ISSN: 1695-6613

EXPERIENCIA DIDÁCTICA SOBRE PROBABILIDAD: LOS DIAGRAMAS DE ÁRBOL COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA

María Celia Ríos Villar
Víctor Manuel Hernández Suárez
Francisco Simeón Cabrera Suárez

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este artículo se describe una experiencia de “Introducción al cálculo de probabilidades” llevada a cabo con un grupo de alumnos de Magisterio, de la Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (FFP), en un Seminario impartido por el profesor Knut Ole Lyso de la Universidad de Trondheim, Noruega, en el marco del programa de intercambio Sócrates/Erasmus.

El método utilizado está basado en el recurso de los diagramas de árbol que fue muy bien acogido por los alumnos. Éstos, posteriormente, en dos sesiones de clase, continuaron aplicando el procedimiento para resolver problemas de complejidad creciente, sin necesidad de conocer el teorema de la Probabilidad Total, ni fórmulas para calcular la probabilidad condicionada.

Abstract

In this paper, an experience of “Introduction to the calculation of probabilities”, carried out on a group of students in Teacher Training, in the FFP of Las Palmas, is described.

The experience begins with a Seminar given by professor Knut Ole Lyso of the University of Trondheim, Norway, forming part of the exchange program Socrates/Erasmus.

The method used is based on the resource of the tree diagrams and it was very well accepted by the students that, later on, in two class sessions, continued applying the procedure to solve problems of growing complexity, without the need to know the Total Probability Theorem, and without any formulas to calculate the conditioned probability.

Introducción

Los alumnos que siguieron el Seminario eran estudiantes de primer curso de la Diplomatura de Maestro, especialidad de Educación Primaria y se les planteó como una actividad de la asignatura “Matemáticas y su didáctica”, en un momento del curso académico en que ya habían trabajado el BLOQUE de Numeración, pero no, el tema de la Probabilidad. Habían utilizado los diagramas de árbol como un procedimiento para resolver situaciones de recuento y problemas de estructura multiplicativa.

A continuación, se incluye la información que se les adelantó a los alumnos acerca del contenido del Seminario, y la ficha original de situaciones planteadas por el profesor Knut Ole Lyso y que fue repartida a los participantes, previamente traducida al español. Comentaremos después el procedimiento que siguió el profesor visitante y la respuesta positiva que observamos en los alumnos ante un tema que, habitualmente, les resulta difícil cuando se trata de resolver problemas utilizando las fórmulas correspondientes a la probabilidad total y a la probabilidad condicionada.

Seminario sobre probabilidad

Título: Introducción al cálculo de probabilidades

Fecha: 6 de marzo de 2002

Horario: de 11:00 a 13:00 horas

Duración: 2 horas

Lugar: Aula-Taller de Matemáticas

Profesor: Knut Ole Lyso (Universidad de Trondheim, Noruega).

Contenido del seminario

El profesor entregó a cada alumno una ficha en la que se presentan diferentes situaciones para discutir y resolver. Dichas situaciones están relacionadas con aspectos muy básicos del cálculo probabilística; por ejemplo, se plantean situaciones tales como *conocer cuál es la probabilidad de que una mujer tenga una niña si está esperando un bebé*.

Con la ficha en mano, los alumnos tratarán de resolver las situaciones planteadas, escribirán los argumentos y justificarán sus respuestas. Una vez resuelto cada caso discutirán los resultados con otros compañeros.

SELF TRAINING: INTRODUCTION TO AND CALCULATION OF PROBABILITIES

Try to compute the following probabilities. Write down your arguments and explain why you think your answer in correct. When you are finished, discuss your answers with other students.

1. *You are going to toss a fair die. What is the probability of getting a 6?*
2. *A meteoric stone is falling towards the earth. What do you think is the probability of hitting the Ocean?*
   What do you think is the probability of hitting Spain?
3. *A woman is expecting a baby. What is the probability of having a girl?*
4. *A family has 3 children, all girls, and is expecting another baby. The three girls would be pleased if the baby is a boy. What is the probability of having a boy?*
5. *A deck of cards consists of 52 cards. What is the probability to draw a spade?*
6. *You take part in two lotteries A and B. The probability to win in lottery A is 0.05 (5%), and the probability to win in lottery B is 0.10 (10%). What is your probability to win?*
7. *A family plans to have two children. We assume that the probability to get a boy is equal to the probability to have a girl. What is the probability to get two girls in this family?*
8. *Two girls and three boys have a dinner party. They agree that two of them are going to do the dishes. They decide who by drawing lots. What is the probability that two boys are doing the dishes?*

9. *Anna has three red, two green and one blue pencil in her pencase. She asks Maria to pick out two pencils without looking. Anna thinks that the probability that both of the pencils are red are 1/5 but Maria thinks that the probability es 1/3. Do any of them have the correct answer?*
10. *In a box (urn) there are 10 identical balls; 2 are red; 3 are white and 5 are black. You pick at random a ball from this box. What is the probability of picking a white ball?*
11. *In a box (urn) there are 10 identical balls; 2 are red; 3 are white and 5 are black. You pick at random two balls from this box. What is the probability of picking two white balls?*
12. *The norwegian championship in the sport Ice Hockey is played between the two best teams. Suppose that the teams (A and B) are equal. The rules say that the team winning three matches out of five matches has won the final (no match ends in a draw).*

    What is the probability that team A wins the final after the first three matches?

    What is the probability that the final ends after three matches?
13. *What is the probability that the final ends after exactly four matches?*

    What is the probability that the final ends after exactly five matches?

AUTO INSTRUCCIÓN: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Trata de calcular las siguientes probabilidades. Escribe debajo tus argumentos y explica por qué piensas que tu respuesta es correcta. Cuando hayas terminado, discute tus respuestas con otros estudiantes.

1. *Si tiras un dado al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 6?*
2. *Un meteorito va a caer en la tierra. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el Océano? ¿Y de que caiga en España?*
3. *Una mujer está esperando un bebé. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una niña?*

4. *Una familia tiene 3 hijos, todos chicas, y está esperando otro bebé. A las tres niñas les encantaría que el bebé fuera varón. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño?*
5. *Un juego de baraja consta de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una espada?*
6. *Una persona juega a dos loterías A y B. La probabilidad de ganar en la lotería A es 0.05 (5%), y la probabilidad de ganar en la lotería B es 0.10 (10%). ¿Cuál es la probabilidad de ganar?*
7. *Una familia planifica tener dos niños. Se supone que la probabilidad de tener un niño es la misma que la de tener una niña. ¿Cuál es la probabilidad de tener dos niñas en esta familia?*
8. *Dos chicos y tres chicas organizan una cena. Acuerdan que dos de ellos laven los platos y deciden hacerlo a sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos chicos laven los platos?*
9. *Ana tiene tres lápices rojos, dos verdes y uno azul en su estuche. Le pide a María que escoja dos lápices sin mirar. Ana piensa que la probabilidad de que los dos lápices sean rojos es 1/5, pero María cree que la probabilidad es 1/3. ¿Cuál de las respuestas es la correcta?*
10. *En una caja (urna) hay 10 bolas idénticas: 2 rojas, 3 blancas y 5 negras. Se escoge al azar una bola de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola blanca?*
11. *En una caja (urna) hay 10 bolas; 2 rojas, 3 blancas y 5 negras. Se escogen al azar 2 bolas de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer 2 bolas blancas?*
12. *El campeonato noruego de Hockey sobre hielo se juega entre los dos mejores equipos. Supongamos que los equipos (A y B) son iguales. Las normas dicen que el equipo que gane 3 de los 5 partidos gana la final (ningún partido puede acabar en empate). ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la final después de los 3 primeros partidos? ¿Cuál es la probabilidad de que la final termine después de 3 partidos?*

13. *¿Cuál es la probabilidad de que la final termine después de, exactamente, 4 partidos? ¿Cuál es la probabilidad de que la final termine después de, exactamente, 5 partidos?*

Desarrollo

El profesor repartió la ficha de actividades y pidió a los alumnos que, durante una hora, en pequeños grupos (5 o 6) discutieran, comentaran y aportaran soluciones a las cuestiones planteadas.

Los grupos de trabajo mostraron interés y entusiasmo; en algunos, los alumnos no sabían que hacer; en otros, había alumnos que tenían ciertos conocimientos de probabilidad y trataban de comunicarlos a sus compañeros. El profesor iba pasando por los diferentes grupos y trataba de comunicarse con ellos. Durante la segunda hora, empezó a comentar las cuestiones propuestas, muy despacio pues se dirigía a ellos en inglés, y fue escribiendo en la pizarra las soluciones, empezando por las más sencillas.

