FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA IV
ISSN: 1695-6613

ESTUDIO DIDACTICO DE LA ESTRUCTURA DE ALGUNAS INSTITUCIONES MEDIANTE LOS JUEGOS COOPERATIVOS

María Candelaria Espinel Febles

Universidad de La Laguna

Resumen

La teoría de juegos cooperativos aporta una base matemática para repartir el poder entre los distintos colectivos que componen una institución u organismo. Un criterio de arbitraje es que cada jugador recibe una asignación en el juego en relación con el número de coaliciones ganadoras en las que participa. La estructura de organismos (Ayuntamiento, Parlamento, Unión Europea, ...) nos afecta en mayor o menor medida a todos los ciudadanos. En este trabajo utilizamos la combinatoria para analizar desde un punto de vista metodológico el reparto de poder en algunos organismos, y en el ámbito de las Islas Canarias lo aplicamos a la determinación de un sistema parlamentario.

Abstract

The theory of cooperative games gives a mathematical base to share out the power between the different groups which constitute an institution or organism. An arbitration criterion is that each player receives an assignment in the game according to the number of winning coalitions in which he takes part.

The structure of organisms (Townhall, Parliament, European Union,...) affects all the citizens in different ways. In this work we used combinatory for analysing the distribution of power in some organisms from a methodological point of view, and we apply it to the settling of a parliamentary system in the area of Canary Islands.

Introducción

El resultado de las elecciones, realizadas en mayo de 2002, al Claustro de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria para elegir a 200 miembros, ha sido:

[101: 53, 53, 52, 26, 14, 2]

Esta representación se utiliza como modelo matemático en Teoría de Juegos Cooperativos de Votación Ponderada. La lectura del modelo muestra un primer número, 101, que indica la cuota necesaria para alcanzar mayoría, esto es, la mitad más uno de los claustrales. Los seis números siguientes representan los escaños que alcanzó cada uno de los grupos o jugadores, y da la composición del Claustro, evidentemente: 53+53+52+26+14+2=200. Ninguno de los seis grupos dispone de mayoría absoluta, aunque, en el reparto de escaños, los tres primeros grupos se colocan en una situación muy favorable ya que la formación de coaliciones entre dos cualesquiera de ellos les da mayoría; sin embargo, parece que los tres grupos restantes tienen una posición numérica poco favorable para alcanzar el poder. Este ejemplo sirve para que todos pensemos en aplicar este modelo a otros organismos donde sus representantes se eligen por votación, tales como Ayuntamientos, Parlamentos, Unión Europea, Naciones Unidas, ... El modelo se aplica también en sociedades cuyo capital está repartido entre accionistas, y donde cada uno dispone de tanto votos como acciones controla. A modo de ilustración sencilla, pensemos en dos amigos que fundan una sociedad de modo que uno de ellos tiene el 51% y el otro el 49%; el modelo matemático de esta situación es [51: 51, 49]. Todos tenemos claro quién tiene el poder en la empresa. Para un matemático se trata de un juego con dos jugadores. Al jugador que tiene el 51% se le llama “dictador” y al que tiene el 49% jugador “nulo”; también se le denomina jugador ficticio u hombre de paja.

El jugador que excede la cuota de 50% puede bloquear cualquier asunto de la empresa; ello constituye una situación injusta. Lo usual es que cuando una sociedad está formada por varios accionistas, el consorcio se estructure de forma equilibrada, y se diseñen arbitrajes que permitan agilizar la toma de decisiones. Si bien el diseño de un arbitraje plantea problemas de reparto de beneficios o costes entre los jugadores y una de las cuestiones más interesantes es la definición de una medida de la distribución de poder entre los accionistas que permita valorar la importancia estratégica de cada uno de los jugadores o agentes implicados.

