FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA IV
ISSN: 1695-6613

LA ECUACIÓN CUADRÁTICA: PERSPECTIVA HISTÓRICA

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Este trabajo es una ampliación de otro, publicado en 1999 por la U.L.L., con el nombre de *La ecuación de segundo grado a través de la historia*. Entre las nuevas aportaciones están las contribuciones de Bar-Hiyya (1070-1136) y Descartes (1596-1650) a la resolución de la ecuación de segundo grado. Al final se proponen unos cuantos ejercicios.

Abstract

This paper is an amplification of another one, published in 1999 by U.L.L., with the name of *La ecuación de segundo grado a través de la historia.* Among the new contributions are the ones of Bar-Hiyya (1070-1136) and Descartes (1596-1650) to the resolution of the second degree equation. At the end, some exercises are proposed.

Introducción

En este capítulo tratamos de hacer un pequeño recorrido histórico con el fin de mostrar la manera tan ingeniosa que tenían algunas culturas para resolver la ecuación de segundo grado. Empezaremos por la antigua Babilonia, y, sin pretender hacer un estudio exhaustivo de las diversas aportaciones hechas por las diferentes culturas, en las distintas épocas, terminaremos con una sencilla resolución geométrica debida a Descartes.

Finalmente, haremos unas consideraciones generales con el fin de hacer ver que, sólo mediante la formación de un cuadrado (geométrico o algebraico), se puede resolver, fácilmente, la ecuación cuadrática sin necesidad de recurrir a su fórmula general.

La antigua Babilonia

El descubrimiento de una gran cantidad de tablillas de arcilla con caracteres cuneiformes en la antigua Babilonia (1.800 al 1.600 a. C.) y la posterior interpretación de esta singular escritura, desde el punto de vista matemático (Neugebauer, 1929-30; Sachs, 1948), han permitido constatar que los antiguos babilonios sabían resolver ecuaciones de segundo grado del tipo siguiente:

$$x^2 + q = px;\ p, q > 0,$$

utilizando la suma y el producto de sus raíces:

$$x_1 + x_2 = p,\ x_1 x_2 = q.$$

Con estos datos determinaban la semidiferencia de las raíces:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \text{; de donde } \frac{(x_1 - x_2)}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q,$$

para luego establecer un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas (precisamente el más simple de todos):

(1) $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p}{2}$

(2) $\frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$

Sumando y restando (1) y (2), obtenían las dos soluciones; esto es,

(3) $x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Ejemplos:

$x^2 + 7 = 8x;$

$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4;$

$\frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3;$

$x_{1,2} = 4 \pm 3.$

Observando (3) se puede ver con facilidad que sólo aparecen soluciones positivas.

Veamos otro ejemplo:

$3x^2 + 1 = 5x.$

Para reducir a la unidad el primer coeficiente, los antiguos babilonios, en lugar de dividir por 3, multiplicaban por 3. Así:

$(3x)^2 + 3 = 5(3x)$, y haciendo $3x = z$, se tiene $z^2 + 3 = 5z$, que da para z:

$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, con lo que

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Por otro lado, creo interesante incluir en este apartado un problema, tomado de una de las tablillas de arcilla mencionadas, que aparece en la pág. 27 del vol. I de la *Historia de la Matemática* de J. Rey Pastor y J. Babini. El enunciado es como sigue:

"Largo y ancho. He multiplicado largo y ancho y he obtenido el área. He agregado al área el exceso del largo sobre el ancho: 183; además, he sumado largo y ancho: 27. Se pide largo, ancho y área".

Planteando el problema con simbolismo actual resulta:

$$xy + x - y = 183$$
$$x + y = 27.$$

Aunque sumar áreas con longitudes es, a todas luces, un absurdo, supondremos que se trata de un cálculo puramente numérico. En la tablilla aparece la suma de 183 y 27, o lo que es lo mismo: $xy + 2x = x(y + 2) = 210$, y, además, se agrega 2 a la segunda ecuación; esto es, $x + (y + 2) = 29$,
resultados que no son otra cosa que el producto y la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado, con los que se pasa, fácilmente, al sistema lineal:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{29}{2}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210} = \frac{1}{2},$$

y a las soluciones: $x_1 = x = \frac{30}{2} = 15, x_2 = y + 2 = \frac{28}{2} = 14 \Rightarrow y = 12$ y 180 como valor numérico del área.

