FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA IV
ISSN: 1695-6613

EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA Y SU RELACIÓN CON EL CONCEPTO DE ÁREA LIMITADA POR UNA CURVA. ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA PILOTO

Matías Camacho Machín
Universidad de la Laguna

Ramón Depool Rivero
Universidad Politécnica UNEXPO. Barquisimeto-Venezuela.

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de un estudio piloto, desarrollado en la UNEXPO de Barquisimeto (Venezuela) con estudiantes de Cálculo I, con el que se trata de determinar las ideas que tienen éstos sobre el área limitada por una curva y el eje de abscisas, antes y después de llevar a cabo una instrucción que utiliza como material curricular un Programa de Utilidades (PU), desarrollado con el Programa de Calculo Simbólico (PCS) *DERIVE*. Del análisis de las pruebas se puede concluir, entre otras cosas, que los estudiantes, antes de llevar a cabo la instrucción, consideran el área como un número positivo asociado a una región, condición que se mantiene al final. La Integral Definida la perciben como una herramienta para el cálculo del área. El registro simbólico de la Integral Definida ejerce una influencia determinante en la resolución, por parte de los estudiantes, de los problemas. Se observó que la instrucción que recibieron los estudiantes se refleja esencialmente en el tratamiento que estos realizan de los registros gráficos.

Abstract

In this work we present the results of a pilot study developed in the UNEXPO of Barquisimeto (Venezuela) with students of Calculus I, with which we try to determine the ideas that the students have about the area limited by a curve and the axis of abscissas, before and after carrying out an instruction that uses as curricular material a Utility Files (UF) developed with the Computer Algebra System (CAS) *DERIVE*. From the analysis of the tests, it can be concluded, among other things that the students, before carrying out the instruction, consider the area as a positive number associated with a region; this condition stays at the end. The Definite Integral is perceived as a tool for the calculation of the area. The symbolic register of the Definite Integral exercises has a decisive influence in the resolution of the problems. It was observed that the

instruction that the students received is reflected essentially in the treatment of the graphic registers that they carry out.

Introducción

El trabajo que presentamos forma parte de una investigación más amplia mediante la cual se pretende analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción del software *DERIVE* para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en los primeros cursos de Universidad. Somos conscientes de que la efectividad de todo método de enseñanza y aprendizaje tiene efectos a corto, medio y largo plazo; por tanto, trataremos de determinar los efectos a corto plazo de una instrucción desarrollada mediante la combinación de métodos habituales de enseñanza con Prácticas de Laboratorio (PL) diseñadas con base en los distintos sistemas semióticos de representación (Duval, 1993, 1995).

Se ha elegido como tópico concreto el concepto de Integral Definida, y se ha elaborado, a tal efecto, un programa de utilidades (PU) que constituye el elemento esencial de las PL correspondientes a este tópico (para más detalle véase Camacho y Depool, 2000). En tales PL se introduce el concepto de Integral Definida partiendo del problema clásico de las cuadraturas y se muestra cómo surge la Integral Definida a partir del objetivo de aproximar el área de una cierta región del plano limitada por una curva y el eje OX. Se pretende con ello, de una parte, que el estudiante asimile, además de los aspectos algebraicos, las perspectivas gráfica y numérica del concepto de Integral Definida y, de otra, que el cálculo de la Integral Definida de una función (continua o no) no sea visto exclusivamente como la diferencia de los valores obtenidos evaluando la primitiva de una función en los extremos del intervalo de integración $\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F(x) \text{ primitiva}\right)$. Algunas investigaciones (Orton 1983; Eisenberg y Dreyfus, 1991) muestran que los estudiantes se quedan simplemente con esa idea de Integral Definida.

En definitiva, se trata de que los estudiantes, mediante las PL, puedan ver de manera secuencial las aproximaciones del área limitada por una curva con construcciones progresivas de rectángulos, trapecios y porciones de parábolas, introducir de esta manera el límite de cada una de las Sumas de Riemann y conectar con el cálculo de la Integral Definida a través del Teorema Fundamental del Cálculo. Se trata con ello de minimizar el salto que supone pasar de las aproximaciones (del valor del área limitada por la curva) al límite de dichas sumas y relacionar estos dos aspectos con dicho Teorema Fundamental.

El objetivo general de este trabajo consiste en analizar la influencia del uso del Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE* en la idea, que poseen los estudiantes, de área limitada por una curva, el eje OX y dos ordenadas extremas, cuando se introduce este concepto (teniendo en cuenta las posibilidades del PCS) mediante una secuencia de enseñanza diferente a la tradicional (Edwards y Penney, 1996). Es decir, en lugar de presentar la secuencia: Cálculo de primitivas - Integral de Riemann - Integración Numérica, haciendo uso del PCS, el desarrollo propuesto es: Integración numérica - Integral de Riemann - Cálculo de primitivas.

Para ello, después de hacer una revisión exhaustiva de las investigaciones más relevantes realizadas hasta la actualidad, se presenta el análisis de dos cuestionarios: uno (cuestionario de conocimientos I (CC-1)) es cumplimentado por los estudiantes antes de estudiar el concepto de Integral Definida con nuestro diseño de instrucción, y tiene por objeto analizar el concepto de área que poseen los estudiantes y, el otro (cuestionario de conocimientos II (CC-2)), después de recibir la instrucción. Ambos cuestionarios contienen preguntas análogas, y fueron diseñados de tal manera que las cuestiones de CC-1 pueden ser resueltas sin conocer el concepto de área utilizando la Integral Definida, mientras que las correspondientes preguntas del CC-2 requieren para su resolución el conocimiento de la relación entre el área y la Integral Definida.

