



## GEOMETRÍA DINÁMICA Y PORCENTAJES. UNA PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Agustín Morales González  
María Dolores Moreno Martel

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

### Resumen

Los porcentajes constituyen un aspecto de las Matemáticas cuyo uso resulta sumamente habitual en la vida diaria. De hecho, están presentes en las transacciones comerciales, en los medios de comunicación, y en otros muchos ámbitos de la vida. Sin embargo, constatamos la poca soltura con la que nuestros alumnos manejan las cuestiones relativas a porcentajes, hecho que quizás se explica por la poca atención que se les presta en la escuela elemental.

Es usual encontrar propuestas de actividades sobre porcentajes que hacen referencia a márgenes comerciales, aumentos o disminuciones del IVA (IGIC), cuestiones sobre disoluciones, distribución de recursos, estadísticas en la prensa, y juegos con porcentajes, tales como dominós y barajas.

Sin embargo, es menos frecuente la consideración de porcentajes en contextos geométricos, si exceptuamos algunas cuestiones referidas a las pendientes de carreteras.

En esta Ponencia se mostrará una serie de actividades, referida a contextos geométricos, en la que está presente tanto la noción de porcentaje, como la de variación porcentual. En todas ellas se ofrece un planteamiento dinámico de la Geometría, esto es estrechamente relacionado con el concepto de función.

### Abstract

Percentages constitute an aspect of Mathematics that is extremely common in daily life. In fact, they are present in commercial transactions,

mass media, and other many scopes of life. Nevertheless, we stated the little ability with which our students handle the questions relative to percentages. Perhaps this fact can be explained by the little attention that Elementary School pays to them.

It is usual to find proposals of activities on percentages that refer to commercial margins, increases or decreases of IVA (IGIC), questions on solutions, distribution of resources, statistics in the press, and games with percentages, such as dominos and decks.

However, the consideration of percentages in geometric contexts is less frequent, if we exclude some aspects referred to slopes of roads.

In this Paper, a series of activities, referred to geometric contexts, in which the notions of percentage and percentage variation are shown. In all the activities a dynamic exposition of Geometry, closely related to the function concept, is offered.

### **Consideraciones generales**

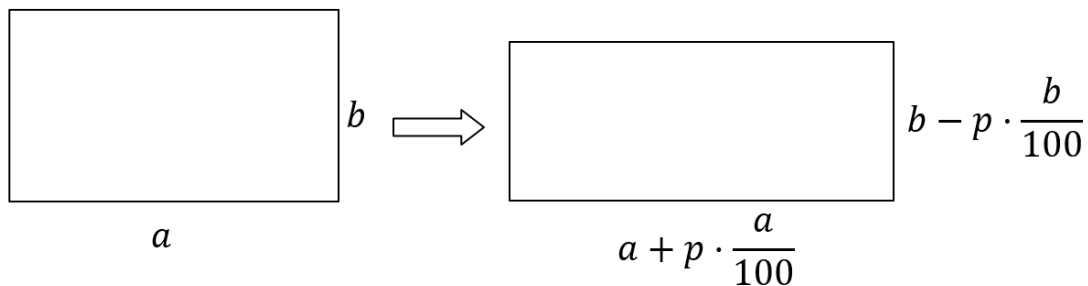
Diversos estudios realizados por autores como Cockcroft (1985), Udina (1989), Hann (1999) y Zurbano (2002), entre otros, muestran la gran dificultad que representa, tanto para el hombre medio, como para los estudiantes universitarios, el manejo de los porcentajes en situaciones de la vida diaria, aún cuando su presencia en los medios de comunicación es muy habitual.

Por otra parte, constatamos el escaso uso que se hace de los porcentajes en contextos geométricos. En esta ponencia, más que realizar reflexiones teóricas y dar recomendaciones generales sobre la enseñanza de los porcentajes, presentamos algunas actividades enmarcadas en el ámbito de la Geometría en las que se requiere utilizar, tanto el concepto de porcentaje, como el de variación porcentual. En todas ellas subyace un planteamiento dinámico de esta parte de las Matemáticas, esto es, estrechamente relacionado con el concepto de función.

Muchas de las actividades las proponemos en nuestras clases con alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria y todas ellas se prestan a la utilización de la Hoja de Cálculo (EXCEL) para la elaboración de tablas y gráficos.

• **El rectángulo de lados variables**

Si la base de un rectángulo experimenta un aumento del  $p$  % y la altura una disminución, también del  $p$  %, ¿qué variación porcentual experimenta el perímetro?



Si simbolizamos mediante las letras  $a$  y  $b$ , las medidas de las longitudes de la base y la altura, respectivamente, del rectángulo inicial, tendremos:

$$P_0 = 2 \cdot (a + b)$$

$$P(p) = 2 \cdot \left[ a \cdot \left( 1 + \frac{p}{100} \right) + b \cdot \left( 1 - \frac{p}{100} \right) \right]$$

$$\Delta P = P(p) - P_0 = \frac{2 \cdot p}{100} \cdot (a - b)$$

$$\Delta P(\%) = \frac{\Delta P}{P_0} \cdot 100 = \frac{a - b}{a + b} \cdot p$$

Si hacemos  $\frac{b}{a} \cdot 100 = m$  (porcentaje que  $b$  representa de  $a$ ), será:

$$\Delta P(\%) = \frac{100 - m}{100 + m} \cdot p \quad [1]$$

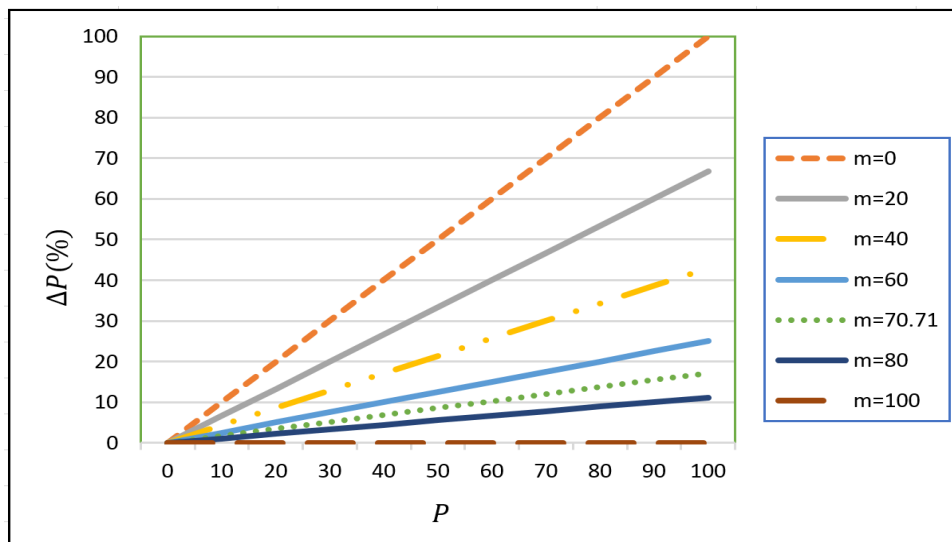
Para  $m = 0$ , tendremos un segmento doble, mientras que para  $m = 100$ , tendremos un cuadrado.