Por simetría se puede determinar otra terna de soluciones: 14,13 y 182, que no aparece en la tablilla.

La ecuación de segundo grado en el antiguo Egipto

En el papiro Rhind o papiro de Ahmes, escriba que lo copió hacia el 1.650 a. C., no existe ningún problema que dé lugar a una ecuación de segundo grado; sin embargo, en los papiros de Kahun y de Berlín, pertenecientes a la XII Dinastía (ca.1991-1778 a. C.), sí que aparecen. Uno de ellos, que se encuentra en ambos papiros, es el siguiente:

"Una superficie, de 100 unidades cuadradas, puede ser representada como suma de dos cuadrados, cuyos lados están en la relación *1:3/4*. Determinar los lados de dichos cuadrados". Con los símbolos actuales el problema se plantearía del siguiente modo:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

A simple vista se advierte que los valores 1 y ¾ no satisfacen a la primera ecuación; por tanto, habrá que sustituirlos por valores proporcionales a los mismos; esto es, k y $3k/4$, resultando:

$$\frac{25}{16}k^2 = 100$$

que da para k el valor 8, y, por tanto, $x = 8$ unidades e $y = 6$ unidades.

"El arte matemático en nueve capítulos"

El arte matemático en nueve capítulos o *Jiuzhang suanshu* es una compilación de problemas matemáticos de la antigua China de autor desconocido. No contiene demostraciones y se le considera como el equivalente a los *Elementos* de Euclides. Los historiadores no se ponen de acuerdo sobre la fecha en que fue escrito, ya que algunos comentaristas, de distintas épocas, le incorporaban nuevos problemas; sin embargo, la mayoría lo sitúa entre el s. II a. C. y el s. III d. C.

El problema 11 del capítulo 9 trata sobre el cálculo de las dimensiones de una puerta conocida la diagonal y la diferencia entre el largo y el ancho. Con nomenclatura actual se puede plantear del siguiente modo:

$$x^2 + y^2 = d^2, \qquad y - x = k$$

Sólo aparece para su resolución la siguiente fórmula:

$$(1) \quad x_{1,2} = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}} \pm \frac{k}{2}$$

¿Cómo fue obtenida? — Probablemente, siguiendo el mismo camino de las antiguas civilizaciones babilónicas para resolver una ecuación cuadrática; esto es,

$$(y+x)^2 = d^2 + 2yx; \quad (y-x)^2 = k^2 = d^2 - 2yx \;\Rightarrow\; 2yx = d^2 - k^2,$$

de donde resulta el siguiente sistema lineal:

$$(2) \quad \frac{y+x}{2} = \frac{\sqrt{2d^2 - k^2}}{2} = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}$$

$$(3) \quad \frac{y-x}{2} = \frac{k}{2},$$

que da lugar a la expresión (1) sumando y restando (2) y (3).

Diofanto de Alejandría (s. III)

Diofanto fue un famoso algebrista griego: su obra más importante: *Arithmetica*.

Con él se pasa del álgebra retórica a la sincopada.

Prescindiendo de los tres casos triviales de la ecuación de 2º grado, Diofanto halló la solución general de cada uno de estos tres tipos:

I) $ax^2 + bx = c$

II) $ax^2 = bx + c$

III) $ax^2 + c = bx$, siendo $a,b,c > 0$.

Tampoco admitía soluciones negativas, teniendo cada uno de estos casos su propio método de resolución. Así,

$$(I) \quad x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}}{2}$$

$$(II) \quad x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} + \frac{b}{2}}{2}$$

$$(III) \quad x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} + \frac{b}{2}}{2}, \quad \text{para} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq ac.$$

Los Hindúes

Con Brahmagupta (ca. 598-ca. 670), se redujeron los distintos casos de Diofanto a uno sólo. Los hindúes fueron los primeros en dar las raíces por parejas, y admitieron, ocasionalmente, las raíces negativas como soluciones de la ecuación.