Antecedentes

Se han llevado a cabo diversas investigaciones sobre el estudio del concepto de Integral Definida.

Una de las primeras investigaciones realizadas fue la de Orton (1983), que desarrolló una investigación cuyo propósito fundamental era el estudio de la comprensión, por parte de los estudiantes, de distintos aspectos que tienen que ver con el concepto de Integral de Riemann. Se tomaron 110 estudiantes entre 16 y 22 años, que fueron entrevistados, mediante 38 cuestiones relacionadas con límites, área de rectángulos, aproximación del área bajo una curva, cálculo de integrales y cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

Entre las conclusiones de su investigación, destacamos que:

- Algunos estudiantes consideraron de difícil solución las preguntas que se referían a la comprensión de la integración como límite de la suma, por lo que resulta poco viable introducir las integrales de esta forma, dado que el fin último es que los estudiantes sean capaces de integrar y dar respuesta a simples aplicaciones.
- El concepto de límite parece haber sido descuidado en niveles más elementales, lo que no ayuda a la subsiguiente introducción de las integrales.
- La disponibilidad de calculadoras hace más fácil la integración numérica; en la práctica, los procedimientos pueden ser tediosos y las ventajas de tener una calculadora resultan más obvias en la integración que en la diferenciación (se trata de sumar números decimales); en definitiva, las calculadoras facilitan el cálculo aproximado del área bajo una curva.

- Resulta aconsejable que para la introducción del Cálculo se utilicen diagramas y gráficos.

Mundy (1984) presenta el análisis de un cuestionario respondido por 973 estudiantes que habían seguido un curso de Cálculo, que debían responder a una pregunta de opción múltiple la cual pedía que evaluara la integral $\int_{-3}^{3} |x+2|\, dx$, con posibles respuestas 0, 9, 12,13, 14. Solamente el 5.4% de los estudiantes respondió correctamente a la pregunta. El 24% indicó que era 0, el 22% que era 9 y el 48% que era 12. Mundy concluyó que los estudiantes no tenían una comprensión visual de que la integral de funciones positivas puede ser considerada en términos de área bajo una curva.

Dick (citado en Eisenbert y Dreyfus, p. 28), basándose en los resultados de Mundy, utilizó una encuesta similar a la anterior con estudiantes que estaban finalizando un curso semestral de Probabilidad y Estadística. Se trataba de evaluar si los estudiantes que representaban gráficamente de forma correcta tales funciones podrían o no usar su gráfica para resolver la integral. A partir de la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & 1 < x < 3 \\ 0 & x \leq 1 \ y \ x \geq 3 \end{cases}$$

Se les pidió lo siguiente:

a) Representar gráficamente la función.

b) Hallar la $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$, donde *X* simboliza una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad dada por *f(x)*.

Su análisis lo realizó basándose en los siguientes puntos:

1. Exactitud de la representación grafica de *f(x)*.
2. La formulación de $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$ como

$$\int_{3/2}^{3} |x-2|\, dx$$

3. El cálculo de $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$ a través del análisis de la gráfica o del cálculo de

$$\int_{3/2}^{2} -(x-2)\, dx + \int_{2}^{3} (x-2)\, dx \, .$$

Dick concluye que, mientras el 92% graficó correctamente la función de densidad y el 89% también dio una formulación correcta para $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$, solamente el 44% calculó correctamente la integral (72% por integración y 28% mediante el análisis de la gráfica). En relación con sus resultados *"No existe evidencia de interpretación gráfica de ninguna clase... incluso puede esperarse que estudiantes de universidad, con una relativa formación en matemática avanzada, ignoren el uso de sus propias gráficas, aun cuando éstas podrían ser utilizadas en un problema de Cálculo".*

Calvo (1997) realizó un estudio cuyo objetivo era preparar las bases para una propuesta didáctica que permitiese a los estudiantes de un primer curso de Cálculo la construcción de un esquema conceptual de Integral Definida (concept image, en el sentido de Vinner) (Vinner, 1991), consistente con su definición formal, y rico en relaciones con los esquemas conceptuales de área y derivada. Uno de los instrumentos que utilizó fue un cuestionario de 10 ítems, que fue aplicado a 56 estudiantes.

Entre las conclusiones de esta investigación, Calvo sugiere utilizar como definiciones de integral aquéllas que resulten independientes del concepto de derivada y del conjunto de reglas algorítmicas asociadas a su cálculo. Propone elegir como definición de integral, la versión propuesta por Riemann y reformulada más tarde por Darboux en términos de supremos de sumas inferiores e ínfimos de sumas superiores. En cuanto a las conexiones con el esquema conceptual de área, señala que el éxito en la actividad matemática se relaciona con la posesión, por parte del individuo, de ricos esquemas conceptuales que permitan, no sólo establecer conexiones con otros esquemas conceptuales, sino la existencia (en el propio esquema conceptual) de varias facetas del mismo concepto relacionadas entre sí, de manera que faciliten el paso de una perspectiva a otra según las exigencias del problema que se ha de resolver. En el caso del concepto de Integral Definida, las facetas cuya existencia y conexiones dan riqueza al esquema conceptual son la algebraica, la numérica y la gráfica. Un recurso para sugerir a los estudiantes imágenes visuales enriquecedoras del esquema conceptual de Integral Definida consiste, para Calvo, en explorar su relación con el esquema conceptual de área.