Así, la cuestión 1, la resolvió diciendo que la probabilidad de obtener 6 al lanzar un dado, es 1/6, pues la forma del dado es regular, todas sus caras son iguales, son seis, y cada una tiene la misma probabilidad de salir que las demás. Escribió:

$$P(6) = \frac{1}{6} \text{ => Modelo (1): Geométrico/Simétrico}$$

No ocurre así con la caja de tizas que tenía en la mano, que es un ortoedro formado por 3 pares de rectángulos distintos, y si dibuja en una de las caras una $\times$ y lanza la caja al aire, no puede decir que la probabilidad de que salga esa cara hacia arriba sea 1/6.

La solución de la cuestión 2, es decir, la probabilidad de que un meteorito caiga en el océano es:

$$\text{P(Océano)} = \frac{2}{3}$$

porque *2/3* de la superficie del globo terrestre, corresponde a océano.

La probabilidad de que caiga en España es:

P (caiga en España) = área de España / área del globo

Para la cuestión 3, escribió:

$$P(\text{niña}) = \frac{1}{2}$$

es decir, es del 50%.

(Esta situación más bien se estudia a partir de la frecuencia relativa y del estudio de casos, se basa en la Estadística).

Modelo (2): Ley de los Grandes Números.

La solución de la cuestión 4:

La probabilidad de que sea un varón el cuarto hijo, es independiente de que los anteriores sean chicos o chicas, por tanto, igual que el anterior, $P(\text{chico}) = \frac{1}{2}$ (aclaró aquí que puede haber razones genéticas que alteren este valor).

La cuestión 5:

$P(\text{espada}) = \frac{13}{52}$ => Modelo (3): Distribución Uniforme.

Se estudia como: número de casos favorables / número de casos posibles.

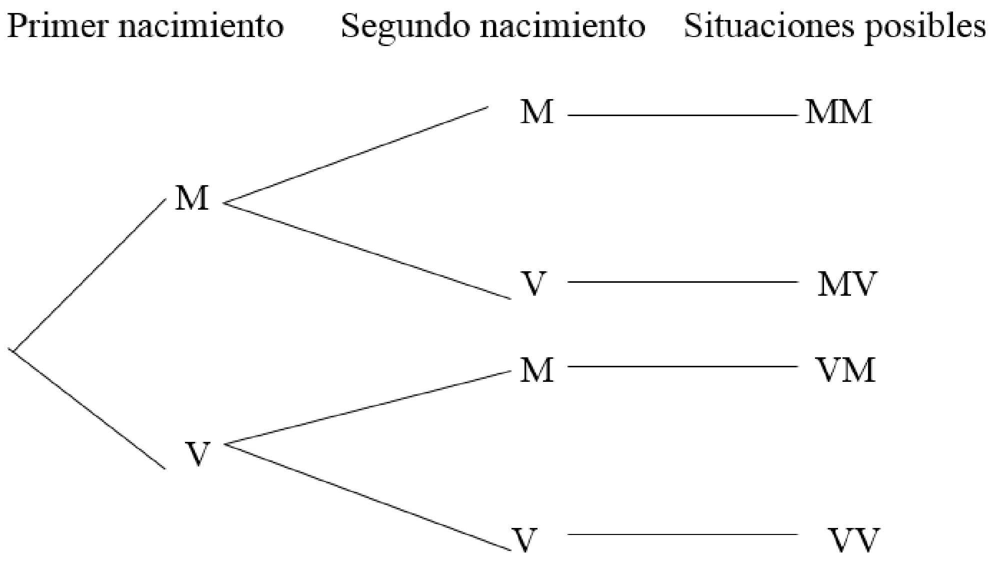
Para este problema se considera que la baraja tiene cuatro palos diferentes y que cada palo se compone de 13 cartas.

También lo analiza así:

$$\left.\begin{array}{l} P(1 \text{ de espadas}) = \frac{1}{52} \\ P(2 \text{ de espadas}) = \frac{1}{52} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P(12 \text{ de espadas}) = \frac{1}{52} \\ P(13 \text{ de espadas}) = \frac{1}{52} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\text{espada}) = \frac{1}{52} + \overset{(13}{\dots\dots\dots\dots} + \frac{1}{52} = \frac{13}{52}$$

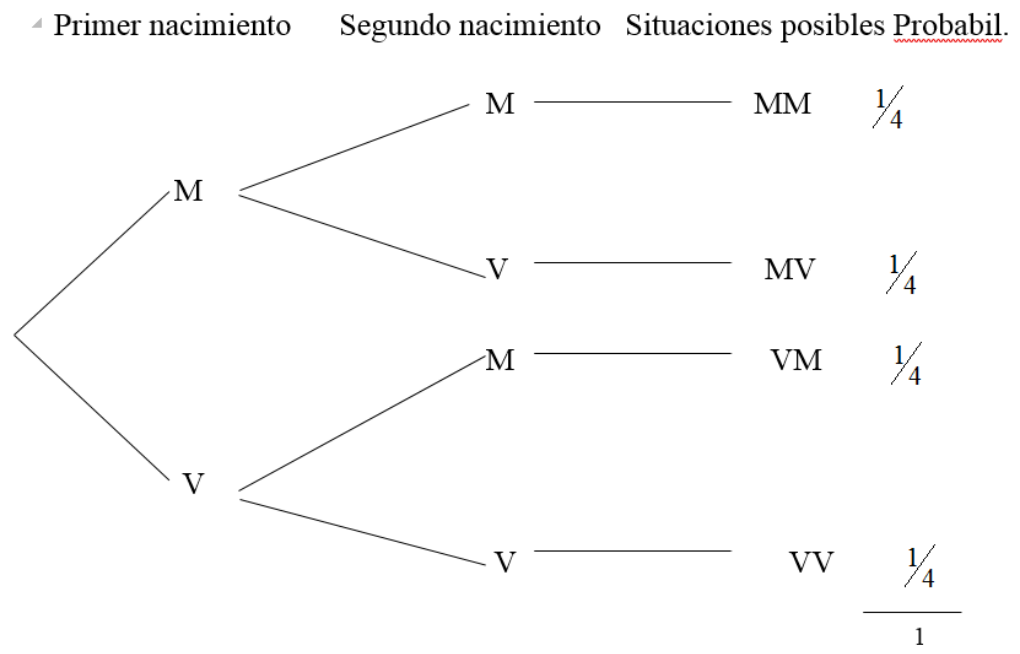
Llegado a este punto, comentó que ahora empezaríamos a ver situaciones con experiencias compuestas, un poco más complejas que las anteriores, que correspondían a experiencias simples.

Había cierta expectación por ver cómo se resolvía la número 6, pero el profesor empezó a hablar del 7, haciendo el siguiente diagrama de árbol y comentándolo:



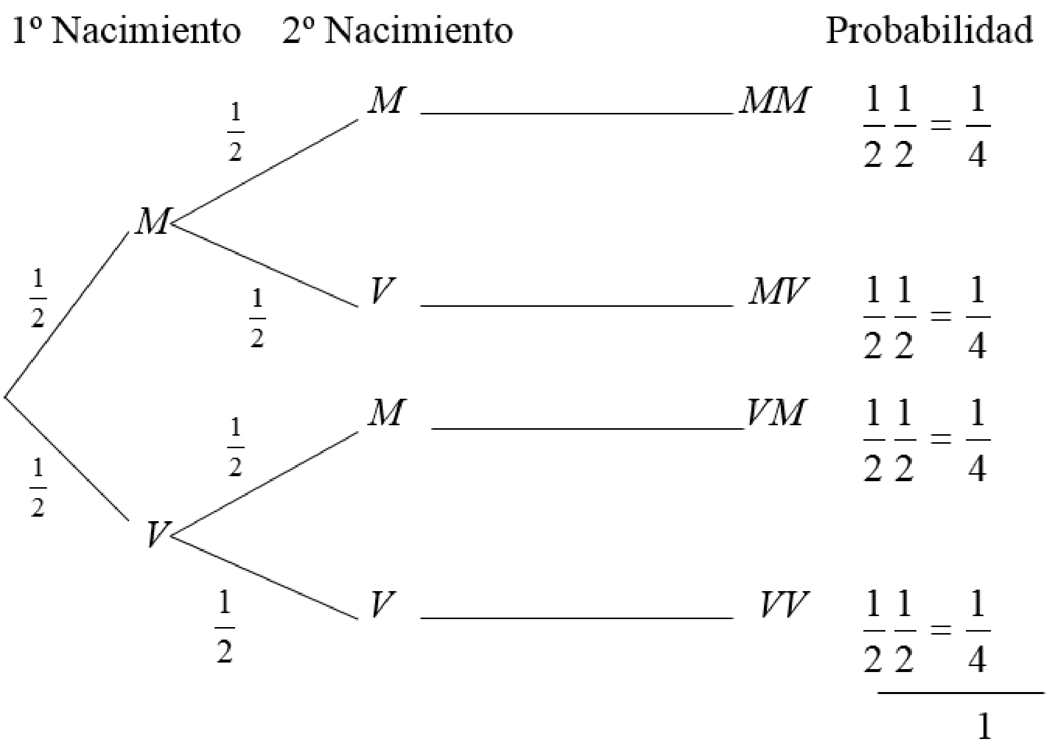
Para empezar, no colocó ningún valor numérico sobre las ramas del árbol; analizó las situaciones posibles y comentó la última columna:

Las posibilidades MM, MV, VM y VV son todas las que hay y alguna de estas situaciones, se dará. Si la unión de estos sucesos es el suceso seguro, de probabilidad 1, la probabilidad de cada uno es $\frac{1}{4}$; luego añadió, en la última columna, el valor de cada probabilidad, y comprobó que la suma es 1.