Estos dos ejemplos pretenden ilustrar cómo algunos problemas que se plantean en las actividades humanas han dado lugar a nuevas disciplinas matemáticas. Una de estas disciplinas, la teoría de juegos, se ha mostrado como una herramienta fundamental en los problemas de decisión que surgen en las ciencias sociales. La distribución de poder entre los agentes involucrados en el sistema lleva al estudio de algunos modelos de juegos cooperativos. Los juegos cooperativos ayudan a tomar acuerdos vinculantes entre los jugadores para repartirse los beneficios que se generan a partir de su cooperación. Las medidas numérica, llamadas *índices de poder*, proporcionan la importancia estratégica de cada uno de los jugadores.

Esta publicación quiere ser una invitación a los educadores matemáticos para reflexionar sobre la transferencia de algunos conocimientos matemáticos actuales a los niveles de la formación obligatoria. El propósito, en este caso, es divulgar parte del desarrollo que la Teoría de Juegos ha tenido en los últimos años y mostrar un posible enfoque didáctico. Creemos que se pueden aprovechar situaciones surgidas de la realidad para desarrollar parte de los juegos cooperativos como una aplicación de la Combinatoria en el currículum de Matemáticas de la Educación Secundaria. Para ello, se establecen algunos conceptos básicos de la Teoría de Juegos Cooperativos y se definen los principales índices de poder con un enfoque metodológico.

El resto del trabajo se organiza en tres partes. Primero se recoge la terminología básica y se ilustran algunos conceptos mediante un ejemplo. Seguidamente se hace un desarrollo metodológico de tres índices de poder, y se muestra su motivación didáctica y algunas relaciones y diferencias entre ellos. Finalmente se muestra la utilización de los juegos cooperativos en el diseño de sistemas justos para la determinación de un modelo para constituir el Parlamento de Canarias.

Un *Juego de Votación Ponderada* se define en un conjunto finito de N jugadores que pueden ser individuos, empresas, instituciones sociales, partidos políticos, países, etc. Cada jugador $\underline{i} \in N$ tiene un número de votos $w_{\underline{i}} > 0$, por lo que cada coalición de jugadores $S \subseteq N$ reúne la suma de los votos de sus componentes $w(S) = \sum w_{\underline{i}}$. Se fija una *cuota* q para adoptar decisiones, siendo $q > \frac{1}{2} w(N)$. Una *coalición* S es *ganadora* si $w(S) \geq q$, y es *perdedora* si $w(S) < q$. Si una coalición es ganadora, cualquiera que la contenga también; por tanto, en la práctica basta con tener en cuenta las *coaliciones ganadoras minimales* (c.g.m.), esto es, las que, al suprimir algún miembro, se convierten en perdedoras. Un jugador se dice *nulo* si no pertenece a ninguna coalición ganadora minimal y que tiene *veto* si pertenece a todas las coaliciones ganadoras. Un juego de votación ponderada se representa por

$$[q: w_1 , w_2 , ..., w_n]$$

El interés de estos juegos suele centrarse en conocer el poder o influencia que tiene una jugador sobre el resultado final de un juego. Para cuantificar las distribución de poder entre los agentes involucrados se han propuesto distintas medidas o índices. A continuación se definen tres de los índices más conocidos. El *Índice de poder de Shapley*, $I_S = (\Phi_{\underline{1}} , \Phi_{\underline{2}} ,..., \Phi_{\underline{n}})$ asigna a cada jugador $\underline{i} \in N$, el valor $\Phi_{\underline{i}} = (1/n!) \Sigma (|s|-1)! (n-|s|)!$, siendo s el número de jugadores de la coalición S, y donde la suma está extendida a todas las coaliciones ganadoras S tales que ($S–\underline{i}$) es perdedora.