Bhaskara (s. XII) estableció la condición para que los radicales dobles se pudieran convertir en sencillos; esto es, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}}{2} \pm \frac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}}{2}$; y, por tanto, $a^2 - b$, ha de ser un cuadrado perfecto.

Los árabes

Al-Khowarizmi (s. IX), en *Hisab Al-jabr wa'l muqabalah* o Libro de la restauración y la reducción, consideraba, fundamentalmente, los tres

tipos de ecuaciones de segundo grado que vamos a ver a continuación. Para la resolución de las mismas utilizaba, normalmente, un método puramente geométrico (formación de un cuadrado)

1. Primer tipo: $x^2 + px = q$; $p,q > 0$

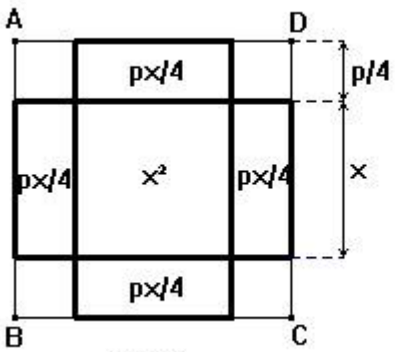


Fig. 1

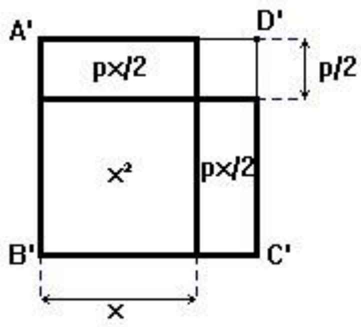


Fig. 2

Del cuadrado ABCD de la fig. 1 se desprende:

$L = BC = \frac{p}{4} + x + \frac{p}{4} = x + \frac{p}{2}$; de donde, $L^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 4 \cdot \frac{px}{4} + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2$, (la suma del cuadrado de lado x y los cuatro rectángulos, cada uno de los cuales es de área $\frac{px}{4}$ da lugar al primer miembro de la ecuación considerada; y si, 4 además, sumamos a este resultado los cuatro cuadraditos de las esquinas tendremos el cuadrado de lado L); simplificando, resulta:

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$, que, como se ve, siempre es positiva.

Los árabes tampoco consideraban las raíces negativas.

También utilizaban el cuadrado de la fig. 2 con el que se llega al mismo resultado anterior, pero de un modo más sencillo.

2. Segundo tipo: $x^2 = px + q$; $p, q > 0$

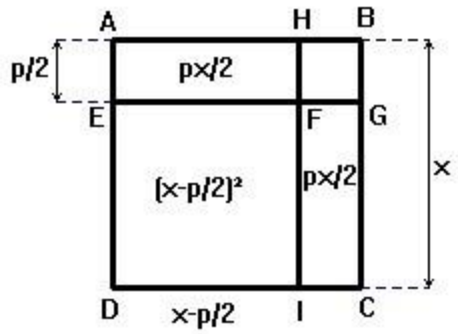


Fig. 3

Formaremos el cuadrado hacia adentro, tal como se indica en la fig. 3: AB = x, AE = IC = $p/2$; área (AG) = área (CH) = $px/2$, área (EI) = $(x\text{-}p/2)^2$, l=DI=x-$p/2$, de donde

$$l^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 - 2\frac{px}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

con lo que

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \text{ será siempre positivo.}$$