En cada rama del árbol, la probabilidad de cada nacimiento es $\frac{1}{2}$; los sucesos del segundo nacimiento son independientes de los del primero. El valor $\frac{1}{4}$ de la probabilidad de cada uno de los sucesos MM; MV; VM y VV, es el resultado de $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, si se siguen las ramas del árbol.

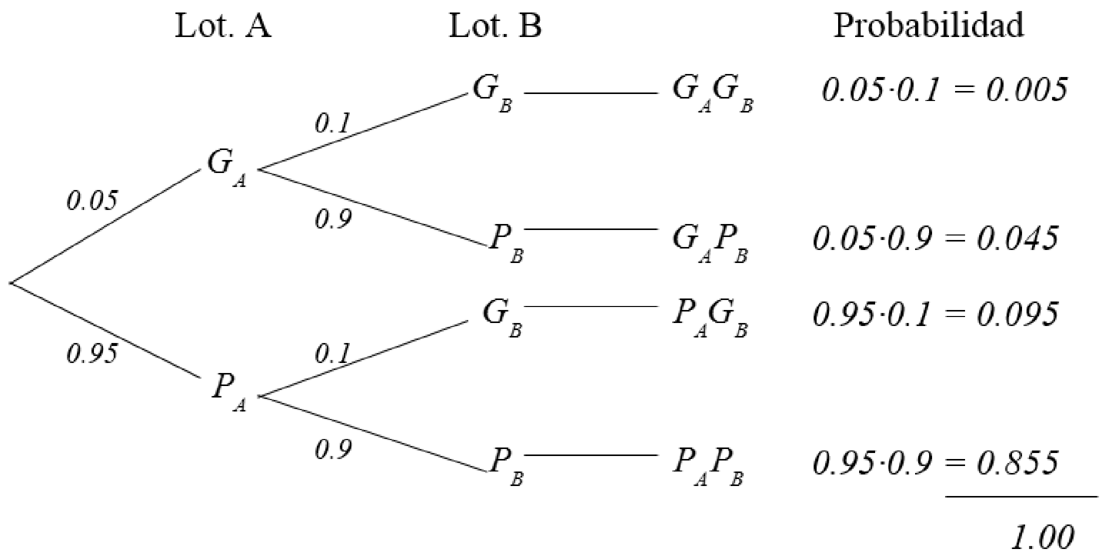
Finalmente, el árbol quedaría así:



Una vez explicada esta cuestión y sin que surgiese ninguna dificultad por parte de los alumnos, empezó a dibujar el árbol para resolver el problema 6. Todos parecían saberlo resolver, de forma que sólo fue necesario dibujar el árbol, colocar sobre cada rama el valor de la probabilidad de ganar o perder en cada lotería (G_A, G_B, P_A, P_B), en cada una de las posibles situaciones, asignarles como probabilidad el producto de los valores que aparecen en las ramas de cada "recorrido" y por último, comprobar que la suma de todos los valores de la última columna es la unidad.

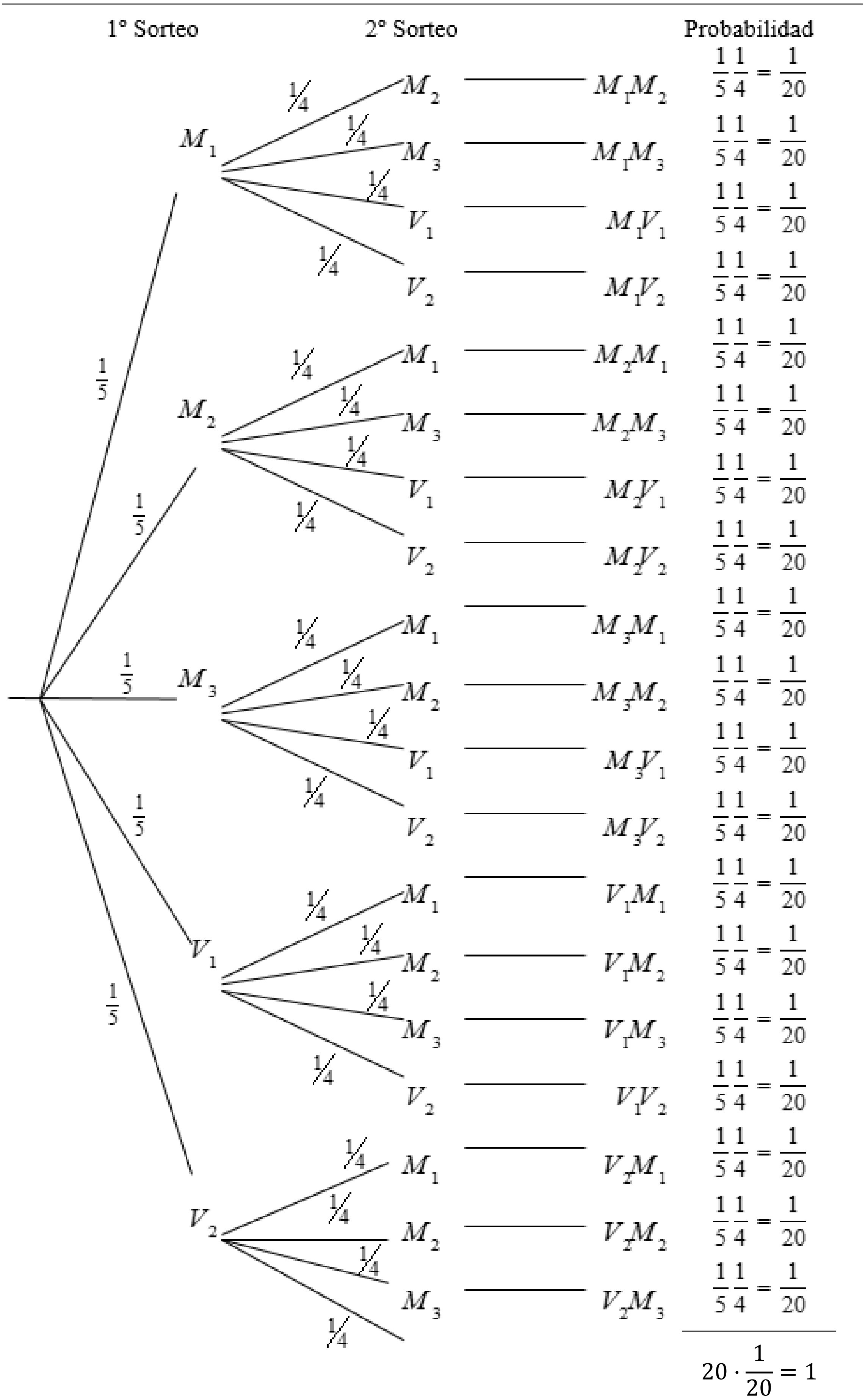
Cuestión 6.

Para resolver esta cuestión realizó el siguiente diagrama de árbol:



Hasta aquí se ha descrito lo que se hizo en aquella sesión de trabajo, pero como no se habían podido resolver todas las cuestiones, propusimos a los alumnos continuar con ellas el próximo día de clase y así lo hicimos, de forma que con dos horas más , fuimos resolviendo las siete situaciones que faltaban y que dieron lugar a los árboles que siguen. En ellos simbolizamos por M_1, M_2, M_3, a las tres chicas y por V_1, V_2 a los dos chicos; suponemos que se extrae primero un nombre y después el otro.

La Cuestión 8 aparece en la siguiente página.