La tabla y la gráfica que siguen corresponden a la expresión [1].

### EL RECTÁNGULO DE LADOS VARIABLES $\Delta P(\%)$

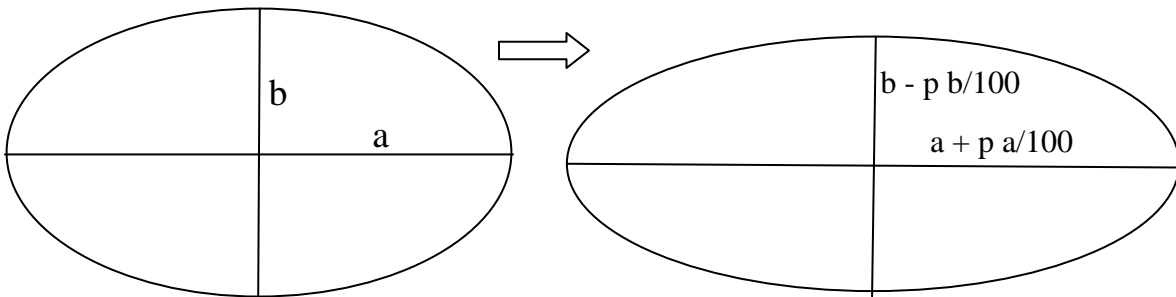
$p$	$m = 0$ Segmento doble	$m = 20$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 70.71$ Rectángulo DIN	$m = 80$	$m = 100$ Cuadrado
0	0	0	0	0	<b>0</b>	0	0
10	10	6.7	4.3	2.5	<b>1.72</b>	1.1	0
20	20	13.3	8.6	5	<b>3.43</b>	2.2	0
30	30	20.0	12.9	7.5	<b>5.15</b>	3.3	0
40	40	26.7	17.1	10	<b>6.86</b>	4.4	0
50	50	33.3	21.4	12.5	<b>8.58</b>	5.6	0
60	60	40.0	25.7	15	<b>10.29</b>	6.7	0
70	70	46.7	30.0	17.5	<b>12.01</b>	7.8	0
80	80	53.3	34.3	20	<b>13.73</b>	8.9	0
90	90	60.0	38.6	22.5	<b>15.44</b>	10.0	0
100	100	66.7	42.9	25	<b>17.16</b>	11.1	0

### RECTÁNGULO DE LADOS VARIABLES



• **La elipse de semiejes variables**

Si el semieje mayor de una elipse experimenta un aumento del  $p\%$  y el semieje menor una disminución, también del  $p\%$ , ¿qué variación porcentual experimenta el área de la superficie limitada por dicha elipse?



Si simbolizamos mediante las letras  $a$  y  $b$ , las medidas de las longitudes de los semiejes de la elipse inicial, tendremos:

$$A_0 = \pi \cdot a \cdot b$$

$$A(p) = \pi \cdot \left(a + a \cdot \frac{p}{100}\right) \cdot \left(b - b \cdot \frac{p}{100}\right) = \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{p^2}{10^4}\right)$$

$$\Delta A = A(p) - A_0 = -\frac{p^2}{10^4}$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100 = -\frac{p^2}{100}$$

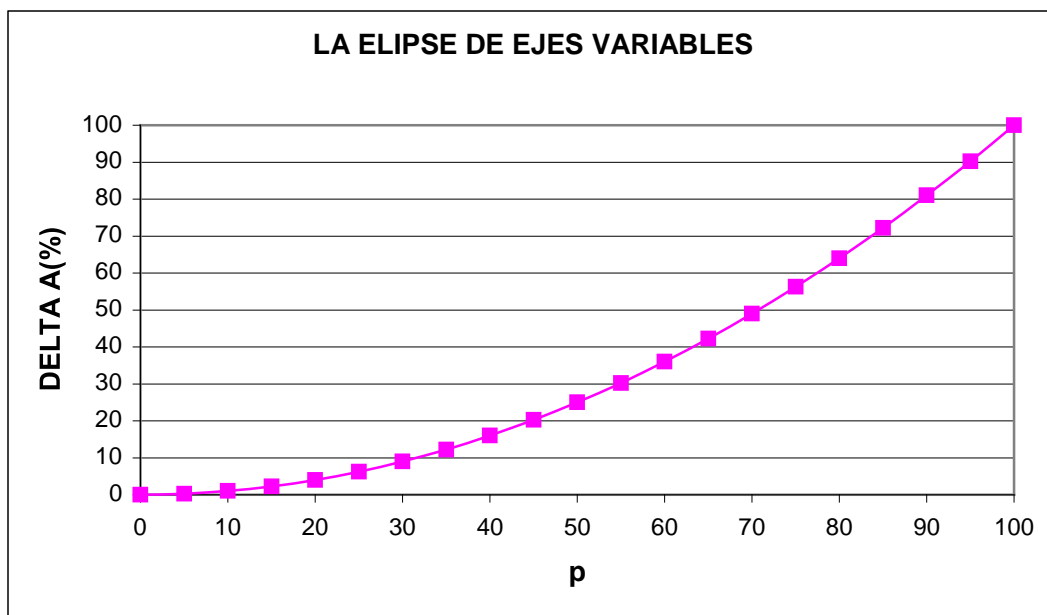
$$|\Delta A(\%)| = \frac{p^2}{100}$$

$$A = \pi \cdot a \cdot b$$

La tabla y la gráfica que siguen corresponden a la expresión [2].

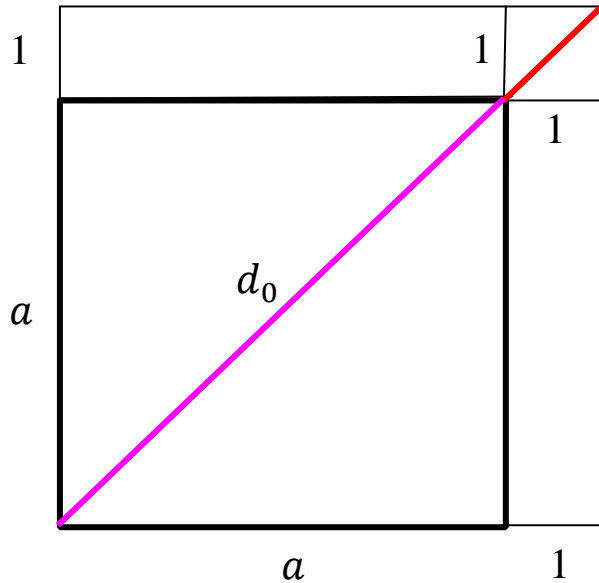
### LA ELIPSE DE SEMIEJES VARIABLES

$p$	$\Delta A(\%) = p^2/100$
0	0
5	0.25
10	1
15	2.25
20	4
25	6.25
30	9
35	12.25
40	16
45	20.25
50	25
55	30.25
60	36
65	42.25
70	49
75	56.25
80	64
85	72.25
90	81
95	90.25
100	100



• **La diagonal del cuadrado**

¿En qué porcentaje aumenta la diagonal de un cuadrado si su lado, de medida  $a$ , aumenta en una unidad?