3. Tercer tipo, $x^2 + q = px$; $p, q > 0$,

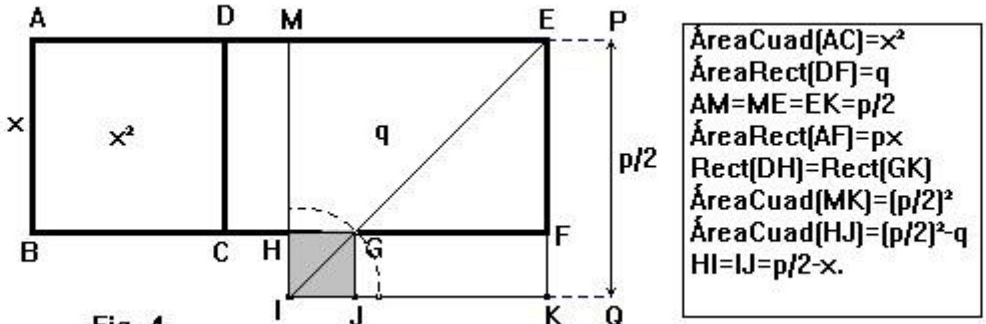


Fig. 4

Al-Khowarizmi utilizaba las dos figuras que siguen, las cuales son de marcada influencia griega (*Elementos* de Euclides, Libro II, proposiciones 5-6), para resolver este tercer tipo.

En el cuadro adjunto a la fig. 4 se explica todo el proceso. Siguiendo a los clásicos hemos determinado los rectángulos (y por consiguiente los cuadrados) mediante su diagonal. El arco que pasa por G, sirve para señalar lo que Euclides llama el *gnomon* (término conocido ya por los pitagóricos), que en este caso es la figura que hay que añadir al cuadrado sombreado para obtener el cuadrado de diagonal MK.

Veamos un ejemplo: $x^2+5 = 6x$.

El área del cuadrado sombreado nos resolverá el problema:

$$(3 - x)^2 = 3^2 - 5 = 4 \Rightarrow x = 3 - 2 = 1.$$

Pero como este tipo de ecuación admite dos raíces positivas, para determinar la que falta habrá que modificar la fig. 4. El punto medio de AE que antes era exterior a AD, ahora es interior (fig. 5).

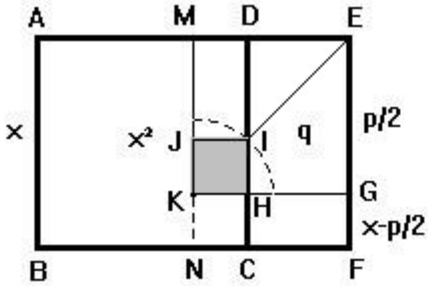


Fig. 5

ÁreaCuad(AC)=x^2
ÁreaRect(DF)=q
ÁreaRect(AF)=px
M es el p.m. de AE
AM=ME=EG=p/2
AD-AM=MD=JI=x-p/2
ÁreaCuad(JH)=$(p/2)^2$-q.

El área del cuadrado sombreado resolverá el problema:

$(x-3)^2 = 3^2 - 5 = 4 \Rightarrow x = 2 + 3 = 5.$

Cuando M se confunda con D las raíces coincidirán; o sea, $x = x_1 = x_2 = \frac{p}{2}$.

Para este tercer tipo, $x^2 + q = px$, Al-Khowarizmi utilizaba también la siguiente identidad:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = (p-x)x = px - x^2 = q \Rightarrow \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

de donde $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ con $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q$, y que, en realidad, no es otra cosa que la formación de un cuadrado algebraico:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q.$$

Abraham bar Hiyya Na-Nasi (1070-1136)

Abraham bar Hiyya, que nació en Barcelona y murió en la Provenza, no sólo se distinguió como matemático y astrónomo, sino también como filósofo, traductor de obras islámicas al hebreo y comentarista de textos rabínicos. Se le conocía por el sobrenombre hebreo Na-Nasi (el príncipe) y por el latino

Savasorda, probablemente por el cargo oficial que desempeñaba, Sahib-al-Surta (jefe de la guardia).

De entre sus obras destaca *Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret* (Libro sobre la medida y el cálculo), escrito en hebreo y traducido al latín por Platón de Tívoli (Plato Tiburtinus), en fecha que no ha sido precisada (bien de 1116-1138, o bien de 1134-1145), con el nombre de *Liber embadorum*.

Pues bien, bar Hiyya estudia en la obra citada, además de un conjunto de fórmulas útiles para el cálculo de áreas de terrenos y solares (y de otras tantas para volúmenes de cuerpos geométricos), los distintos casos de resolución de la ecuación de segundo grado, tanto numérica como gráficamente.