El *Índice de poder de Banzhaf*, $I_B = (\beta_{\underline{1}}, \beta_{\underline{2}}, ..., \beta_{\underline{n}})$ asigna a cada jugador $\underline{i} \in N$, el valor $\beta_{\underline{i}} = (1/2)^{n-1} \Sigma$ (s-1)! (n-s)! / 2n! , siendo s el número de jugadores de la coalición

El *Índice de poder de Deegan-Packel* , $I_D = (\rho_{\underline{1}}, \rho_{\underline{2}}, ..., \rho_{\underline{n}})$ asigna a cada jugador $\underline{i} \in N$, el valor $\rho_{\underline{i}} = (1/|c.g.m|) \Sigma\ 1 / |s|$, siendo s el número de jugadores de la coalición

Desde el punto de vista práctico, los índices de poder son medidas basadas en la capacidad de cada jugador para participar en coaliciones ganadoras y proporcionan una medida más precisa del poder de un jugador que su porcentaje de votos. Sin embargo, se pueden buscar otros métodos para analizar las diversas situaciones surgidas de la realidad. La búsqueda de acuerdos estratégicos entre los jugadores depende del objetivo que se persigue alcanzar. Si en una *junta de accionistas* existe un accionista principal y los restantes son minoritarios, es lógico que estos diseñen una estrategia para reducir el poder del principal. Si los jugadores son *partidos políticos*, se busca la *cooperación* por ideología política, para maximizar los beneficios, etc.

Algunos métodos usados para sus análisis son: (a) Fijar las preferencias mediante una relación de orden lineal. Se considera que la distancia entre dos partidos políticos es la suma del número de partidos entre ellos y el número de posiciones que el primer partido debe moverse para alcanzar al segundo (distancia de Leiserson). (b) Buscar criterios de optimización: por ejemplo, el partido con mayoría negocia apoyos puntuales con otro partido, formar una alianza con la coalición más económica, etc.

Otra idea sencilla aplicable a muchas situaciones es la búsqueda de una representación natural que no altere el sistema. Dos juegos se dicen equivalentes si, teniendo el mismo número de jugadores, mantienen las coaliciones ganadoras. En la práctica, los *sistemas equivalentes* permiten reducir o ampliar el número de representantes en un juego y son útiles para formar minicomisiones, constituir permanentes, etc.

A continuación, se ilustran todos estos conceptos con un ejemplo detallado. Los datos corresponden a los resultados de las elecciones municipales de junio de 1999 en Fuerteventura. Los cuatro partidos políticos o jugadores son: Coalición Canaria (CC) con 8 concejales, Partido Popular (PP) con 4, Partido Socialista (PSOE) con 3 e Independientes de Fuerteventura (IF) con 2. En la tabla siguiente se recogen los partidos o jugadores, el número de concejales o votos de cada partido, el porcentaje de poder según el número de votos y el porcentaje de poder utilizando el índice de poder de Shapley. Se puede ver cómo el poder no es proporcional al porcentaje de votos, como la intuición nos podría sugerir. El ejemplo muestra que el partido mayoritario, con 8 concejales, tiene el 50% del poder, a pesar de tener sólo el 47% de los votos, y los tres partidos que tienen 4, 3 y 2 concejales, respectivamente, tienen el mismo poder, un 16.6%. Llama la atención que el PP, con 4 concejales, tiene el mismo poder que IF con la mitad de concejales.

Partidos	CC	PP	PSOE	IF		Total
Jugadores	1	2	3	4		4
Votos	8	4	3	2		17
% votos	47	23.5	17.6	11.7		100
% poder	50	16.6	16.6	16.6		100

El situación puede representarse por el sistema de votación ponderada:

[9: 8, 4, 3, 2]

donde el jugador 1 es CC, el jugador 2 es el PP, el jugador 3 es el PSOE y el jugador 4 es IF. Una coalición es ganadora si dispone de 9 concejales como mínimo. Hay cuatro coaliciones ganadoras minimales (c.g.m.): 12 , 13 , 14 , 234.

Algunos partidos pueden establecer a priori reglas de decisión o condiciones para asociarse. Las estrategias de cooperación más usuales son fijar preferencias mediante una relación, generalmente de afinidad política, o negociar apoyos puntuales. Así, el jugador 1, que tiene mayoría, intenta con 2, 3 o 4, conseguir mayoría absoluta. También se suele recurrir a la búsqueda de coaliciones económicas: en este caso, da lugar a 234, que soporta una fuerte dispersión ideológica. La coalición 14 supone menor reparto de beneficios. Con frecuencia, la coalición ganadora más económica supone un riesgo (posibles tránsfugas) para la estabilidad de una legislatura, ya que con el poder de pocos individuos se puede cambiar el juego.