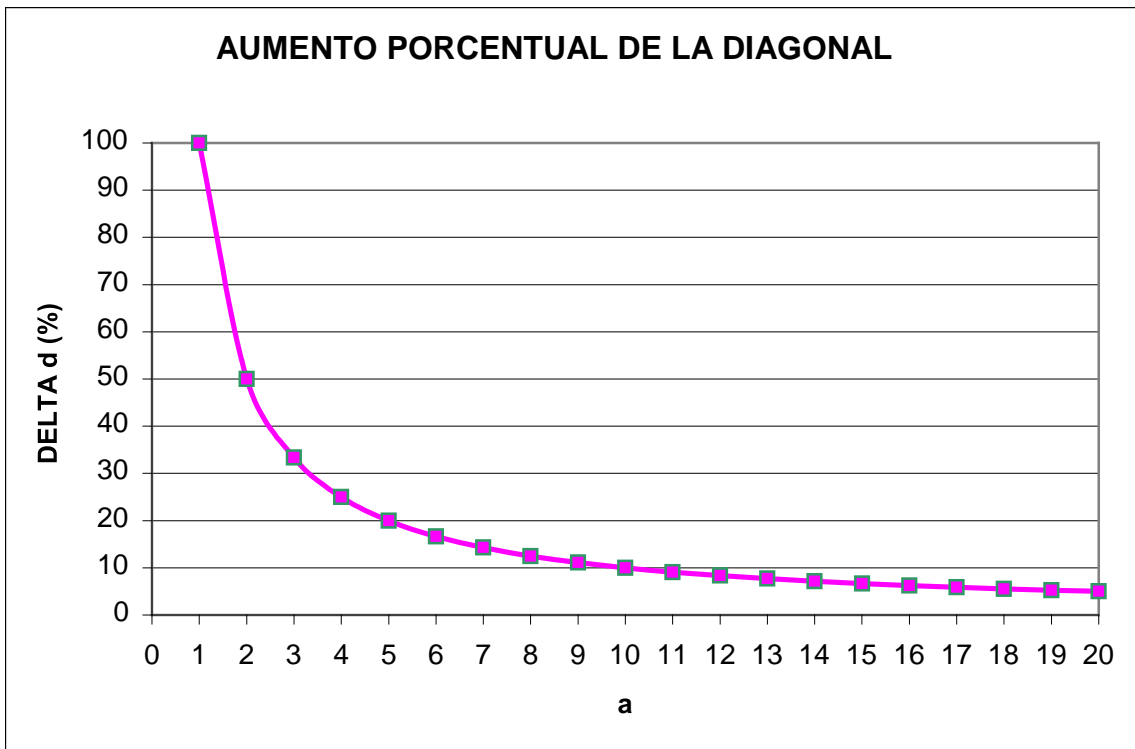


$$d_0 = a \cdot \sqrt{2}$$

$$d_1 = (a + 1) \cdot \sqrt{2}$$

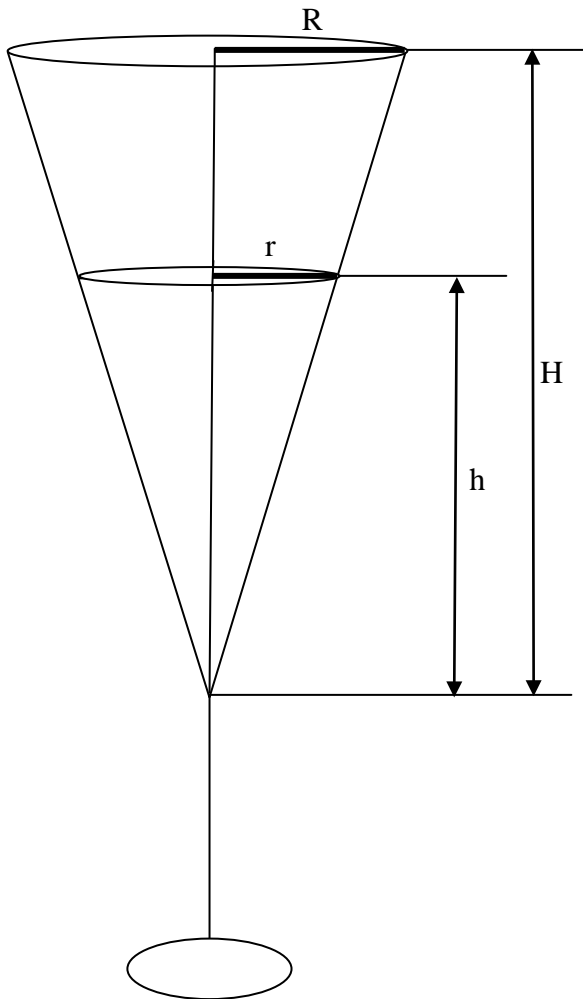
$$\Delta d = d_1 - d_0 = \sqrt{2}$$

$$\Delta d(\%) = \frac{\Delta d}{d_0} \cdot 100 = \frac{100}{a}$$



• **Llenado de una copa de forma cónica**

Sea una copa de cava de forma cónica. Si vertemos cava hasta alcanzar un cierto porcentaje,  $p$ , de la altura de la copa ¿qué porcentaje,  $P$ , de la capacidad total de dicha copa habremos llenado?



$$V_0 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \quad [3]$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad [4]$$

Se verifica:

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$$

Dividiendo [3] entre [4], tenemos:

$$\frac{V(h)}{V_0} = \left(\frac{h}{H}\right)^3, \text{ de donde:}$$

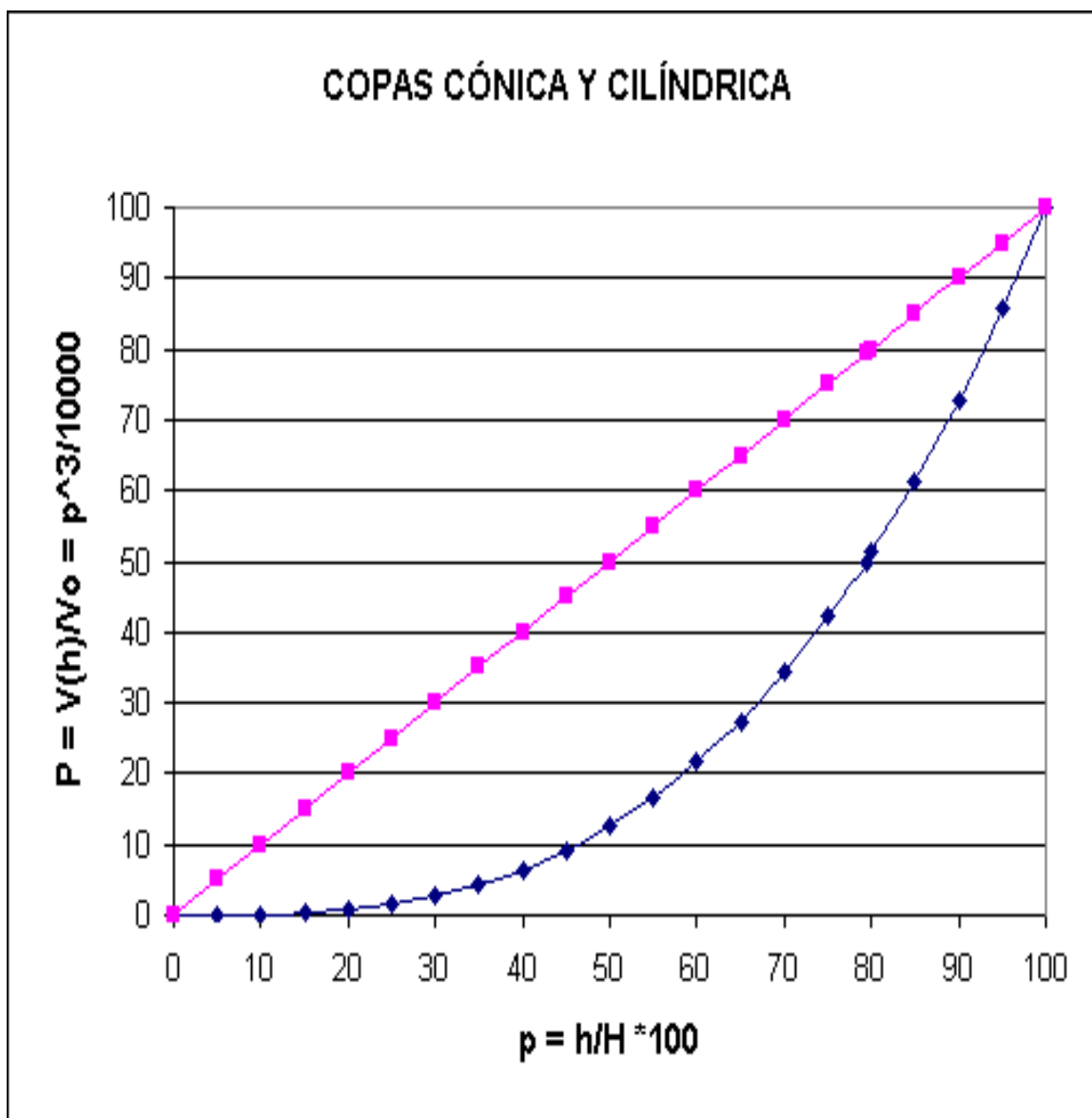
$$\frac{V(h)}{V_0} \cdot 100 = \frac{1}{10^4} \left(\frac{h}{H} \cdot 100\right)^3$$

Si hacemos  $\frac{h}{H} \cdot 100 = p$ , y  $\frac{V(h)}{V_0} \cdot 100 = P$ , será  $P(p) = \frac{1}{10^4} \cdot p^3$  [6]



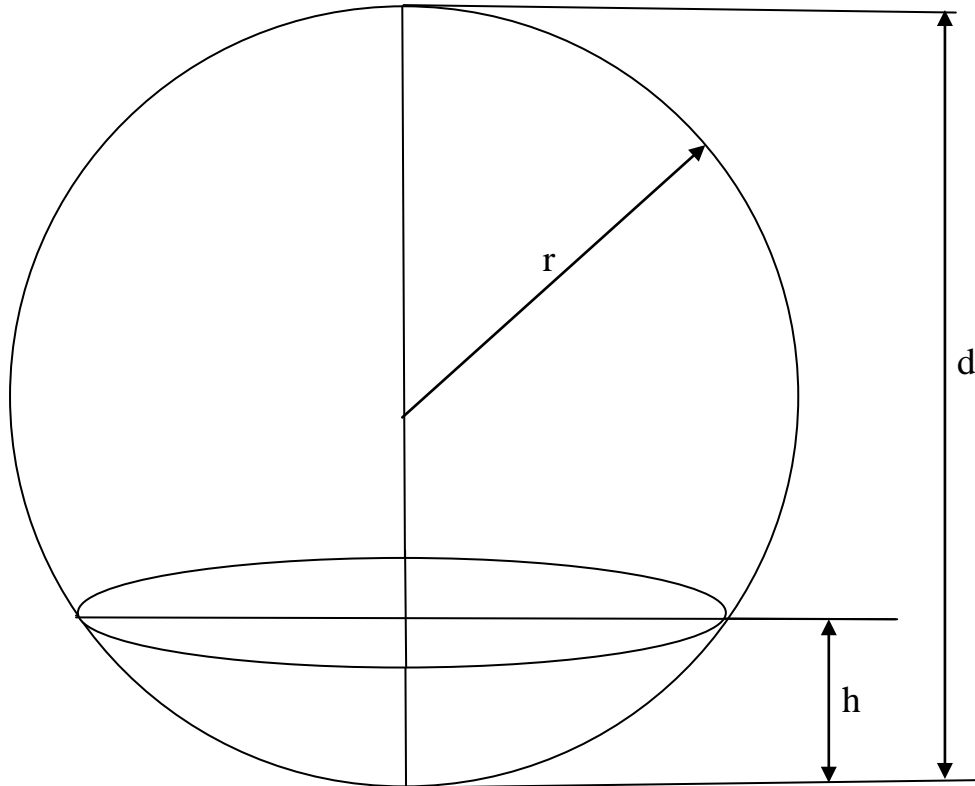
En la tabla y las gráficas que siguen se compara el llenado de una copa cónica con el caso de la copa (vaso) cilíndrica. Para esta última, lógicamente,  $P(p) = p$ .

COPA DE CAVA DE FORMA CÓNICA CILÍNDRICA			COPA
PORCENTAJE DE LA ALTURA	PORCENTAJE DEL VOLUMEN	NÚMERO DE COPITAS	PORCENTAJE DEL VOLUMEN
$p = h/H * 100$	$P = V(h)/V_o * 100 =$ $p^3/10000$		$P = V(h)/V_o * 100 =$ $p$
0	0,00		0
5	0,01	8000	5
10	0,10	1000	10
15	0,34	296,30	15
20	0,80	125,00	20
25	1,56	64,00	25
30	2,70	37,04	30
35	4,29	23,32	35
40	6,40	15,63	40
45	9,11	10,97	45
<b>50</b>	<b>12,50</b>	<b>8,00</b>	<b>50</b>
55	16,64	6,01	55
60	21,60	4,63	60
65	27,46	3,64	65
70	34,30	2,92	70
75	42,19	2,37	75
<b>79,37</b>	<b>50,00</b>	<b>2,00</b>	<b>79,37</b>
80	51,20	1,95	80
85	61,41	1,63	85
90	72,90	1,37	90
95	85,74	1,17	95
100	100,00	1,00	100



• **Llenado de un depósito esférico**

Sea un depósito de forma esférica. Si vertemos líquido hasta alcanzar un cierto porcentaje,  $p$ , de su altura (diámetro) ¿qué porcentaje,  $P$ , de la capacidad total de dicho recipiente habremos llenado?