Un ejemplo de dicho libro es el siguiente: «La diferencia entre el área de un cuadrado y la suma de sus cuatro lados es 21 codos, ¿cuál es su área y la longitud del lado?». Con nomenclatura actual, llamando x al lado, el problema lo podríamos plantear así: $x^2 - 4x = 21$, de donde, fácilmente, formaríamos el siguiente cuadrado:

$x^2 - 4x + 4 = 21 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 25 \Rightarrow x = 2 \pm 5$. Sólo tuvo en cuenta la solución positiva; esto es, el valor 7.

También estudió otros problemas, que se planteaban mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que daban lugar a una ecuación de segundo grado.

La figura que sigue es la portada del libro citado traducido del hebreo al catalán por J. Millás i Vallicrosa y editado y programado por Miquel Guttmann.

ABRAAM BAR HIIA

LLIBRE
DE GEOMETRIA

Hibbur hameixihà uehatixbòret

SEGONS EL TEXT EDITAT I PROLOGAT PEL
DR. MIQUEL GUTTMANN

VERSIÓ DE L'HEBREU PER
J. MILLÀS I VALLICROSA
PROFESSOR D'HEBREU A LA UNIVERSITAT DE MADRID

BARCELONA
EDITORIAL ALPHA
1931

François Viète (1540-1603)

Con François Viète, latinizado Vieta, los métodos analíticos sustituyen a los geométricos. Sin embargo su álgebra, a la que él llama "ars

analytica", no es del todo simbólica, ya que anda a caballo entre ésta y la sincopada. Así la ecuación, $x^2 + px = q$, la escribiría como sigue:
A quad. + P in A, aequatur Q plano (empleaba letras mayúsculas: vocales para las incógnitas y consonantes para las constantes, el cuadrado lo representaba por *quadratus*, abreviado *quad.*, el signo del producto por *in* , y el signo igual por *aequatur* (es igualado por); además, le daba una dimensión a cada constante para que la ecuación resultase homogénea). Además, no tuvo en cuenta las raíces negativas ni las imaginarias.

Veamos, con otra nomenclatura, su manera de resolver una ecuación de segundo grado. Sea

(1) $x^2 + px+q = 0$

y hagamos $x = u + v$**,** que sustituida en (1) da

(3) $u^2 +(2v+ p)u+(v^2 + pv+q)=0$.

Seguidamente, se anula el coeficiente de u para transformar (3) en una ecuación de tipo trivial, que en este caso es un cuadrado algebraico:

$$v = -\frac{p}{2};\ u^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Rightarrow u = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Sustituyendo en x los valores obtenidos para u y v, tendremos, finalmente,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Ejemplo: $x^2 + 6x-1= 0$; sustituyendo x por $u+v$,
se tiene:

$u^2 + (6 + 2v)u + v^2 + 6v -1= 0$; anulando el coeficiente del segundo término, se obtiene para v el valor *–3,* que sustituido en el término independiente da por resultado *–10;* por lo que,

$$u^2 = 10 \Rightarrow u = x - v = \pm\sqrt{10} \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{10}\,.$$

Para Vieta, sólo valdría la solución positiva, o sea, $\sqrt{10} - 3$.

Hemos creído interesante consignar este cambio de variable, ya que también fue utilizado (y se sigue utilizando) para eliminar el segundo término en las ecuaciones de tercero y cuarto grados.

René Descartes (1596-1650)

René Descartes, matemático, físico y filósofo. *El Discurso del Método (Discours de la Méthode)*, una de sus principales obras, se imprimió por primera vez en Leyden (Holanda)[1], en 1637. Iba seguido de tres ensayos: *La Dióptrica, Los Meteoros* y *La Geometría*.

Descartes trata, en el libro primero de su Geometría, problemas que pueden resolverse mediante el trazado de rectas y circunferencias. No utiliza otros teoremas que el de Pitágoras (no citado con este nombre por Descartes) y el de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes. Teoremas que utiliza para determinar las soluciones positivas de la ecuación de segundo grado, que vienen dadas, como veremos a continuación, mediante segmentos rectilíneos.

