath, Sir Thomas (1981). *A History of Greek Mathematics* (2 vol.), Dover. New York.