Resolución:

$$V_0 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot R - h)$$

$$\begin{aligned} \frac{V(h)}{V_0} &= \frac{h^2 \cdot (3 \cdot R - h)}{4 \cdot R^3} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot R}\right)^2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{h}{2 \cdot R}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{h}{d}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{V(h)}{V_0} \cdot 100 = 2 \cdot \left(\frac{h}{d} \cdot 100\right)^2 \cdot \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{300}{2} - \frac{h}{d} \cdot 100\right) \cdot \frac{1}{100}, \text{ es decir,}$$

$$P(p) = \frac{1}{5000} \cdot p^2 \cdot (150 - p)$$

La tabla y la gráfica que siguen reflejan el llenado de un recipiente esférico.

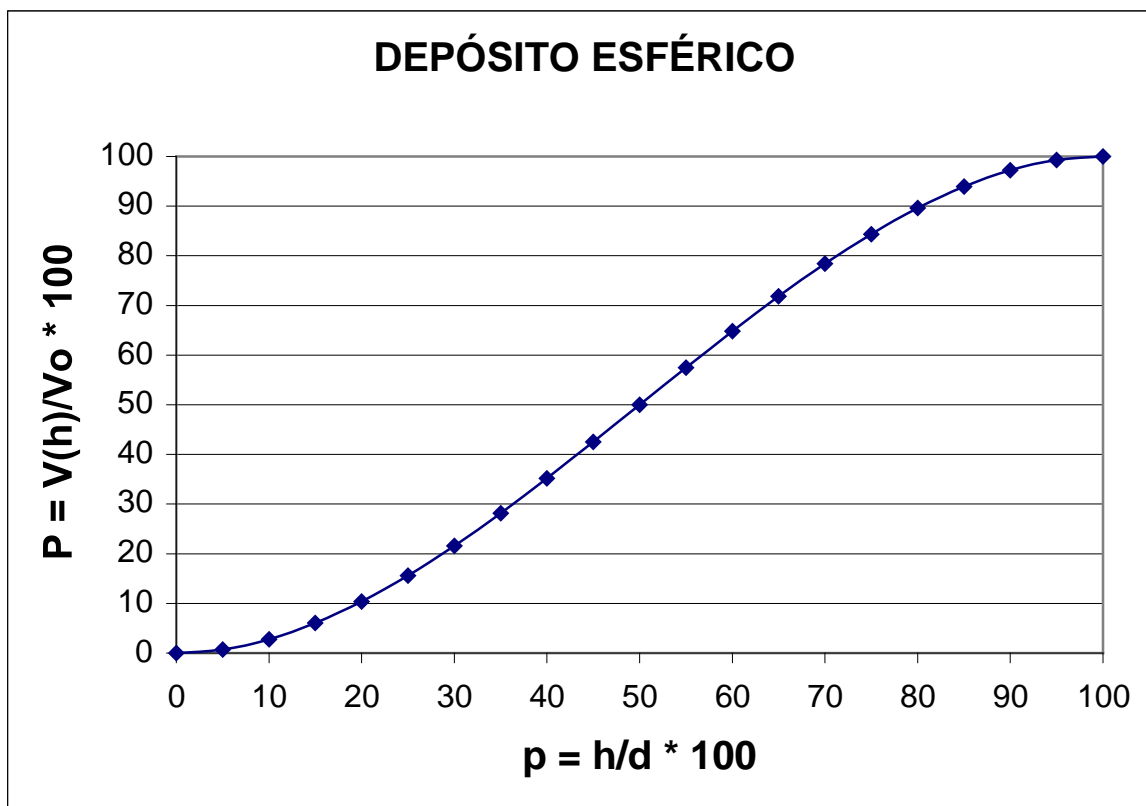
PORCENTAJE DEL DIÁMETRO

$$p = \frac{h}{d} \cdot 100$$

PORCENTAJE DE  $V_0$

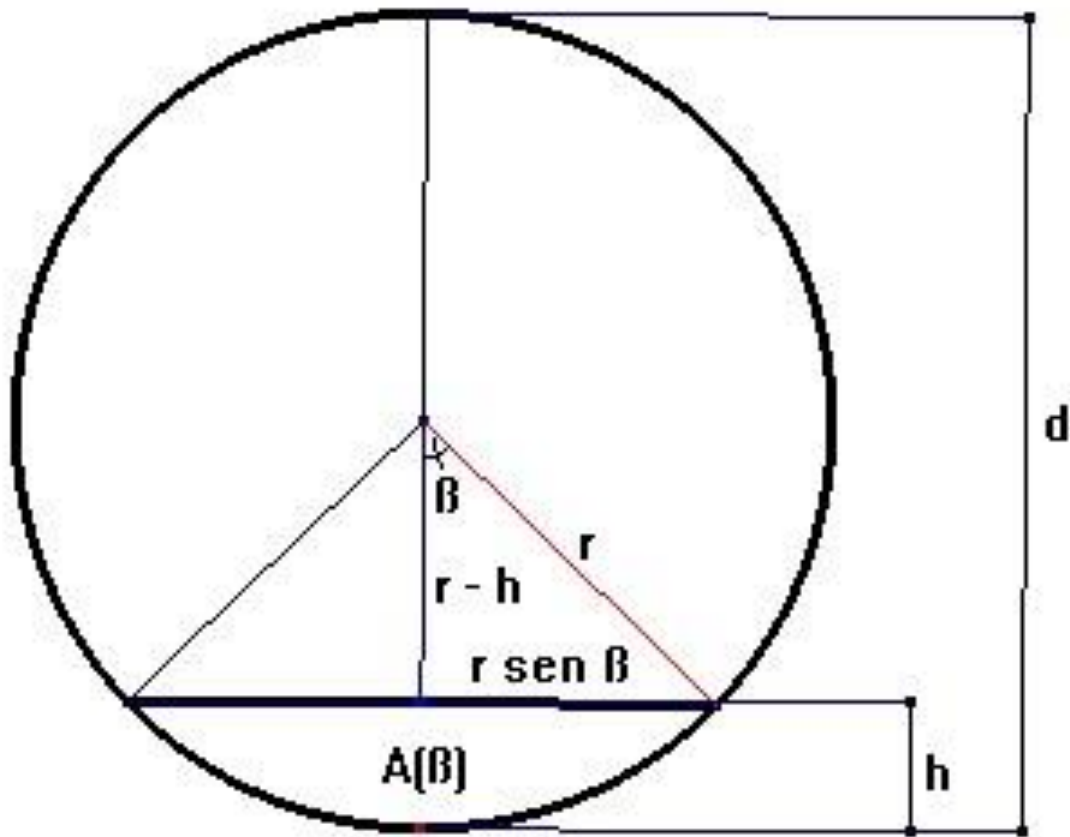
$$P = \frac{V(h)}{V_0} \cdot 100 = \frac{1}{5000} p^2 \cdot (150 - p)$$

0	0,00
10	2,80
20	10,40
30	21,60
40	35,20
50	50,00
60	64,80
70	78,40
80	89,60
90	97,20
100	100,00



• **Llenado de un depósito cilíndrico en posición horizontal**

Sea un depósito de forma cilíndrica que se encuentra en posición horizontal. Si vertemos líquido hasta alcanzar un cierto porcentaje,  $p$ , de su altura (diámetro) ¿qué porcentaje,  $P$ , de la capacidad total de dicho recipiente habremos llenado?