1° Sorteo
2° Sorteo
Probabilidad
M_1
M_2
M_3
V_1
V_2
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{4}$
M_1M_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_1M_3 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_1V_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_1V_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_2M_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_2M_3 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_2V_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_2V_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_3M_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_3M_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_3V_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
M_3V_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
V_1M_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
V_1M_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
V_1M_3 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
V_1V_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
V_2M_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
V_2M_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
V_2M_3 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
$20\cdot\frac{1}{20}=1$

Los casos en los que tocaría fregar a los dos chicos son:

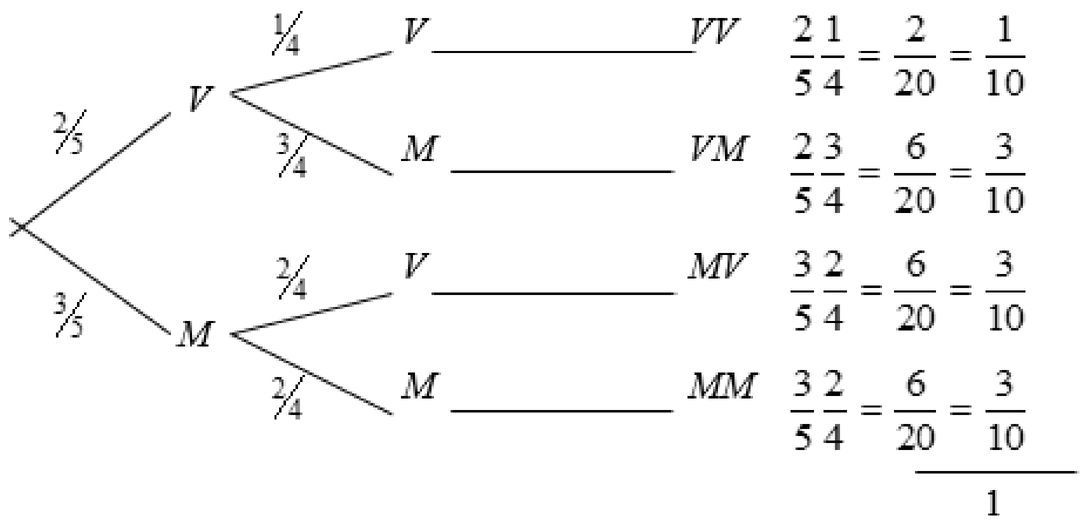
$$V_1V_2 \text{ y } V_2V_1$$

La probabilidad de que los dos chicos laven los platos es:

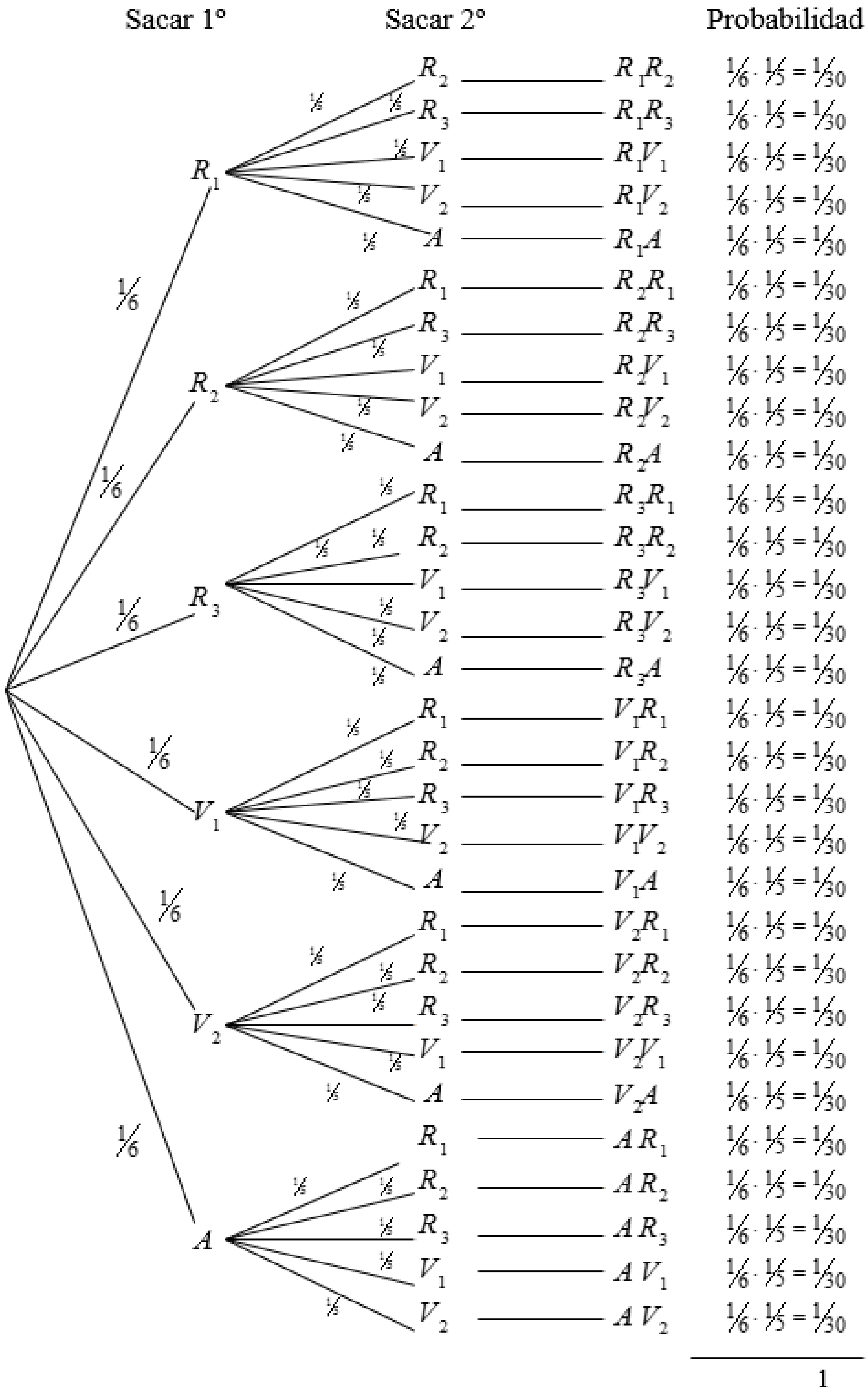
$$P(V_1V_2) + P(V_2V_1) = \frac{1}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Otra forma de realizar este problema sería considerando el siguiente árbol de probabilidad, más breve que el anterior:



Para la número 9, realizó el siguiente árbol,


Sacar 1°
Sacar 2°
Probabilidad
R_1R_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_1R_3 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_1V_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_1V_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_1A $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_2R_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_2R_3 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_2V_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_2V_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_2A $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_3R_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_3R_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_3V_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_3V_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
R_3A $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_1R_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_1R_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_1R_3 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_1V_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_1A $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_2R_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_2R_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_2R_3 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_2V_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
V_2A $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
AR_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
AR_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
AR_3 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
AV_1 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
AV_2 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$
1

Entonces la probabilidad de que los dos lápices sean rojos:

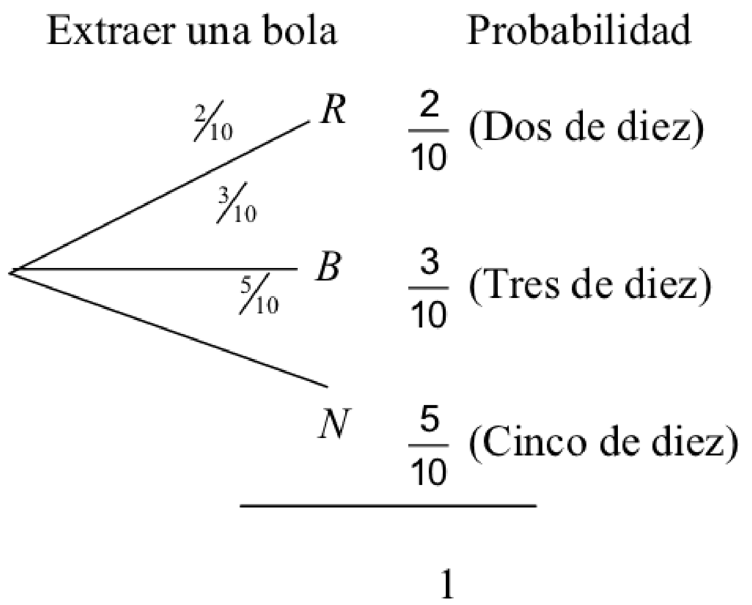
$$P\left(R_1R_2\right)+P\left(R_1R_3\right)+P\left(R_2R_1\right)+P\left(R_2R_3\right)+P\left(R_3R_1\right)+P\left(R_3R_2\right)=$$