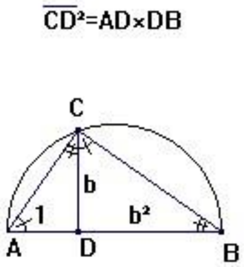


Fig. 6

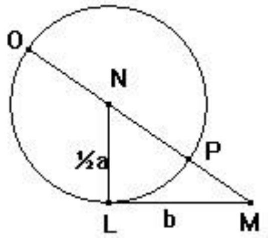


Fig. 7

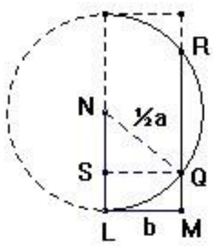


Fig. 8

Las ecuaciones que tienen, al menos, una solución positiva responden a uno de estos tres tipos:

1º) $z^2 = az + b^2$; $a, b > 0$

En la fig. 7, $z^1 =$ MO. (La solución negativa es $z_2 = PM$, rechazada por Descartes por considerarla *falsa* o *absurda).* La justificación de esta construcción es inmediata; bastaría con aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo *LMN*, donde $MN = z - a/2$.

2º) $z^2 + az = b^2$

La fig. 7 también resuelve el problema. La solución positiva es $z_1 = PM$. El valor de *MN* sería ahora $z + a/2$. ($z_2 = MO$, correspondería a la solución negativa).

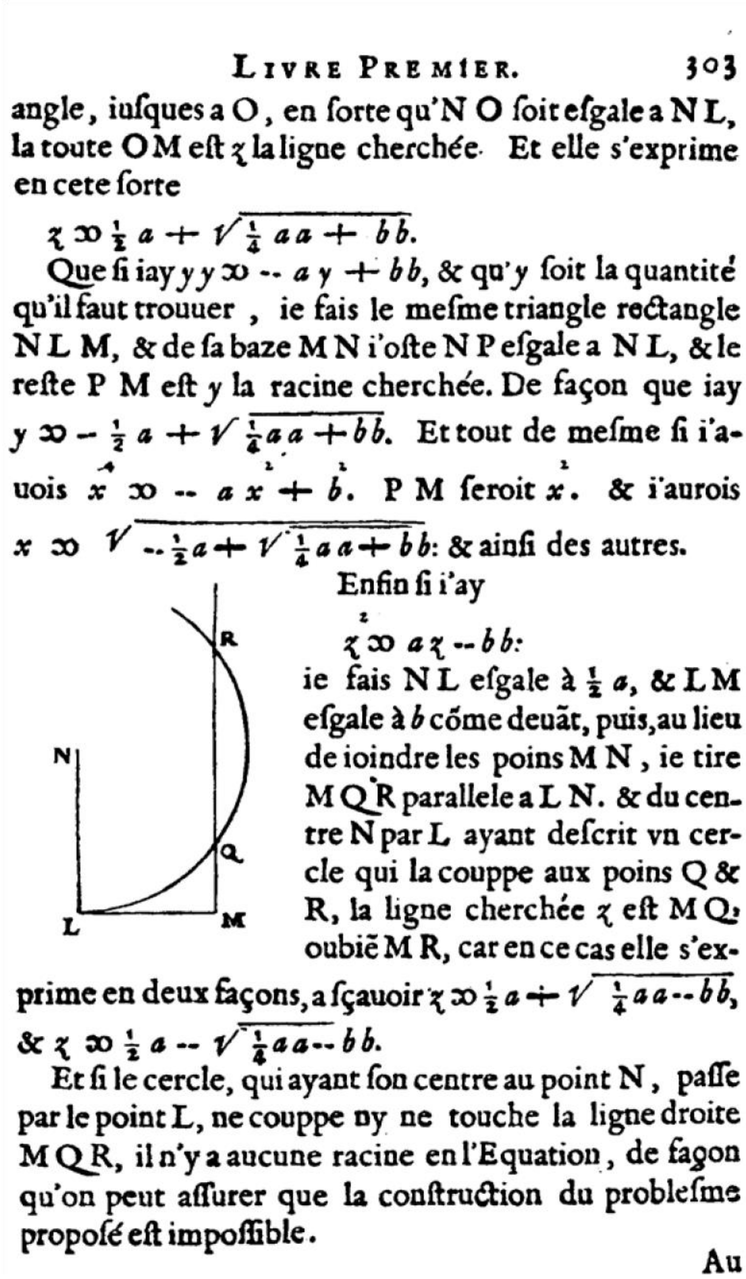
3º) $z^2 + b^2 = az$

En este caso, fig. 8, $z_1 = MR$ y $z_2 = MQ$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo NQS, se tiene: $(½a - z)^2 + b^2 = (½a)^2$, o también $(z - ½a)^2 + b^2 = (½a)^2$, y de aquí la ecuación del tipo 3º.