Un sistema equivalente al actual y más sencillo es: [3: 2, 1, 1, 1]
Con sólo 5 miembros se tiene una mesa de negociación factible y aceptable para los jugadores ya que se mantiene su representatividad.

Estudio didáctico de las medidas de poder mediante la Combinatoria

Los índices de poder pueden tener como finalidad distribuir costes o repartir beneficios. En el contexto de situaciones de votación, la finalidad del juego es medir el poder. Teniendo en cuenta las fórmulas dadas en el apartado anterior, observamos que los valores de Shapley y el de Banzhaf asignan a cada jugador una suma ponderada de las contribuciones marginales que dicho jugador hace a todas las coaliciones a las que se une. Para el valor de Shapley, los pesos asignados a cada coalición dependen de su tamaño, mientras que para el valor de Banzhaf todas las coaliciones son equiprobables. El índice de Deegan considera sólo las coaliciones ganadoras minimales y establece un reparto solidario entre estos jugadores.

Mostramos la forma de encontrar el valor del índice de Shapley mediante la definición dada en el apartado anterior, utilizando el sistema [9: 8, 4, 3, 2].

Coaliciones en las que 1 es imprescindible para ganar:

12, 13, 14, 123, 124, 134

Coaliciones en las que 2 es imprescindible para ganar:

12, 234

Coaliciones en las que 3 es imprescindible para ganar:

13, 234

Coaliciones en las que 4 es imprescindible para ganar:

234

Entonces, aplicando la definición, por ejemplo, al jugador 2 se tiene:

$\Phi_2 =$ (1/4!)(1! 2! + 2! 1!) = 2/12 = 1/6 .

Procediendo de forma análoga para el resto de los jugadores, se tiene:

I_S = (12/24, 4/24, 4/24, 4/24) = (1/2, 1/6, 1/6, 1/6)

= (0.5, 0.166, 0.166, 0.166) = (50%,16.6%,16.6%,16.6%)

El uso de las fórmulas lleva a un exceso de formalización y se pierde la intuición para lo que sería un estudio didáctico de medir el poder. En esta sección, se recurre a la intuición para presentar los índices de poder como medidas numéricas de la importancia estratégica de cada uno de los jugadores, ya que las definiciones resultan bastante abstractas. Se aprovecha la relación de los índices de poder con la Combinatoria y las fracciones, con vistas a considerar estos conceptos en las Matemáticas que se imparten en Secundaría. Para ilustrar un desarrollo didáctico tomamos de nuevo el juego de votación ponderada: [9: 8, 4, 3, 2]

Índice de Shapley (1954)

El valor de Shapley asigna a un jugador i, la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones formadas por los jugadores que preceden a i en las n! permutaciones posibles de los jugadores.

Para su cálculo se utiliza la lista de permutaciones de los jugadores y se cuenta para cada jugador el número de permutaciones en las que el jugador resulta crucial para ganar. Para llevar al aula se puede organizar en fases:

Primero: Formar la lista de permutaciones de los jugadores.

Segundo: Señalar al primer jugador cuyo voto convierte una coalición en ganadora: se le llama jugador pivote de la permutación.

Tercero: Encontrar el índice de fracción de permutaciones en la que dicho jugador es pivote.