$$=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=$$

$$=6\frac{1}{30}=\frac{1}{5}$$

Ana tenía razón

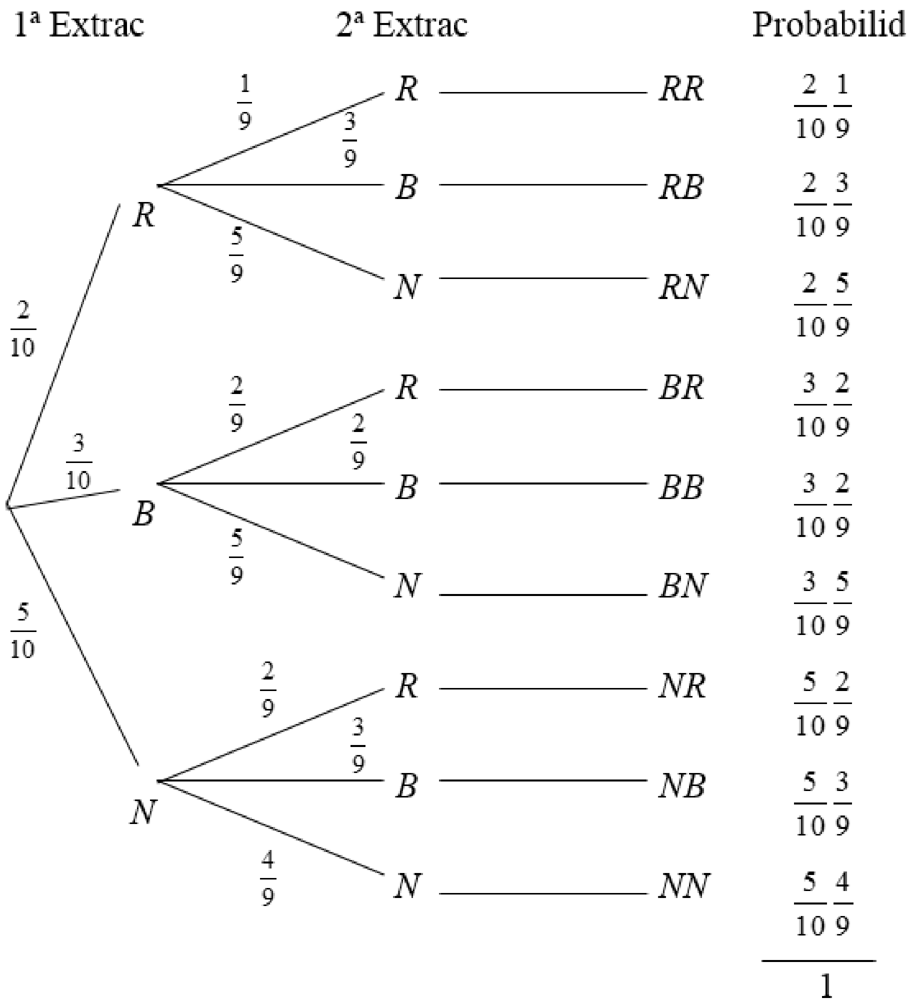
Cuestión 10. Solución



Entonces,

$$P\left(Blanca\right)=\frac{3}{10}$$

Cuestión 11. Solución



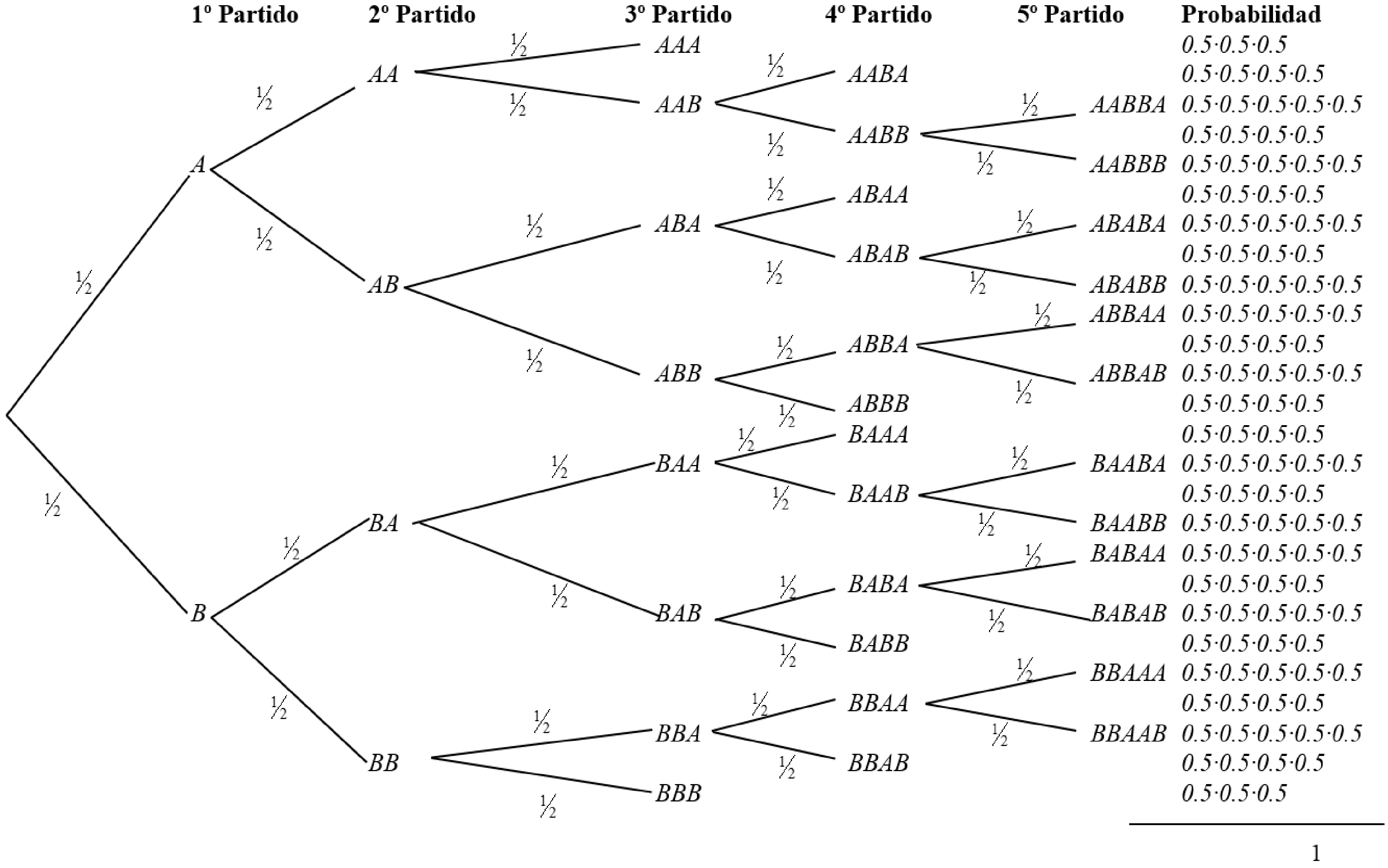
Entonces,

$$P(BB) = \frac{3}{10}\frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

Cuestiones 12 y 13. Solución

El siguiente diagrama de árbol representa las posibles situaciones después del primer partido, 2º, 3º, 4º y 5º; hemos interpretado que, por ejemplo, AA significa que los dos primeros partidos los ha ganado A, o el caso ABA significa que A ha ganado el 1º, B el 2º y A, el 3º.

12. Solución



1º Partido
2º Partido
3º Partido
4º Partido
5º Partido
Probabilidad
½
A
B
AA
AB
BA
BB
AAA
AAB
ABA
ABB
BAA
BAB
BBA
BBB
AABA
AABB
ABAA
ABAB
ABBA
ABBB
BAAA
BAAB
BABA
BABB
BBAA
BBAB
AABBA
AABBB
ABABA
ABABB
ABBAA
ABBAB
BAABA
BAABB
BABAA
BABAB
BBAAA
BBAAB
0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5·0.5
0.5·0.5·0.5
1

Si en el tercer partido llegamos a la situación *BBB*, el equipo *B* ya ganó la final y el campeonato se termina (análogamente, si ha ocurrido *AAA*, el campeón sería *A*, después de tres partidos).