Tal como se indica en la fig. 8, la construcción será posible para $a \geq 2b$. En el caso de la igualdad, las dos soluciones serían iguales.

A continuación, hemos incorporado dos páginas facsímiles de *La Geometría* de Descartes relativas a la ecuación cuadrática.

[1] Descartes, vivió en Holanda desde 1629 a 1649, donde tenía al príncipe de Orange como gran valedor ante los fanáticos protestantes; sin embargo, los teólogos de Utrecht y Leyden le tacharon de ateo, vagabundo y libertino, “calificativos” que no llegaron a tener, afortunadamente, mayores consecuencias.



LIVRE PREMIER. 303

angle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Que ſi iay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

Enfin ſi i'ay

$z^2 \propto az - bb$:

ie fais N L eſgale à $\frac{1}{2}a$, & L M eſgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant deſcrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z eſt M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a ſçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et ſi le cercle, qui ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut aſſurer que la conſtruction du probleſme propoſé eſt impoſſible.

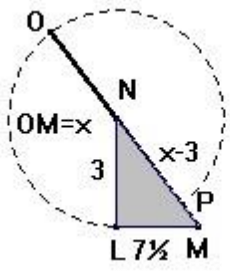
Au

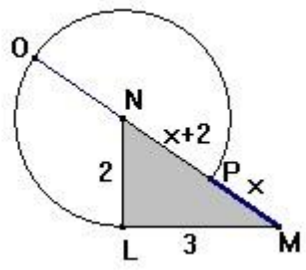
En la fig. 6, se indica la manera geométrica de hallar con toda exactitud una raíz cuadrada utilizando una unidad arbitraria. Por otro lado, es curioso observar la manera que tenía Descartes de representar la igualdad:

$$\propto$$

Probablemente, este signo, era una estilización del diptongo *æ* de la palabra latina *æquare*, que significa igualar.

<u>Ejemplos prácticos</u>. Utilizaremos las figuras ideadas por Descartes para resolver, algebraicamente, una ecuación de cada tipo.





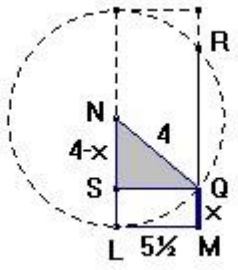


Fig. 9 Fig. 10 Fig. 11

1º) $x^2 = 6x + 7$; aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo LMN de la fig.9, tendremos: $(x-3)^2 = 3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 \rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{9+7} \rightarrow x = 3 \pm 4$.

2º) $x^2 = -4x + 9$; procediendo como en el caso anterior, pero con los datos de la fig. 10, tendremos: $(x+2)^2 = 2^2 + 3^2 \rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{13} \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{13}$.

3º) $x^2 + 5 = 8x$; el triángulo NSQ de la fig. 11 nos permite escribir:

$(4-x)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4^2 \rightarrow 4 - x = \pm\sqrt{16-5} \rightarrow x = 5 \pm \sqrt{11}$.

Consideraciones finales

1. Podremos utilizar el método de los antiguos babilonios (apartado 1) para resolver la ecuación general de segundo grado, dado que las propiedades de las raíces (suma, producto, semisuma y semidiferencia se siguen cumpliendo independientemente del signo de sus coeficientes.

Veamos un ejemplo:

$3x^2 - 5x - 6 = 0$, que podremos poner en la forma $x^2 - 2 = \frac{5}{3}x$, y de aquí el sistema lineal:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - (-2)} = \frac{\sqrt{97}}{6}$$

de donde,

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{6}.$$

2. Del mismo modo, podríamos formar el cuadrado geométrico que utilizaban los árabes para la resolución de la ecuación anterior. Esto es,

$x^2 - \frac{5}{3}x = 2$, (segundo tipo, fig. 3)

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = 2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{72}{36}$, que da de un modo inmediato el valor (o valores) de

de x.