Rasslan y Tall (2001) presentan una investigación en la que se explora la imagen del concepto (concept image, (Vinner, 1991)) de Integral Definida que tienen los estudiantes después de haber seguido un currículo basado en el "School Mathematics Proyect A -level" (SMP, 1997). En este caso, la integración se introduce mediante actividades de estimación del área entre una gráfica y el eje de las abscisas, usando para ello figuras y métodos numéricos. Se aplicó un cuestionario de 6 ítems a 41 estudiantes del último año de Bachillerato (17-19 años). De los resultados obtenidos, concluye que la mayoría de los estudiantes no son capaces de definir correctamente la Integral Definida y que además tiene dificultades de interpretar los problemas de cálculo de áreas como integrales definidas en contextos más amplios.

Metodología

La experiencia de realizó con un grupo de 28 estudiantes de nuevo ingreso de un curso regular de Cálculo I. El trabajo se desarrolló durante el semestre abril-julio de 2000, de la siguiente manera: se dictó el Programa Oficial de la asignatura Cálculo I, durante el semestre completo, con la variante de que, además de las clases habituales de aula, todos los estudiantes participaron en Prácticas de

Laboratorio con ordenadores, siguiendo un módulo instruccional, con el software *DERIVE*. El Programa Oficial está estructurado en cuatro unidades temáticas: Funciones, Límite de Funciones, Derivadas, e Integrales, y en las tres primeras, la formación fue la misma para todos los estudiantes. En la última (Integrales), se formaron dos grupos: el primero (G1) de 11 estudiantes (numerados del 01 al 11) y el otro (G2) de 17 estudiantes (numerados del 12 al 28). El objetivo de esta división fue, fundamentalmente, modificar el uso que se hacía del software. En el G1 los estudiantes emplearon un Programa de Utilidades construido para estudiar la Integral Definida en el sentido que se indica en la Introducción; esto es, partiendo del cálculo aproximado de áreas y potenciando las utilidades gráficas del software (para más detalles véase, Camacho y Depool, 2000, 2003), mientras que en el grupo G2 se siguió el libro de Texto (Edwards y Penney, 1996)).

Se realizaron siete Prácticas de Laboratorio. La primera sobre conocimientos generales de uso del software y, las tres siguientes, para el estudio práctico sobre Funciones, Límites y Derivadas, respectivamente. En dichas prácticas se utilizaron sencillos Programas de Utilidades (PU), similares a los expuestos en los libros de Cálculo que incluyen uso de calculadoras gráficas y ordenadores (Edwards y Penney, 1996), de modo que, al ser usados por los estudiantes, las actividades resultan ser menos automáticas que las que aparecen definidas en los menús de comandos del *DERIVE*. El resto de las prácticas fueron elaboradas para la cuarta unidad, tal como habíamos indicado, y solamente las utilizaron los estudiantes pertenecientes al grupo G1. Nuestro Programa de Utilidades es el eje central de estas tres prácticas y se trata de que e los estudiantes puedan siguieran paso a paso el desarrollo del concepto de Integral Definida partiendo del cálculo aproximado del área de la región limitada por una curva, utilizando aproximaciones con rectángulos, trapecios y parábolas y visualizando en la pantalla las representaciones gráficas correspondientes. En definitiva, independientemente del cálculo de primitivas y de la regla de Barrow.

Antes de empezar la instrucción con el PU (cuarta unidad) se aplicó el cuestionario de conocimientos CC-1 y al finalizar la unidad se aplicó el otro cuestionario (CC-2), que describiremos a continuación.

El cuestionario CC-1 contiene 7 ítems que, como hemos señalado anteriormente, poseen analogías con los del CC-2, pero teniendo en cuenta que para su resolución no se necesita el concepto de Integral Definida. El CC-2 contiene 8 ítems adaptados de Orton (1983), Mundy (1984) y Calvo (1997). Esta correspondencia entre los ítems utilizados se establece con el objetivo de estudiar cómo influyen, tanto los conocimientos nuevos sobre el concepto de Integral Definida, como el método de aproximación mediante el software utilizado en la concepción de área que poseen los estudiantes desde la Educación Secundaria.

Describimos a continuación los ítems de los dos cuestionarios

- En el primer ítem del CC-1 se pide a los estudiantes que justifiquen la propiedad aditiva del área limitada con el eje OX de funciones lineales y sus gráficas. En el primer ítem del CC-2 se pide a los estudiantes que justifiquen la propiedad aditiva de la Integral Definida dadas las expresiones algebraicas de tres funciones (dos cuadráticas y una lineal) y sus gráficas. Deben justificar, utilizando estas representaciones, dicha propiedad. Pretendemos con ellos, determinar qué clase de argumentos utilizan los estudiantes (gráficos, simbólicos o numéricos) para justificar dicha propiedad antes y después de la instrucción.
- En el segundo ítem de ambos cuestionarios se pide calcular el área de una región limitada por la gráfica de una función que tiene una porción sobre y otra bajo el eje OX. Tratamos de establecer qué dificultades tienen los estudiantes al trabajar con regiones que se encuentran bajo el eje OX y que tipo de relaciones se establecen con las que están sobre el eje OX.
- En el tercer ítem tanto de CC-1 como de CC-2 se pide calcular el área de una región no acotada (semiplano limitado por una recta y la región

limitada por la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en una región donde no está acotada).

Se trata de analizar lo que responden los estudiantes cuando el área de la región que se demanda es infinita.

En todas las preguntas anteriores, se utilizan los sistemas de representación gráfico y algebraico.