El ejemplo que estamos considerando tiene cuatro jugadores; por tanto, el número de permutaciones es 4! = 24. En cada permutación señalamos el jugador pivote:

1 $\underline{2}$ 3 4   1 $\underline{2}$ 4 3   1 $\underline{4}$ 2 3   1 $\underline{3}$ 2 4   1 $\underline{3}$ 4 2   1 $\underline{4}$ 2 3 2

$\underline{1}$ 3 4   2 $\underline{1}$ 4 3   2 4 $\underline{1}$ 3   2 3 $\underline{1}$ 4   2 3 $\underline{4}$ 1   2 4 $\underline{3}$ 1

3 $\underline{1}$ 2 4   3 2 $\underline{1}$ 4   3 $\underline{1}$ 4 2   3 2 $\underline{4}$ 1   3 4 $\underline{1}$ 2   3 4 $\underline{2}$ 1

4 $\underline{1}$ 2 3   4 $\underline{1}$ 3 2   4 3 $\underline{1}$ 2   4 2 $\underline{1}$ 3   4 2 $\underline{3}$ 1   4 3 $\underline{2}$ 1

En este caso, el jugador $\underline{1}$ está señalado 12 veces y 4 veces cada uno de los restantes. Así que el índice de poder de cada jugador es (12/24, 4/24, 4/24, 4/24).

Índice de Banzhaf (1964)

El valor de Banzhaf asigna a un jugador i, la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones a las que se puede unir.

Para calcular este índice se enumeran todas las coaliciones ganadoras y perdedoras; si hay n jugadores, tendremos 2^n-1 coaliciones. A partir de las coaliciones perdedoras, se buscan los jugadores decisivos, esto es, los jugadores que convierten a las coaliciones perdedoras en ganadoras. El índice de poder de un jugador es el número de veces que ese jugador es decisivo, dividido por el número total de jugadores decisivos. En nuestro ejemplo se tiene: Coaliciones ganadoras: $\underline{12}$, $\underline{13}$, $\underline{14}$, $\underline{234}$, $\underline{123}$, $\underline{124}$, $\underline{134}$, $\underline{1234}$ Coaliciones perdedoras: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{23}$, $\underline{24}$, $\underline{34}$

c.p.	1	2	3	4	23	24	34
Decisivo	2 3 4	1	1	1	1 4	1 3	1 2
c.g.	12 13 14	12	13	14	123 234	124 234	134 234

Así, a la coalición perdedora 23, se el puede unir el jugador 1, y se obtiene la coalición ganadora 123, o se le puede unir el jugador 4, y se obtiene la 234 . De la misma forma se procede con cada una de las coaliciones perdedoras. El jugador 1 ha sido pivote, como se puede ver en la tabla anterior, 6 veces; por tanto, β_1 = 6/12. Cada uno de los tres jugadores restantes hace de pivote dos veces; así se obtiene que el índice de cada uno de los jugadores es:

$I_B = (\beta_1 , \beta_2 , \beta_3, \beta_4) = (6/12, 2/12, 2/12, 2/12)$.

Índice de Deegan-Packel (1978)

Este índice recoge la idea de que el poder de un jugador se basa exclusivamente en su participación en la formación de c.g.m, y que estas coaliciones son equiprobables. Así, todas las c.g.m. juegan el mismo papel y todos los jugadores de una c.g.m. son tratados por igual en cuanto al reparto de beneficios.

El cuadro siguiente muestra todo el proceso:

c.g.m.	1	2	3	4	
12	½	½			
13	½		½		
14	½			1/2	
234		1/3	1/3	1/3	
Suma	9/6	5/6	5/6	5/6	24/6
	9/24	5/24	5/24	5/24	

Por tanto, la probabilidad de formar c.g.m. es:

I_D = (9/24, 5/24, 5/24, 5/24) = (37.5%, 20.8%, 20.8%, 20.8%)

Juegos cooperativos en el diseño de sistemas justos. Caso del Parlamento de Canarias

En las sociedades democráticas es necesario formar órganos colegiados (claustros, parlamentos, ...) que mantengan una estructura de representación. En este apartado utilizamos el modelo de los juegos cooperativos para analizar la composición del Parlamento de Canarias que ha sido motivo de debate desde que se creó.