3. Finalmente, está el método utilizado normalmente en la actualidad, que consiste en la formación de un cuadrado algebraico.

Así, la ecuación $x^2 + px + q = 0$, (p, q , números reales o complejos), la transformaremos en otra equivalente tal como sigue,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Rightarrow$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Ejemplo:

$2x^2 + 6x - 5 = 0$, que puesta de esta forma, $x^2 + 3x = \frac{5}{2}$, facilitará la formación del cuadrado; esto es,

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{19}{4} \Rightarrow x+\frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Ejercicios

1. Siguiendo a las antiguas civilizaciones babilónicas resuelve la ecuación, $x^2 + 5 = 6x$, utilizando el simbolismo algebraico de hoy en día.

2. Resuelve la ecuación, $7x^2 + 2 = 15x$, multiplicando los dos miembros por 7, y haciendo luego un cambio de variable adecuado.

3. ¿Cómo crees que las antiguas civilizaciones mesopotámicas descubrieron lo que valían la suma y el producto de las raíces en función de sus coeficientes? Razona la respuesta.

4. Una tablilla babilónica antigua, desenterrada en Susa, pide calcular el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo cuyos lados miden 50, 50, y 60 unidades. Intenta calcular dicho radio.

5. Resuelve la ecuación, $x^2 + 8x = 84$, mediante la formación de un cuadrado geométrico, tal como lo hacían los árabes.

6. Comprueba que el método utilizado en la antigua Babilonia sirve para resolver cualquier ecuación de segundo grado, independientemente del signo de sus coeficientes.

7. Deduce la fórmula general de la ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, mediante la formación de un cuadrado.

8. Dada la expresión $x^2 + (x + a) = b^2$, ¿qué tendrías que hacer para que $(x, x+a, b)$ sea, en todo momento, una terna de números naturales?

9. Mediante la formación de un triángulo rectángulo, resuelve las siguientes ecuaciones: $x^2 = 5x + 10$; $x^2 + 8x = 3$; $x^2 + 16 = 20x$.

Referencias bibliográficas

BOYER, Carl B. (1986): *Historia de la matemática,* AUT, Madrid.

CAJORI, Florian (1985): *A History of Mathematics*, 4th edition, Chelsea Publishing Company, USA.

HEATH, Thomas (1956): *The Thirteen Books of EUCLID'S ELEMENTS,* 3 vols., Dover Publications, Inc., New York.

MARTZLOFF, Jean-Claude (1987): *Histoire des Mathématiques Chinoises*, Masson editeur, Paris.

NEUGEBAUER, O. (1970): *The Exact Sciences in Antiquity,* 2nd edition (1957), 2nd printing (1970), Brown University Press, Rhode Island, USA.

NEWMAN, James R. (1968): Comentario. Descartes y la geometría analítica. *SIGMA. El Mundo de las Matemáticas*, vol. 1, pp. 162-178. Ediciones Grijalbo, S. A., Barcelona - México D.F. (Título original de la primera edición: *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, Inc., New York, 1956)

(POPP, Walter (1975): *History of Mathematics. Topics for Schools*, The OPEN UNIVERSITY PRESS, England. (Translated from de German by Maxim Bruckheimer)

REY PASTOR, Julio y BABINI, José (1985): *Historia de la Matemática*, 2 vols., Gedisa S.A., Barcelona.

RIBNIKOV, K. (1991): *Historia de las Matemáticas,* 1ª reimpresión de la 1ª edición en español (1974), editorial Mir, Moscú.

ROUSE BALL, W. W. (1960): *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York

SÁNCHEZ FABA, Francisco (1980): "Abraham bar Hiyya (1070-11359) y su Libro de Geometría", *Gaceta Matemática,* 1ª serie, tomo XXXII, **7** y **8**, pp. 101115, Madrid.

SMITH, David Eugene 1958): *History of Mathematics*, vol. II, Dover Publications, Inc., New York.