- En el cuarto ítem del CC-1 y del CC-2, se plantea el mismo problema, pero se da únicamente la representación gráfica de una región limitada por la gráfica de una curva para la que se pide optimizar dos cotas dadas del área; se pretende determinar si los estudiantes son capaces de aproximar el área de una región limitada por una curva, y cómo lo hacen a pesar de no tener la expresión algebraica de la función. Además, se trata de ver si son capaces de buscar mejores cotas que las dadas y de que forma lo hacen.
- En el quinto ítem, tanto del cuestionario CC-1 como del CC-2, se presenta un problema expresado sólo con el sistema de representación algebraico, en el que se pide calcular el área limitada por la función valor absoluto con el eje OX. Tratamos de analizar de qué manera influyen los nuevos conocimientos y la metodología empleada para su enseñanza, en la resolución de este problema para el que es sistema gráfico resultaría de gran utilidad.
- En el sexto ítem del CC-2 se les pide que indiquen si es verdadero o falso que $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \ldots = -2$;

se pretende determinar:

  - Si los alumnos son capaces de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta.
  - Si los estudiantes identifican la relación de este ítem con el ítem 3 del cuestionario.

  - Si los estudiantes interpretan coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para que la regla de Barrow pueda ser aplicada.
- En el sexto y séptimo ítem del CC-1, que corresponden a los ítem séptimo y octavo del CC-2, se plantean dos proposiciones generales expresadas simbólicamente: En la hipótesis del primero, se establece una relación de desigualdad entre las áreas de regiones de dos funciones, y, en su tesis la relación de desigualdad de las funciones, mientras que, en el segundo, se establece una proposición recíproca. Con esto se pretende determinar, por una parte, si los estudiantes son capaces de entender los términos generales que se presentan y si establecen relaciones entre el área y la Integral Definida, y, por otra, si son capaces de utilizar contraejemplos.

En definitiva, con la aplicación de los cuestionarios se pretende:

1. Caracterizar la idea de área que poseen los estudiantes que han cursado la Secundaria y no conocen aún el concepto de Integral Definida.
2. Analizar si existe alguna influencia de la instrucción llevada a cabo con los alumnos, sobre la idea que traen los estudiantes del concepto de área cuando se desarrolla la enseñanza combinando un método de tiza y pizarra con el uso de las Prácticas de Laboratorio.
3. Dado que en los ítems de los cuestionarios se utilizan principalmente representaciones gráficas y simbólicas, algunas veces conjuntamente y en otras ocasiones por separado, se tratará también de extraer información de cómo utilizan los alumnos ambos sistemas de representación a la hora de resolver situaciones que involucran tanto el concepto de área de figuras planas, como el de Integral Definida.

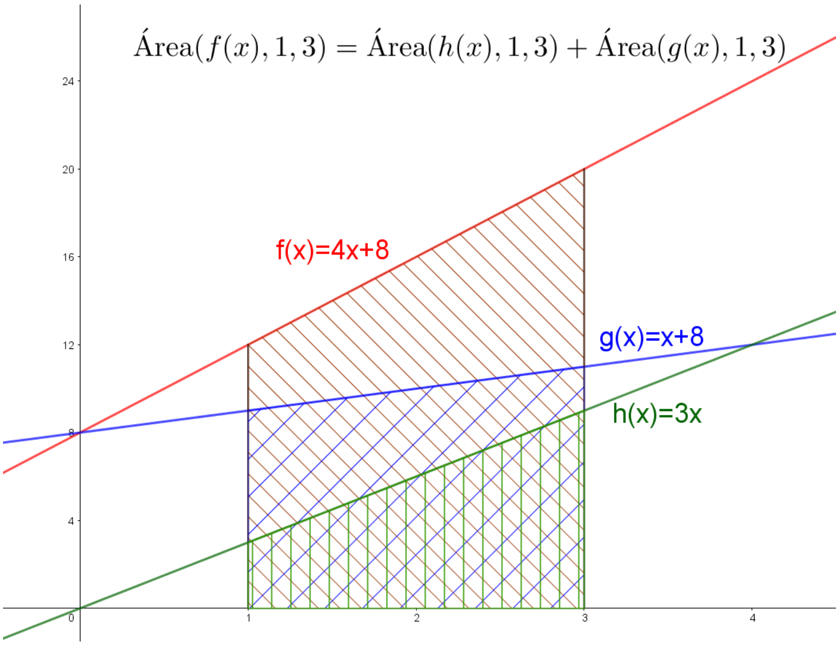
<u>Categorización de las respuestas</u>

Para categorizar las respuestas dadas por los estudiantes en los dos cuestionarios se han construido redes sistémicas (Bliss, 1987) para cada uno de los ítems, las cuales permiten visualizar el camino (secuencia de categorías) seguido por cada estudiante en la resolución de cada problema. El número de cada estudiante se escribe entre llaves al final de cada secuencia.

A continuación, presentamos las secuencias de categorías seguidas por los estudiantes en cada ítem. Se muestra, como ejemplos concretos, las actuaciones más significativas de los estudiantes.

CC-1/ ÍTEM 1

Explicar por medio de gráficos o de otra forma por qué.



Categoría 1. Dibuja las tres regiones (trapecios) por separado.

Categoría 1.1. Divide cada región en triángulos y rectángulos, utiliza fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y justifican la igualdad. Ver figura 1. {22}.

Categoría 1.2. No divide las regiones. Ver figura 2. {18}.

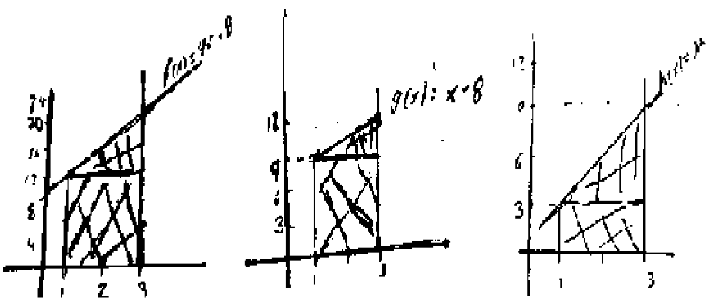


Figura 1

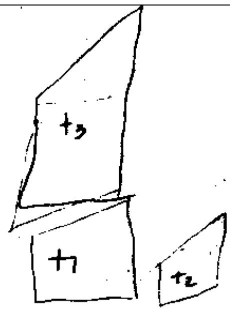


Figura 2

Categoría 1.3. Describe la situación comparando las tres funciones *f(x)>g(x)>h(x)* y no justifica la igualdad. {4}.