Resolución:

El área  $A(\beta)$  viene dada por la diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo, es decir,

$$A(\beta) = \frac{\pi \cdot r \cdot \beta^2}{180} - r \cdot r \cdot \cos(\beta) \cdot \text{sen}(\beta) = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \beta}{180} - \frac{r^2}{2} \cdot \text{sen}(2\beta)$$

El volumen lleno,  $V(\beta)$ , viene dado por la expresión:  $V(\beta) = A(\beta) l$ , en la que  $l$  representa la longitud del depósito, es decir, la altura del cilindro.

El porcentaje  $P(\beta)$  buscado, viene dado por:

$$P(\beta) = \frac{V(\beta)}{V_0} \cdot 100 = \frac{5}{9} \cdot \beta - \frac{50}{\pi} \cdot \text{sen}(2\beta)$$

La relación entre  $\beta$  y el porcentaje,  $p$ , del diámetro del depósito que alcanza la altura del líquido, la obtenemos sin más que tener en cuenta que:

$$h = r \cdot (1 - \cos(\beta)); \quad \frac{h}{d} = \frac{1 - \cos(\beta)}{2}$$

$$p = \frac{h}{d} \cdot 100 = 50 \cdot (1 - \cos(\beta)); \quad \cos(\beta) = 1 - \frac{1}{50} \cdot p = 1 - \frac{1}{50} \cdot \left(\frac{h}{d} \cdot 100\right)$$

En definitiva, para una altura,  $h$ , que supone un cierto porcentaje,  $p$ , del diámetro,  $d$ , del depósito, el ángulo,  $\beta$ , viene dado por:  $\beta = \arccos\left(1 - \frac{1}{50} \cdot p\right)$

La tabla y la gráfica que siguen reflejan el llenado de este tipo de recipiente.

### DEPÓSITO CILÍNDRICO EN POSICIÓN HORIZONTAL

PORCENTAJE  
DE LA ALTURA

ÁNGULO

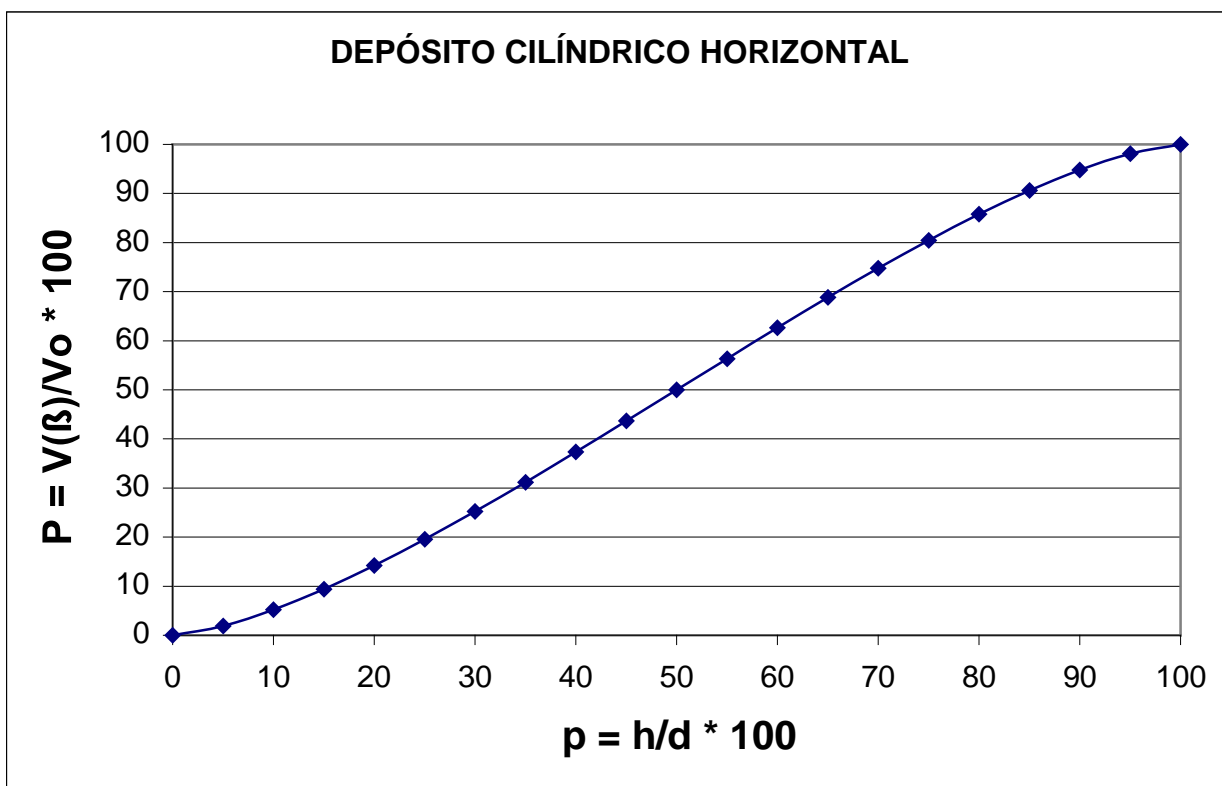
PORCENTAJE  
DEL VOLUMEN

$$p = \frac{h}{d} \cdot 100$$

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{p}{50}\right)$$

$$P = \frac{V(\beta)}{V_0} \cdot 100 = \\ = \frac{5}{9}\beta - \frac{50}{\pi}\text{sen}(2\beta)$$

0	0,000	0,00
5	25,842	1,87
10	36,870	5,20
15	45,573	9,41
20	53,130	14,24
25	60,000	19,55
30	66,422	25,23
35	72,542	31,19
40	78,463	37,35
45	84,261	43,64
50	90,000	50,00
55	95,739	56,36
60	101,537	62,65
65	107,457	68,81
70	113,578	74,77
75	120,000	80,45
80	126,870	85,76
85	134,427	90,59
90	143,130	94,80
95	154,158	98,13
100	180,000	100,00