Ya podemos responder a las preguntas formuladas en la cuestión 13. La probabilidad del suceso *AAA*, siguiendo el árbol, es:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0.125$$

La final se terminaría también con el suceso BBB, cuya probabilidad es igualmente $\frac{1}{8}$. Por tanto, *la probabilidad de que se termine la final después de tres partidos* viene dada por la suma:

$$P(AAA) + P(BBB) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}.$$

En los otros casos hay que continuar el campeonato y jugar el cuarto partido. Si se llega por ejemplo a la situación *ABAA*, sabemos que *A* sería el campeón después del 4º partido. Igualmente se terminaría el campeonato después de cuatro partidos en los casos *AABA*, *ABBB*, *BAAA*, *BABB* y *BBAB*. Cada uno de estos seis sucesos tiene una probabilidad de:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

La probabilidad de que se termine el campeonato después de, exactamente cuatro partidos es:

$$6\cdot\frac{1}{16} = 0.375$$

Finalmente, en los casos *AABB*, *ABAB*, *ABBA*, *BAAB*, *BABA* y *BBAA* habría que llegar al 5º partido para que se pueda terminar el campeonato. Las posibles maneras distintas de terminar el campeonato después de 5 partidos, son los 12 sucesos que aparecen en la columna correspondiente; cada uno de ellos tiene una probabilidad de:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$$

Por tanto, *la probabilidad de que la final termine después de, exactamente, cinco partidos* es:

$$12 \cdot \frac{1}{32} = \frac{12}{32} = 0.375$$

Los valores numéricos que aparecen en la última columna corresponden a las probabilidades de cada una de las situaciones que se presentan al final de cada "recorrido" por las ramas del árbol, teniendo presente que algunos "recorridos" terminan en el tercer partido, otros en el cuarto partido y otros, en el quinto. La suma de todos esos valores, es 1.

Con estos resultados quedó completa la resolución de la ficha de actividades planteadas en el Seminario. Pasados unos días y con objeto de evaluar los conocimientos que podían haber adquirido los alumnos sobre probabilidad, con el procedimiento seguido, propusimos la resolución de tres problemas en una sesión de clase y acordamos que trabajarían en parejas, harían los correspondientes diagramas de árbol y calcularían las probabilidades que se les pedían.

A continuación se incluyen los problemas propuestos y las soluciones que se obtienen a partir de los diagramas arbóreos. Participaron ese día 38 alumnos que trabajaron por parejas; por tanto, corregimos 19 respuestas para cada problema y recogimos en un cuadro y en un gráfico los resultados, observando especialmente si habían tenido o no dificultad en elaborar el diagrama de árbol y en calcular la probabilidad a partir de él.

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Ejercicios de clase. Curso: 1º G. 10/04/02

Alumno/a:…………………………………………………………………

Resolver los siguientes problemas:

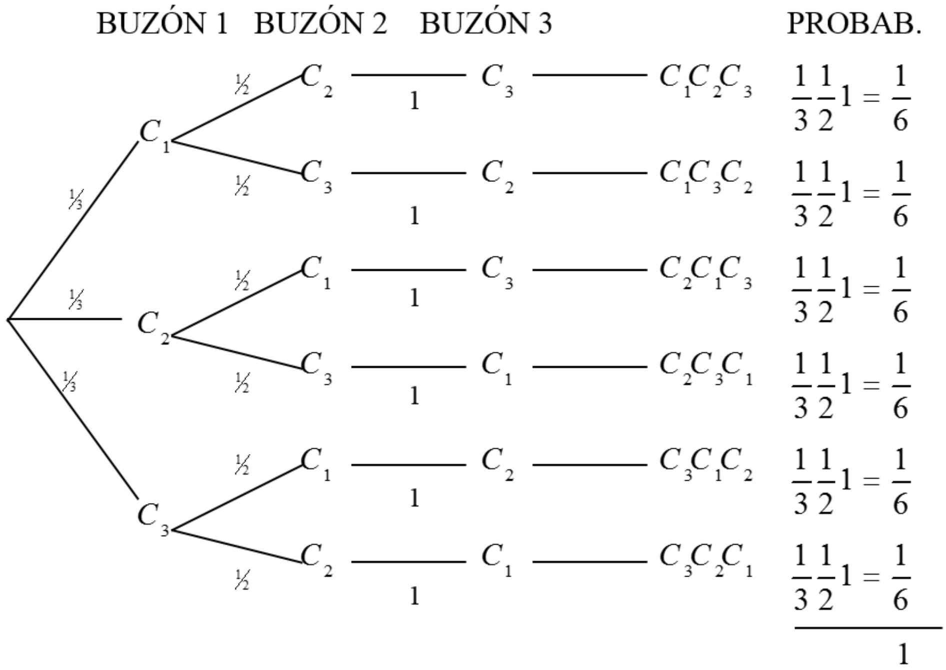
1. Un cartero lleva tres cartas para introducir en tres buzones, una en cada buzón. Lo hace sin mirar los destinatarios. Calcula la probabilidad de que:
   a) A los tres les lleguen sus cartas correctamente.
   b) Al menos a uno, le llegue su carta correctamente.

2. A una reunión asisten 5 personas, de las cuales 2 hablan solamente francés, 2 hablan solamente español y la otra habla los dos idiomas. Si se eligen dos personas para cada comisión. ¿Cuál es la probabilidad de que se entiendan?

3. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es de 0.6. Si dispara tres veces, calcular la probabilidad de que:
   a) Haga tres blancos.
   b) No haga ninguno.
   c) Haga algún blanco.
   d) Haga un solo blanco.
   e) Haga exactamente dos blancos.

Soluciones

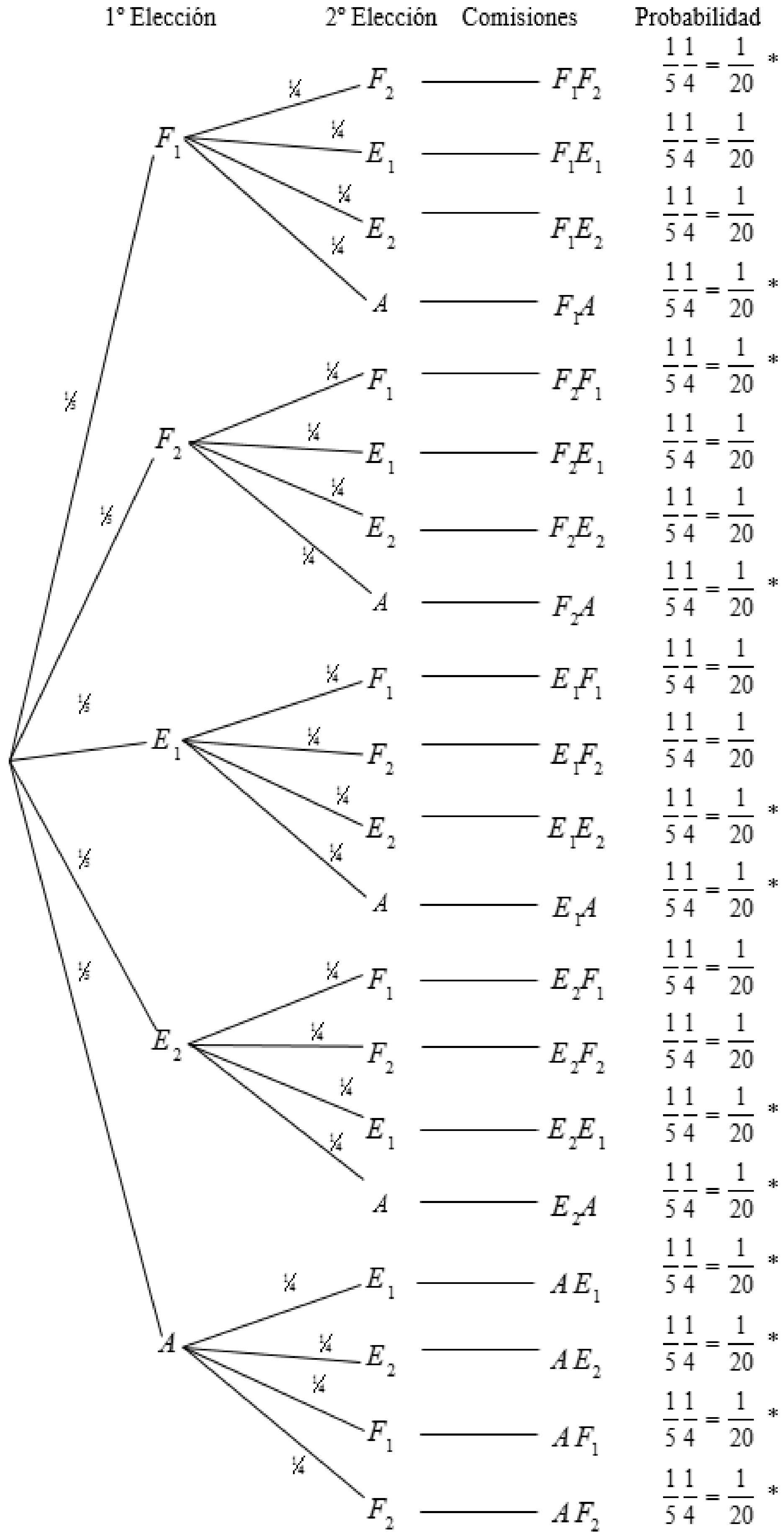
Problema 1.



a) $P\left(C_1C_2C_3\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$

b) $P\left(C_1C_3C_2\right)+P\left(C_2C_1C_3\right)+P\left(C_1C_2C_3\right)+P\left(C_3C_2C_1\right)=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2}{3}$

Problema 2.