Categoría 1.4. Elabora gráficos de figuras elementales y no justifica la igualdad planteada en la proposición. Ver figura 3. {23}.

Categoría I.5. Elabora gráficos de figuras elementales (triángulos, trapecios, etc.) con la idea de Puzzle y justifica la igualdad. Ver figura 4. {1, 7, 10, 13, 15, 24, 26, 28}.

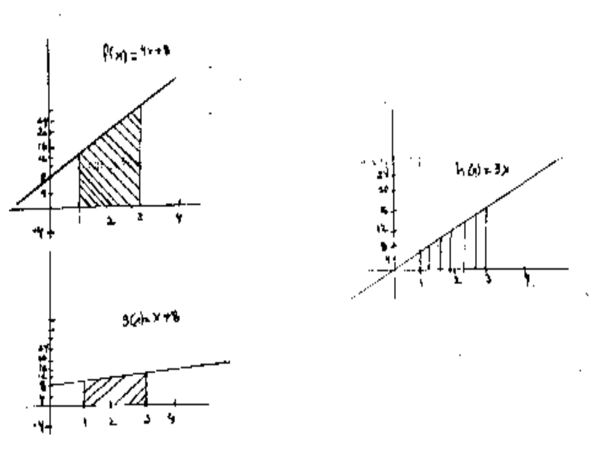


Figura 3

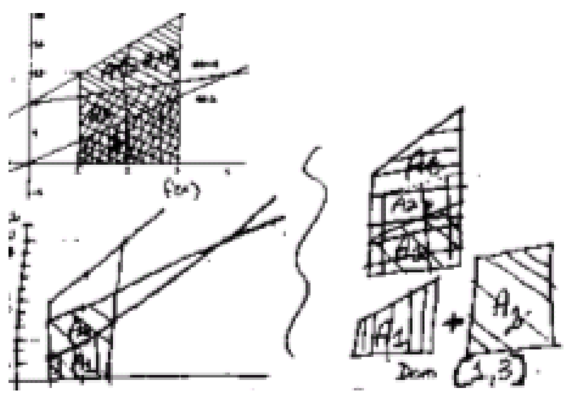


Figura 4

Categoría 2. Opera con la expresión algebraica de las funciones.

Categoría 2.1. Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones [*f(x)=h(x)+g(x); f(x)=(3x)+(x+8); f(x)=4x+8]*. {3, 5, 10, 11, 14, 20, 27}.

Categoría 2.2. Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica puntualmente la igualdad [*h(0)=3.0=0; g(0)=0+8=8; f(0)=4.0+8=8]*. {10, 14, 25}.

Categoría 3. Trabaja sobre el gráfico dado.

Categoría 3.1. Divide cada región en triángulos y rectángulos, utiliza fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y justifica la igualdad. Ver figura 5. {9, 12}.

Categoría 3.2. No divide las regiones, utiliza fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y justifica la igualdad. Ver figura 6. {2,21}.

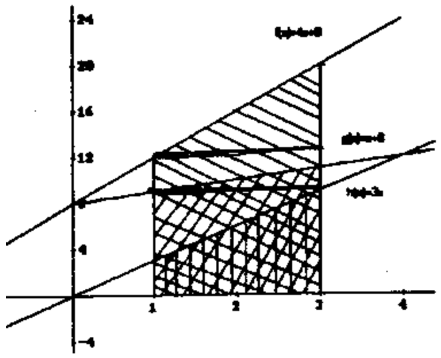


Figura 5

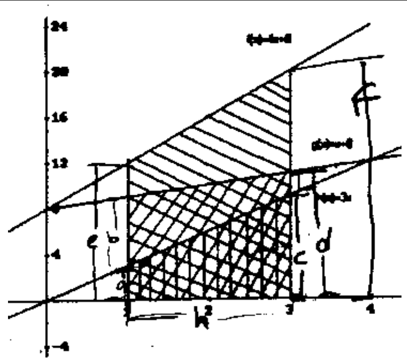


Figura 6

Categoría 4. Menciona que la igualdad no se cumple. {6}.

Categoría 5. No responde. {8, 16, 17,19}.

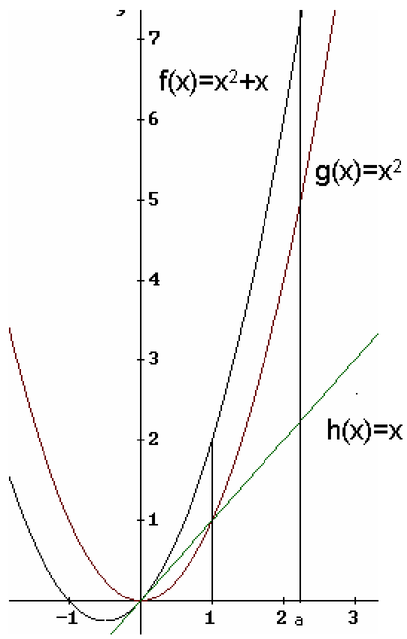
CC-2/ ÍTEM 1

Explicar por medio de gráficos o de otra forma por qué.

$$\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx + \int_1^a h(x)dx$$

donde

$$\left\{f(x) = x^2 + x; g(x) = x^2; h(x) = x\right\}$$



Categoría 1. Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad. {2, 3, 8, 10, 14, 15, 20, 22, 24, 25, 26, 28}.