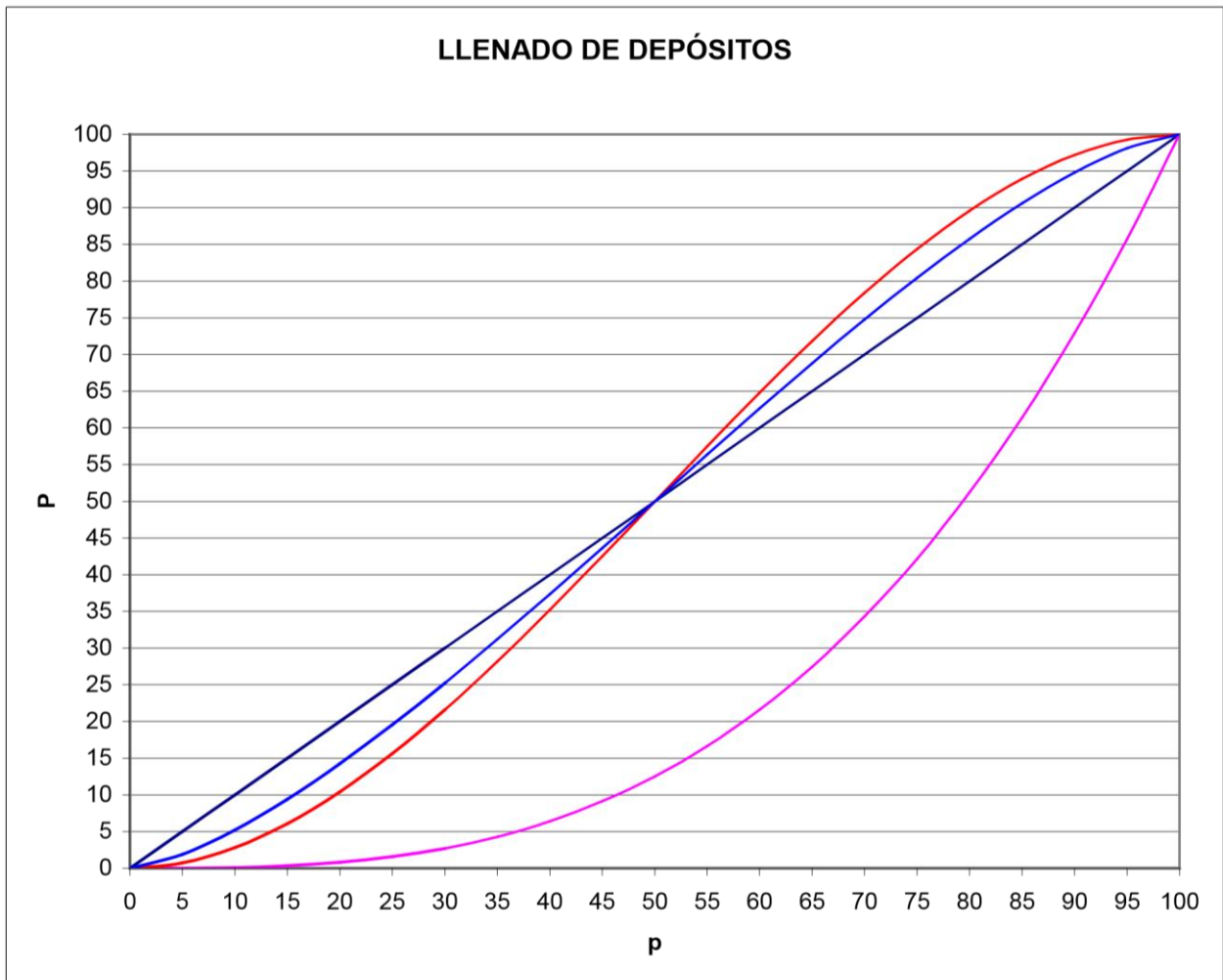


- **Resumen de las tablas y gráficas correspondientes a los diversos tipos de depósitos estudiados**

	DEPÓSITO CILINDRO VERTICAL	DEPÓSITO CÓNICO	DEPÓSITO ESFÉRICO	DEPÓSITO CILÍNDRICO HORIZONTAL
$p$	$P = p$	$P = \frac{1}{10000} p^3$	$P = \frac{1}{5000} p^2$	$P(p)$
0	0	0	0	0,000
5	5	0,013	0,725	1,870
10	10	0,100	2,800	5,200
15	15	0,338	6,075	9,410
20	20	0,800	10,400	14,240
25	25	1,563	15,625	19,550
30	30	2,700	21,600	25,230
35	35	4,288	28,175	31,190
40	40	6,400	35,200	37,350
45	45	9,113	42,525	43,640

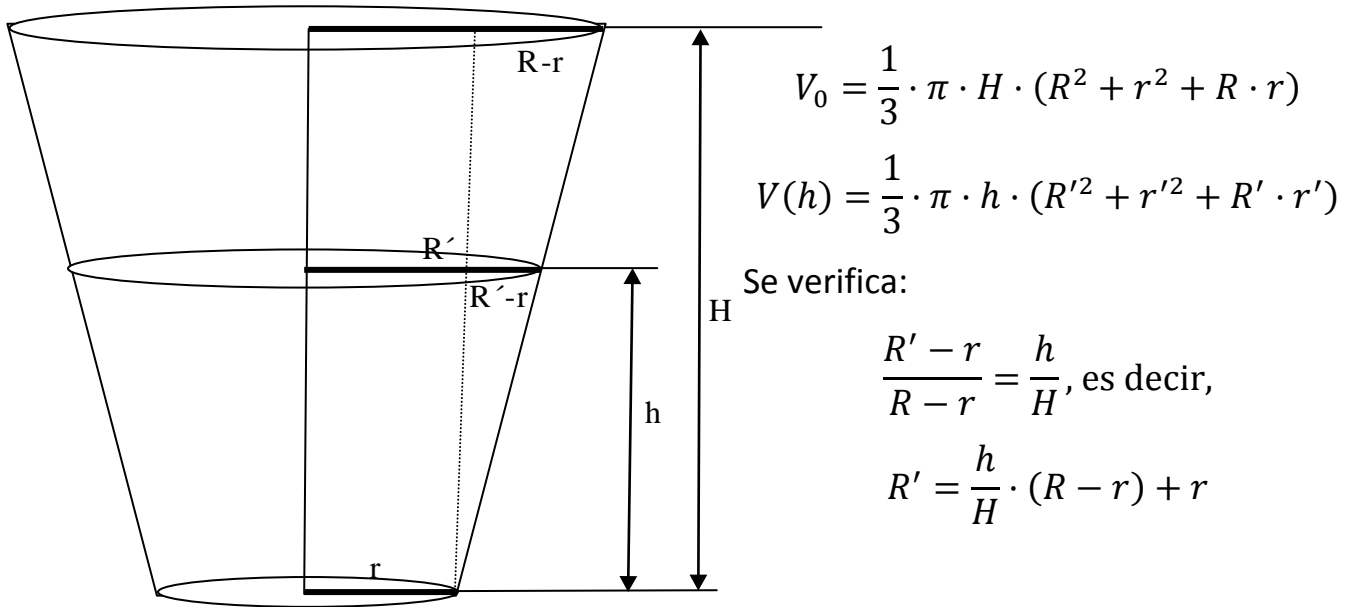


50	50	12,500	50,000	50,000
55	55	16,638	57,475	56,360
60	60	21,600	64,800	62,650
65	65	27,463	71,825	68,810
70	70	34,300	78,400	74,770
75	75	42,188	84,375	80,450
80	80	51,200	89,600	85,760
85	85	61,413	93,925	90,590
90	90	72,900	97,200	94,800
95	95	85,738	99,275	98,130
100	100	100,000	100,000	100,000



• **Llenado de un recipiente troncocónico**

Sea un recipiente de forma troncocónica. Si vertemos líquido hasta alcanzar un cierto porcentaje,  $p$ , de su altura ¿qué porcentaje,  $P$ , de la capacidad total de dicho recipiente habremos llenado?