En 1982, el Estatuto de Autonomía de Canarias estipula que el sistema electoral es el de representación proporcional. No serán tenidas en cuenta aquellas listas de partido que no obtengan, al menos, el 3% de los votos válidos emitidos en la Región o el 20% de la respectiva circunscripción electoral. Por ley del Parlamento Canario se fija en 60 el número de diputados, conforme a la siguiente distribución:

Gran Canaria	Lanzarote	Fuerteventura	Tenerife	La Palma	Gomera	Hierro
15	8	7	15	8	4	3
30			30			
60						

Este sistema se divulgó como paritario: 30 entre las islas mayores y las menores, 30 entre las dos provincias, 15 en cada isla capitalina ...

En 1996, se modificó, estableciendo que sólo serán tenidas en cuenta aquellas listas de partido o coalición que hubieran obtenido, al menos, el 30% de los votos válidos emitidos en la circunscripción insular o, sumando los de todas las circunscripciones donde hubiera presentado candidatura, al menos, el 6% de los votos válidos emitidos en la totalidad de la Comunidad Autónoma. Se mantuvo el número de diputados y distribución.

Esto da lugar al juego de votación ponderada con 60 diputados:

$$[31: 15, 15, 8, 8, 7, 4, 3]$$

El sistema lo forman 7 jugadores, con pesos 15, 8, 7, 4 y 3.

Identificando: $15 \equiv x,\ 8 \equiv y,\ 7 \equiv z,\ 4 \equiv t,\ 3 \equiv u$

c.g.m.	Número
2x + y	2
2x + z	1
2x + t	1
2x + u	1
x + 2y	2
x + y + z + t	4
x + y + z + u	4
Total	15 coaliciones

Esta situación da lugar a que en todas las c.g.m. esté presente alguna de las islas mayores (Gran Canaria o Tenerife). De ellas, hay 5 coaliciones posibles que se forman con las dos islas mayores y una de las menores. Y, hay 10 coaliciones con una isla mayor y tres de las menores. No hay ninguna isla que desempeñe el papel de dictador, ni que sea nula.

Búsqueda de alternativas

En 2001, la AHI (Agrupación Herreña Independiente) planteó una reforma que contempla reducir a la mitad el mínimo insular, 15%, e incrementar en 6 el número de diputados: 33 entre las dos provincias y 18 por cada isla capitalina.

Esta reforma da lugar al juego de votación ponderada con 66 diputados:

[34: 18, 18, 8, 8, 7, 4, 3]

c.g.m.	Número
2x	1
x + 2y	2
x + y + z + t	4
x + y + z + u	4
Total	11 coaliciones

Este sistema llama la atención ya que, con más diputados que el vigente, presenta una coalición con sólo las islas mayores.

Otros sistemas

Sugerimos algunos otros repartos equivalentes al vigente. Un sistema con 28 diputados: [15: 7, 7, 4, 4, 3, 2, 1]

c.g.m.	Número
2x + y	2
2x + z	1
2x + t	1
2x + u	1
x + 2y	2
x + y + z + t	4
x + y + z + u	4
Total	15 coaliciones

Un sistema con 20 diputados: [11: 5, 5, 3, 2, 2, 2, 1]

c.g.m.	Número
2x + y	1
2x + z	3
2x + t	1
x + 3z	2
x + y + 2z	6
x + y + z + t	6
Total	19 coaliciones

Un sistema con 18 diputados: [10: 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1]

c.g.m.	Número
2x + y	1
2x + z	3
x + y + 2z	6
x + y + z + t	6
x + 3z	2
Total	18 coaliciones

Estos sistemas con menos parlamentarios pueden ser útiles para mantener la representación por islas en comisiones de trabajo.

Referencias bibliográficas

AMER, R., CARRERAS, F. - MAGAÑA, A. (2001): *Juegos simples e índice de poder de Shapley-Shubik.* Documento de trabajo MA2-IT-00004. Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad Politécnica de Cataluña. COMAP (1999): *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. AddisonWesley/Universidad Autónoma de Madrid.

ESPINEL, M. C. (1999): El poder y las coaliciones. *Suma*. 31, 109-117. LEECH, D. (2002): Voting Power in the Governance of the International Monetary Fund. *Annals of Operations Research*. 109, 375-397.

TAYLOR, A. D. (1995): *Mathematics and Politics. Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer-Verlag. New York.