Categoría 2. Dibuja por separado las regiones, calcula las integrales y verifica la igualdad. Ver figura 7. {4, 5}.

Categoría 3. Dibuja las regiones sobre la gráfica, calcula las integrales y verifica la igualdad. Ver figura 8. {12, 13, 27}.

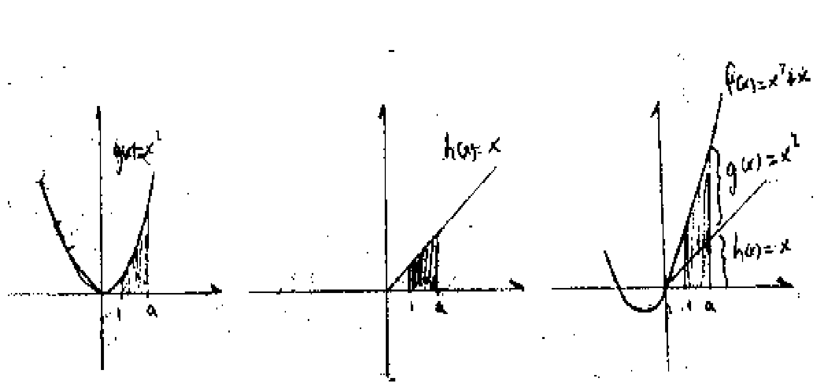


Figura 7

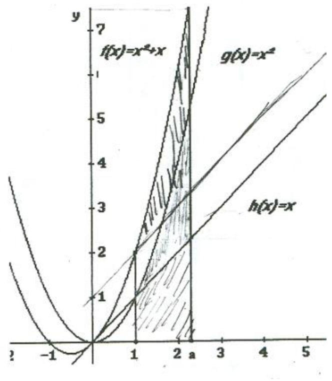


Figura 8

Categoría 4. Sustituye las expresiones algebraicas de las funciones en la igualdad dada. {6, 7, 18, 19, 21}.

Categoría 5. Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones. {1}

Categoría 6. No responde {9, 23}.

<u>Conclusiones parciales</u>

Una vez analizadas las categorizaciones anteriores, deducimos que los estudiantes, antes de cursar la unidad de Integral Definida utilizan:

Argumentos gráficos, dibujan figuras tales como triángulos, rectángulos y trapecios; los dibujan sobre el gráfico dado o tratan de separar las figuras y tratarlas como puzzle (ver categorías 1 y 3).

Argumentos simbólicos, utilizan fórmulas de cálculo de área de estas figuras (ver categorías 1.1, 3.1, 3.2); las expresiones algebraicas de las funciones y realizan comparaciones (ver categorías 1.3, 2.1).

Argumentos numéricos, calculan el valor de cada área, suman e igualan los resultados (ver categorías 1.1, 3.1, 3.2); calculan valores particulares de cada función y comparan los resultados (ver categoría 2.2).

En general, los estudiantes argumentan su respuesta con representaciones gráficas. Las representaciones simbólicas-numéricas son consecuencia de una utilización previa de la representación gráfica. Se percibe cierto intento de mover figuras y tratar de llenar espacios.

Una vez cursada esta unidad, los estudiantes tienden, en general, a utilizar:

Argumentos simbólicos y numéricos consistentes en la sustitución de la expresión algebraica de cada función en la integral respectiva, cálculo de las integrales y comparación de los resultados (ver categoría 1).

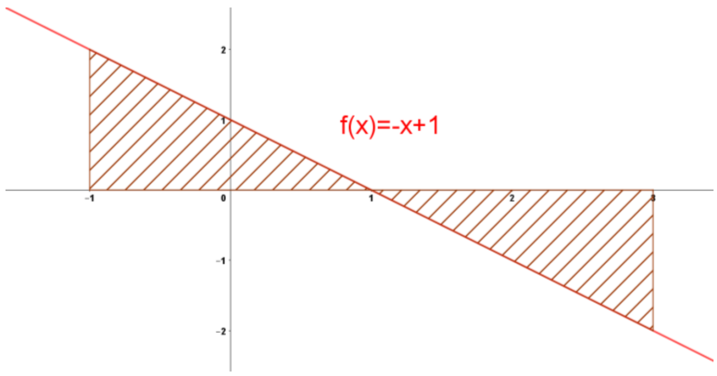
Argumentos gráficos marcando sobre la gráfica (ver categoría 3).

Argumentos simbólicos con los que comparan simplemente las expresiones de las funciones (ver categorías 4 y 5).

En este ítem del CC-2, en líneas generales, la representación gráfica ha pasado a un segundo plano o no se utiliza; además, ningún estudiante trata de justificar la propiedad utilizando la división del intervalo y las sumas de Riemann o el cálculo de la aproximación mediante trapecios (en el trabajo de Orton sí lo hacen). Esto puede ser debido a la mayor facilidad que ofrece el operar en las representaciones simbólicas-numéricas que en las gráficas; y al hecho de que el estudiante puede pensar que resulta más rápido y aceptable el uso de integrales para justificar la igualdad. Debemos hacer notar que dos estudiantes del G1 (ver categoría 1), que cursaron las PL de esta unidad, separan y rellenan las regiones, tal vez en un intento de compararlas, aunque ello es un indicio un tanto débil, se puede decir que esto puede estar influenciado por lo que hicieron en las PL en las que las regiones se cubrían por figuras hasta dar una apariencia similar a la que se observa en el ejemplo.