Sustituyendo la expresión de  $R'$  en la de  $V(h)$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 V(h) &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left\{ \left[ \frac{h}{H} \cdot (R - r) + r \right]^2 + r^2 + \left[ \frac{h}{H} \cdot (R - r) + r \right] \cdot r \right\} = \\
 &= \dots = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \left[ \left( \frac{h}{H} \right)^2 \cdot (R - r)^2 + 3 \cdot \frac{h}{H} \cdot (R - r)r + 3 \cdot r^2 \right].
 \end{aligned}$$

La expresión de  $P(p)$  la obtendremos dado que  $P(p) = \frac{V(h)}{V_0} \cdot 100$

Así, se obtiene:

$$P(p) = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{(R-r)^2}{R^2+r^2+R \cdot r} \cdot p^3 + \frac{3}{100} \cdot \frac{(R-r) \cdot r}{R^2+r^2+R \cdot r} \cdot p^2 + \frac{3 \cdot r^2}{R^2+r^2+R \cdot r} \cdot p.$$

Obsérvese que  $P(0) = 0$  y  $P(100) = 100$ , para cualesquiera  $r$  y  $R$ .

Si ahora consideramos un valor,  $m$ , que representa el porcentaje que  $r$  representa de  $R$ , es decir, si es  $m = \frac{r}{R} \cdot 100$ , haciendo operaciones, tendremos:

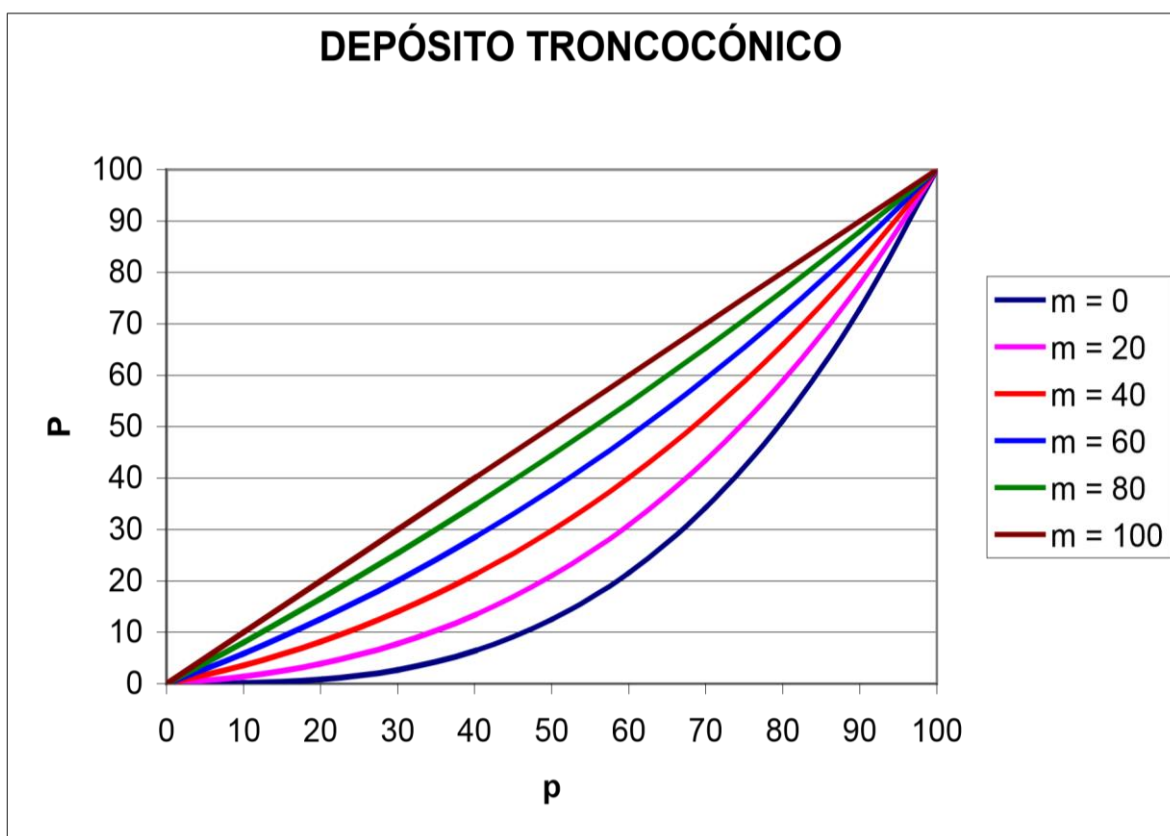
$$P(p, m) = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{10^4 - 200m + m^2}{10^4 + 100m + m^2} \cdot p^3 + \frac{3}{100} \cdot \frac{100m - m^2}{10^4 + 100m + m^2} \cdot p^2 + \frac{3m^2}{10^4 + 100m + m^2} \cdot p.$$

Para  $m = 0$  (cono), se tiene:  $P(p) = \frac{1}{10^4} \cdot p^3$ , mientras que para  $m = 100$  (cilindro), se tiene  $P(p) = p$ .

Si consideramos valores crecientes de  $m$ , por ejemplo  $m = 0, 20, 40, 60, 80, y 100$ , tendremos para  $P(p)$  las curvas que siguen. Como puede observarse, estas curvas son del mismo tipo que las denominadas “Curvas de Lorenz” que se usan en Economía y Ciencias Sociales.

### DEPÓSITO TRONCOCÓNICO

$p$	$m=0$ $P$	$m=20$ $P$	$m=40$ $P$	$m=60$ $P$	$m=80$ $P$	$m=100$ $P$
0	0	0	0	0	0	0
10	0,1	1,406	3,562	5,886	8,067	10
20	0,8	3,897	8,185	12,555	16,538	20
30	2,7	7,781	14,008	20,057	25,421	30
40	6,4	13,368	21,169	28,441	34,728	40
50	12,5	20,968	29,808	37,755	44,467	50
60	21,6	30,890	40,062	48,049	54,649	60
70	34,3	43,445	52,069	59,371	65,284	70
80	51,2	58,942	65,969	71,771	76,380	80
90	72,9	77,690	81,900	85,298	87,949	90
100	100	100	100,00	100,00	100,00	100



## Referencias bibliográficas

- ALSINA, C. (1998): *Contar bien para vivir mejor*. Rubes. Barcelona.
- ALSINA, C. et al. (1992): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Síntesis. Madrid.
- (1996): *Enseñar Matemáticas*. Graó. Barcelona.
- (1997): *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Síntesis. Madrid.
- CASTELNUOVO, E. (1975): *Didáctica de la Matemática Moderna*. Trillas. México.
- COCKCROF, W.H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan*. MEC. Madrid.
- CORBALÁN, F. (1998): *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*. Graó. Barcelona.
- CHEVALLARD, Y. et al. (1997): *Estudiar Matemáticas*. ICE-Horsori. Barcelona.
- HANN, C. (1999): Relacionar la enseñanza de las Matemáticas con el mundo extraescolar. *Uno*, 19, 105-113.
- UDINA, F. (1989): *Aritmética y calculadoras*. Síntesis. Madrid.
- ZURBANO, E. (2002): Los porcentajes y su interpretación, en Penalva. M.C.
- et al. (Eds.). *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*, 265-277. Universidad de Alicante.