1° Elección
2° Elección
Comisiones
Probabilidad
F_1F_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
F_1E_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
F_1E_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
F_1A $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
F_2F_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
F_2E_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
F_2E_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
F_2A $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
E_1F_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
E_1F_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
E_1E_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
E_1A $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
E_2F_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
E_2F_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$
E_2E_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
E_2A $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
AE_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
AE_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
AF_1 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *
AF_2 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ *

Total de casos: $5 \cdot 4 = 20$

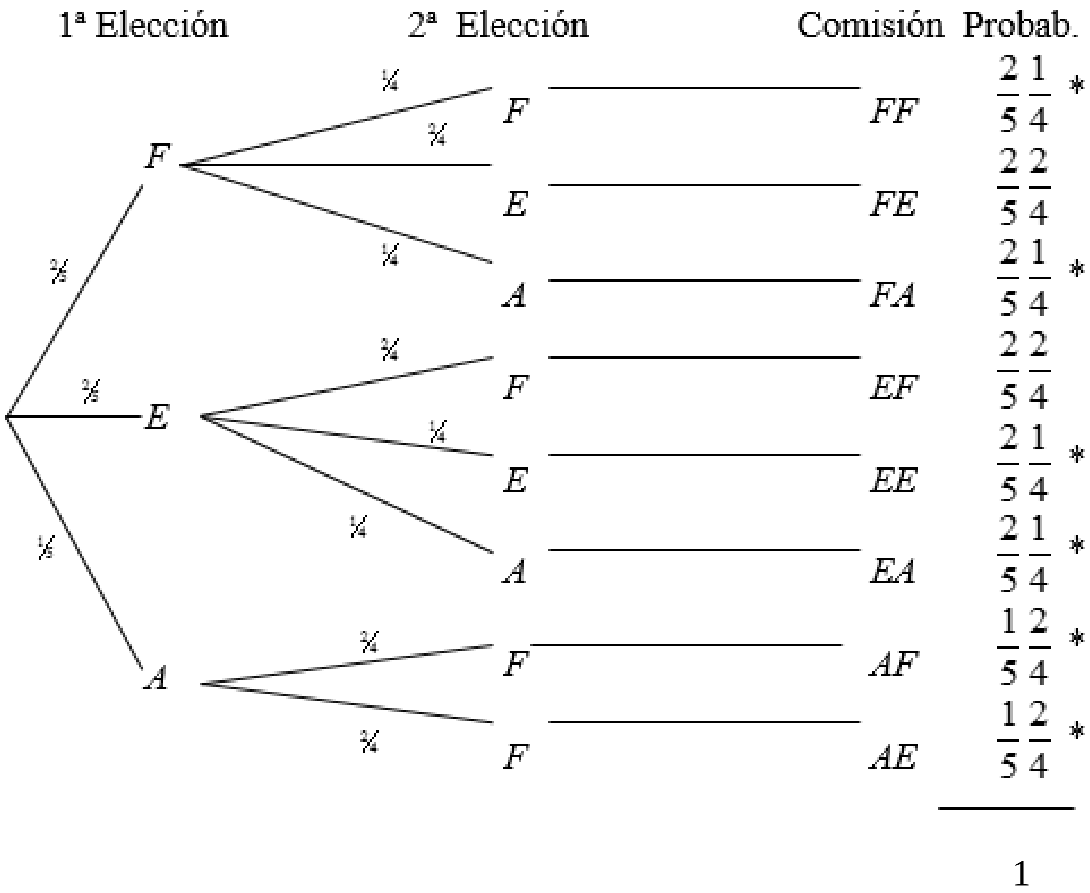
La probabilidad de cada caso de los descritos en la columna final es,

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

Todos los casos señalados con un asterisco representan comisiones en las que sus miembros pueden entenderse.

$$P\,(se\ entiendan) = 12 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$$

Otra forma de hacer el problema sería:

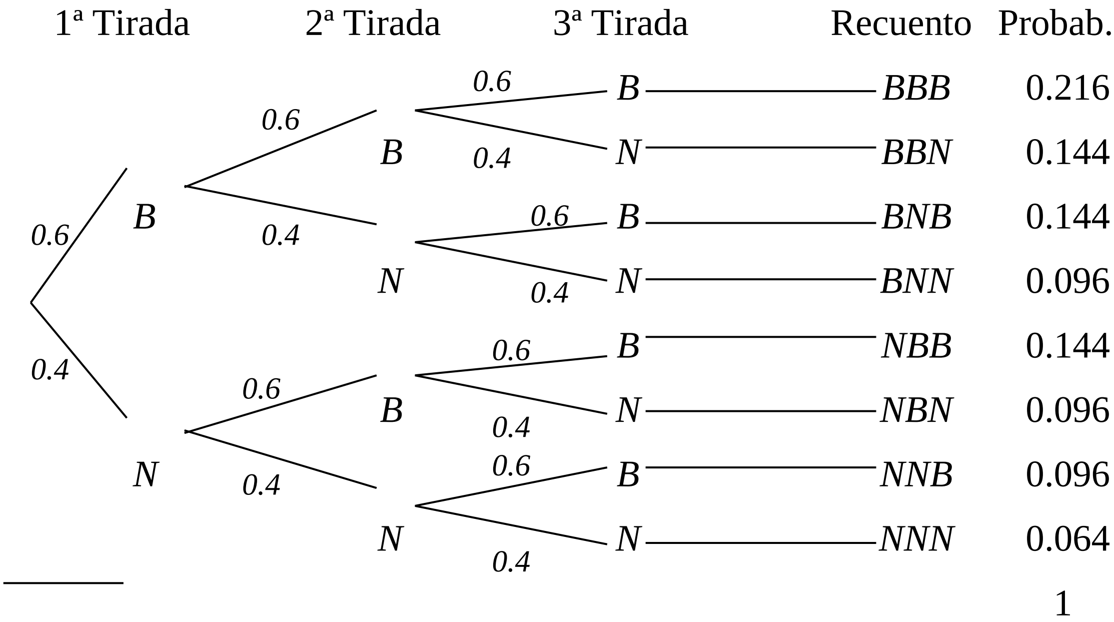


$$P\,(Endenterse) = \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + 2\frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Problema 3.

N = No dar en el blanco

B = Dar en el blanco



a) $P(BBB) = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.216 = \dfrac{216}{1000} = \dfrac{27}{125}$

b) $P(NNN) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.064 = \dfrac{64}{1000} = \dfrac{8}{125}$

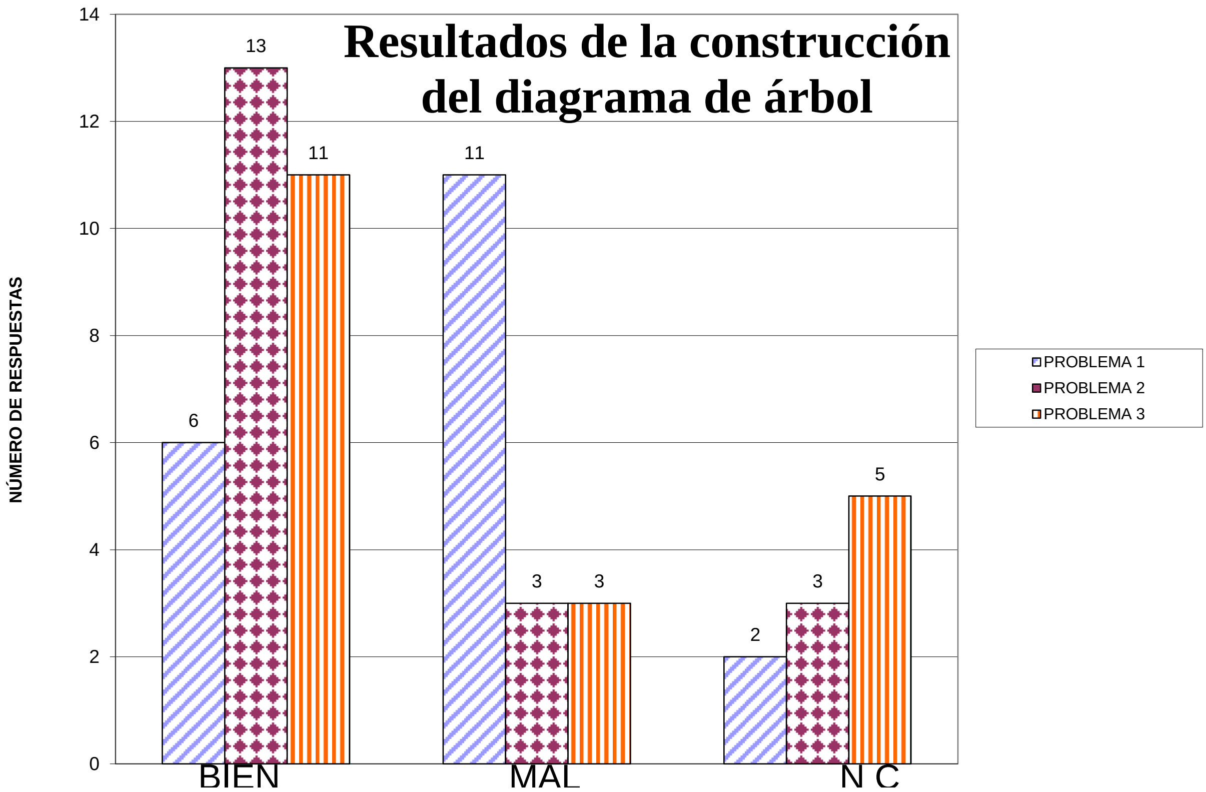
c) $P(\text{al menos un blanco}) = 1 - P(NNN) = \dfrac{117}{125}$