CC-1/ ÍTEM 2

Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



Categoría 1. Trabaja sobre el gráfico dado

Categoría 1.1. Dibuja un trapecio y dos triángulos, obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula las áreas usando la fórmula y $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 9. {13, 23}

Categoría 1.2. Dibuja un rectángulo y dos trapecios, obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula las áreas usando las fórmulas $A = b \cdot h$ y $A = \frac{(B+b)}{2}h$ respectivamente. Ver figura 10. {27}.

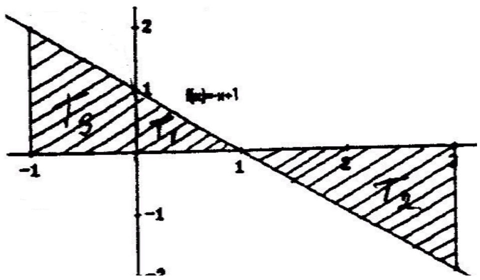


Figura 9

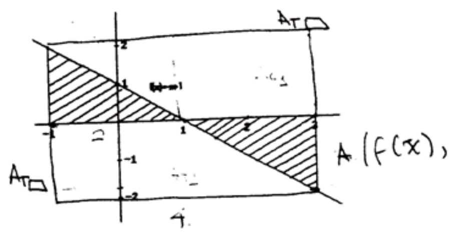


Figura 10

Categoría 1.3. Identifica los dos triángulos en el gráfico dado.

Categoría 1.3.1. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 11. {1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 24, 25, 26, 28}.

Categoría 1.3.2. Usa la expresión algebraica de la función y la fórmula de la distancia entre dos puntos para obtener las medidas de los lados y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 12. {19}

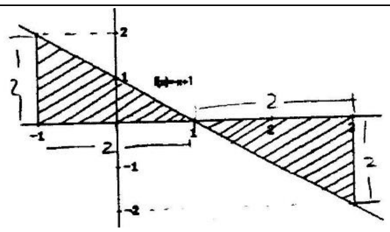


Figura 11

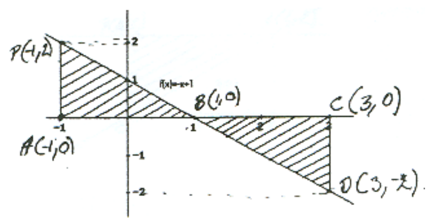


Figura 12

Categoría 1.3.3. Calcula la imagen de la función en -1 y 3, y le aplica valor absoluto al resultado. Calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 13 {7, 21, 22}.

Categoría 1.3.4 Aplica el teorema de Pitágoras para obtener las medidas de los lados y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 14. {4, 16, 17}.

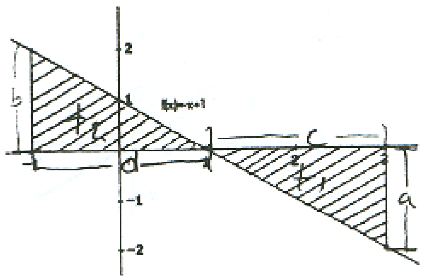


Figura 13

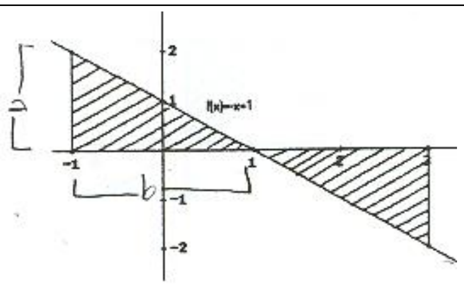
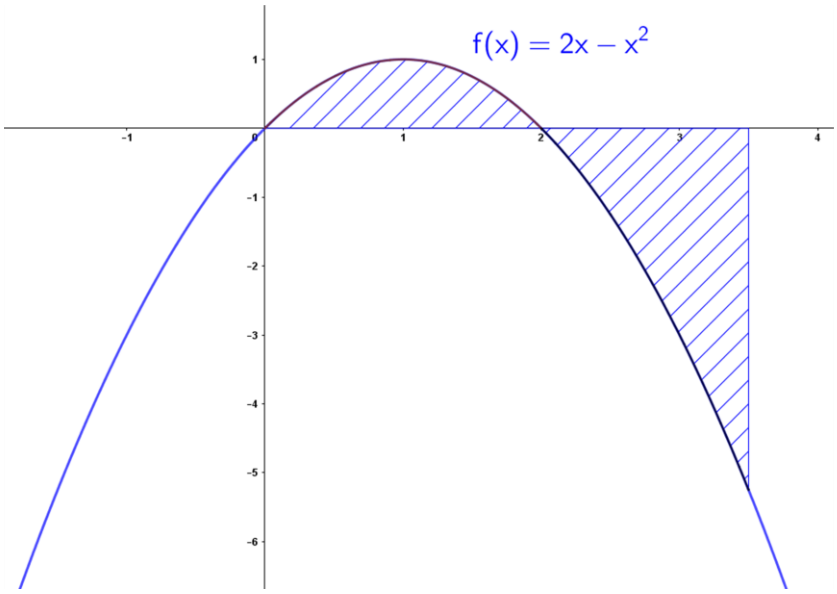


Figura 14

Categoría 2. No responde. {2, 14, 20}

CC-2/ ÍTEM 2

Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué



Categoría 1. Calcula el área de la región que está en la parte superior (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales.

Categoría 1.1. Antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX {1, 5, 10, 12, 15, 18, 19, 20, 22, 27}.

Categoría 1.2. Aplica valor absoluto al resultado de la integral de la región situada bajo el eje OX. {7}.

Categoría 1.3. No cambia el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX.

Categoría 1.3.1. Suma las dos integrales sin cambiarle el signo a la integral de la región situada bajo el eje OX. {4, 14}.