d) $P(BNN) + P(NBN) + P(NNB) = 3 \cdot 0.096 = 0.288 = \dfrac{288}{1000} = \dfrac{36}{125}$

e) $P(BBN) + P(BNB) + P(NBB) = 3 \cdot 0.144 = 0.432 = \dfrac{432}{1000} = \dfrac{54}{125}$

El siguiente cuadro recoge los resultados de las resoluciones, Bien (B), Mal (M), Regular (R), No Contesta (NC), que entregaron las 19 parejas de alumnos a los problemas propuestos. Observamos que fue el problema 1 el que más dificultades presentó para la elaboración del árbol; incluso, en algunos casos, los alumnos utilizan otro procedimiento para calcular la probabilidad.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Probl. 1	M	M	M	B	M	B	R	M	B	B	M	M	B	R	NC	NC	B	M	M
Árbol 1	M	M	M	B	M	B	B	M	M	B	M	B	M	M	NC	NC	B	M	M
Probl. 2	B	B	B	B	M	M	M	B	B	B	B	NC	B	NC	B	B	B	B	B
Árbol 2	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	NC	B	NC	B	NC	B	M	M
Probl. 3	R	B	B	B	NC	M	M	NC	B	B	B	NC	B	NC	B	B	B	M	R
Árbol 3	B	B	B	B	NC	M	NC	NC	B	B	B	NC	B	NC	B	M	B	M	B



Los diagramas de árbol para resolver problemas de probabilidad

Los diagramas de árbol constituyen una herramienta muy útil en la enseñanza del cálculo de probabilidades. Proporcionan un medio para distinguir entre intersección de sucesos y sucesos condicionados, pues permiten identificar el evento condicionante del condicionado, y facilitan el orden cronológico en sucesos consecutivos (por ejemplo, lanzamiento sucesivo de un dado) o el esquema de posibilidades para hechos simultáneos (por ejemplo, lanzamiento simultáneo de varias monedas).

Pese a las muchas ventajas que ofrece la utilización de estos diagramas, su uso ha tardado en generalizarse, y según un artículo de Gómez (2000), solamente el 10% de los autores de los textos del ya desaparecido curso de COU incluyen este procedimiento, mientras que los textos actuales de 2º de Bachillerato LOGSE, en su mayoría, los han incorporado, pero como un medio para ordenar los datos del enunciado y poder aplicar así, con mayor facilidad las fórmulas correspondientes que se han utilizado tradicionalmente. La propuesta de Gómez consiste en ampliar la aplicabilidad de los diagramas de arbóreos, establecer unos principios a la hora de utilizarlos y resolver así todos los problemas en los que se busque la probabilidad de que ocurra un determinado suceso, subconjunto del espacio muestral, sin necesidad de conocer el Teorema de la Probabilidad Total, y, mediante lo que llama la *renormalización* del diagrama, resolver cualquier problema de probabilidad condicionada sin necesidad de conocer el Teorema de Bayes, de una forma más sencilla desde el punto de vista procedimental.

La renormalización en diagramas arbóreos como alternativa al teorema de Bayes

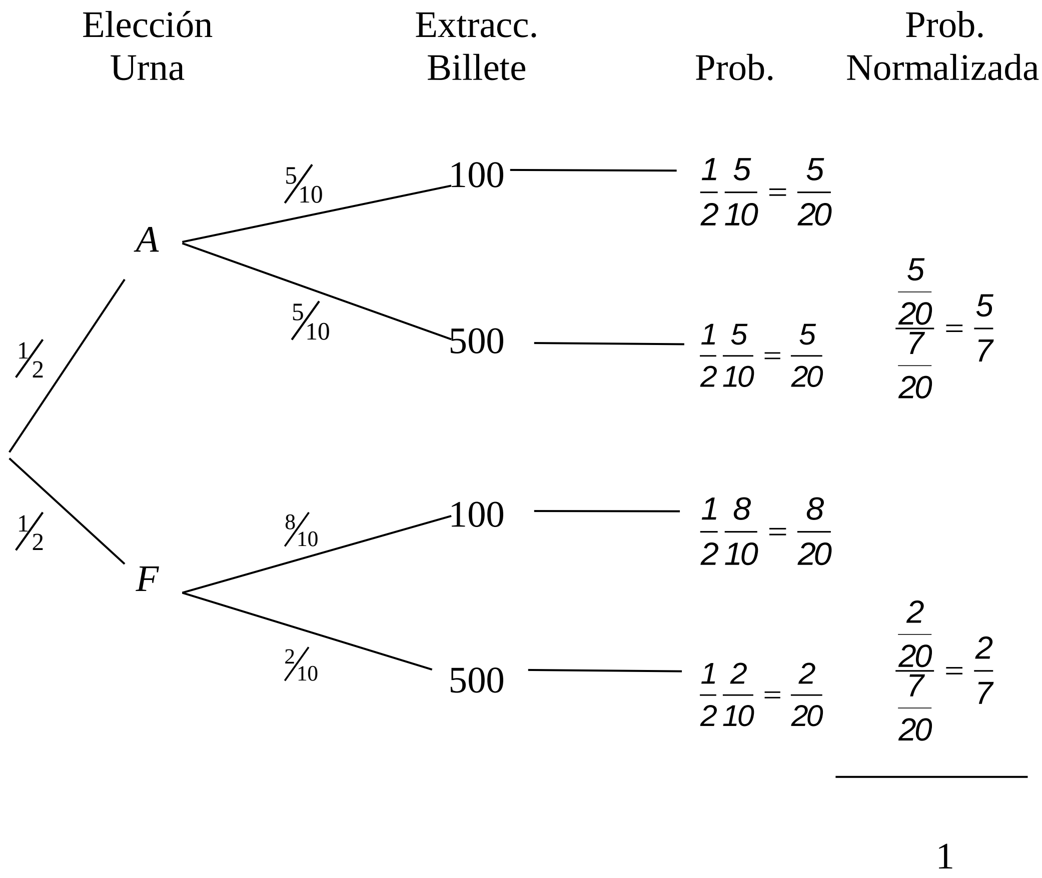
Reproducimos aquí un ejemplo de Gómez (2000), en el que aplica la "renormalización" del diagrama de árbol para calcular la probabilidad condicionada.

Ejemplo

Se dispone de dos urnas idénticas. En el interior de una de ellas hay billetes auténticos (5 billetes de 100 euros y 5 de 500 euros). En el interior de la otra, hay billetes falsos (8 de 100 euros y 2 de 500 euros). Se desconoce en cuál de las dos están los billetes falsos y en cuál, los auténticos. Se elige una urna al azar y extraemos un billete que resulta ser de 500 euros. ¿Cuál es al probabilidad de que sea falso?

Solución:

La probabilidad solicitada es la probabilidad de que haya ocurrido *F* condicionado a que se sabe que ha ocurrido 500.



Referencias bibliográficas

ALMODÓVAR, J. A. et al. (1999): *Órbita 2000*. Matemáticas. Santillana. Madrid.

GODINO, J. et al. (1987): *Azar y probabilidad*. Síntesis. Madrid.

GÓMEZ, S. (2000): *¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos? SUMA*, 35, 55-62.

SERRANO, L. et al. (1996): *Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. Suma*, 22, 43-50.