Categoría 1.3.2. No suma los resultados de las dos integrales. {24}.

Categoría 2. Calculan el área de las regiones usando aproximación numérica. {2}. Ejemplo.

Por la regla de Simpson

$$[0,2] \quad \Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$x_1 = 0 \;\; y_1 = 0; \;\; x_2 = 0.4 \;\; y_2 = 0.64; \;\; x_3 = 0.8 \;\; y_3 = 0.96;$$
$$x_4 = 1.2 \;\; y_4 = 0.96; \;\; x_5 = 1.6 \quad y_5 = 0.64; \quad x_6 = 2 \quad y_6 = 0$$

$$S_5 = \frac{2}{5}\left[0 + 4(0.64) + 2(0.96) + 4(0.96) + 2(0.64) + 0\right] = 1.28$$

$$\left[2, {}^{7}\!/_{2}\right] \qquad \Delta x = \frac{{}^{7}\!/_{2} - 2}{5} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$x_1 = 2 \;\; y_1 = 0; \;\; x_2 = 2.3 \;\; y_2 = -0.69; \;\; x_3 = 2.6 \;\; y_3 = -1.56;$$
$$x_4 = 2.9 \;\; y_4 = -2.61; \;\; x_5 = 3.2 \quad y_5 = -3.84; \quad x_6 = 3.5 \quad y_6 = -5.25$$

$$S_5 = \frac{3}{10}\left[0 + 4(-0.69) + 2(-1.56) + 4(-2.61) + 2(-3.84) + (-5.25)\right] = -2.644$$

Por ser área bajo la curva x es $|-2.644| = 2.644$ A_T =1.28+2.644=3.924

Categoría 3. Calcula el área de la región sobre el eje OX por aproximación numérica y el área de la región bajo OX usando la Integral Definida. {9}.

Categoría 4. Calcula el área de la región sobre el eje OX utilizando Integral Definida y no calcula el área de la región que esta bajo el eje OX.

Categoría 4.1. Desconoce, para la región bajo el eje OX, la recta vertical. {3, 13, 23}

Categoría 4.2. La región bajo el eje OX no esta bajo la curva. {6, 28}.

Categoría 4.3. No calcula el área de la región bajo el eje OX. {25}.

Categoría 5: No responde {21}.

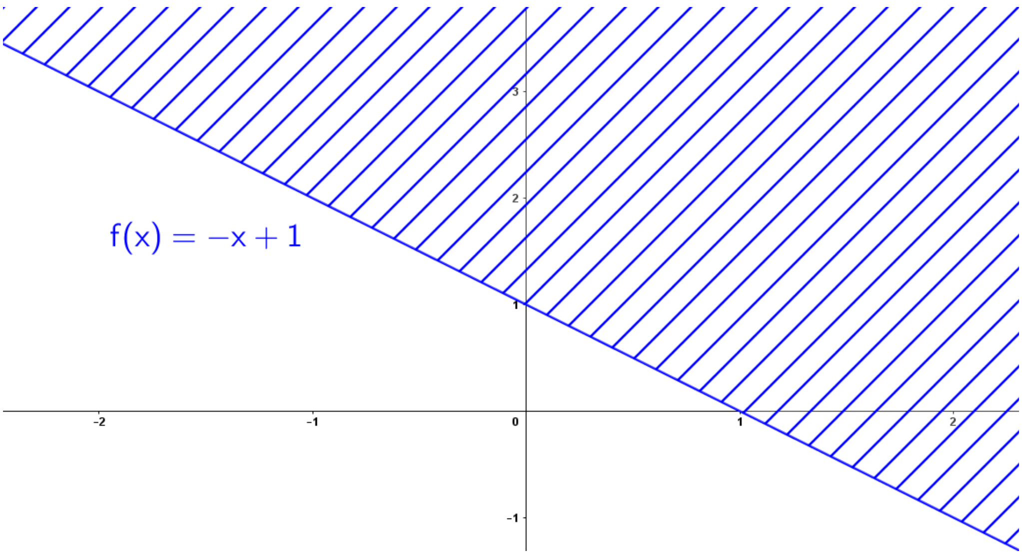
<u>Conclusiones parciales</u>

Después de analizar las categorizaciones anteriores, comprobamos que los estudiantes, antes de cursar la unidad de integrales utilizan la secuencia de representaciones gráfica-simbólica-numérica (ver categoría 1). Al calcular el valor del área de la porción bajo el eje OX la han considerado como positiva; la mayoría ha estimado,observando la gráfica, la altura del triángulo dibujado por ellos, que se encuentra bajo el eje OX (ver categorías 1.1, 1.2, 1.3.1); otros calculan valores de la función utilizando la expresión algebraica (ver categoría 1.3.2), otros aplican valor absoluto para obtener un número positivo (ver categoría 1.3.3) y otros, más artificiosos, usan el teorema de Pitágoras (ver categoría 1.3.4). En todos estos procedimientos se observa la intención de resolver el problema para que el valor del área resulte positivo. No se observó que tuviesen problema con el calculo del área de la porción sobre el eje OX, simplemente la adicionaron con la que está bajo dicho eje.

Una vez cursada esta unidad, los estudiantes tienden a utilizar la gráfica de manera referencial para estimar el corte con el eje OX o para identificar las regiones; no se observó marcas sobre la gráfica. Calculan el área de la región, por lo general, utilizando integrales definidas (ver categorías 1, 3, 4). Utilizan aproximaciones numéricas (ver categorías 1 y 3) sin dibujar figuras elementales sobre la gráfica. No se observó, en general, que tuviesen problemas para calcular el valor del área de la región bajo el eje OX; no obstante, un pequeño grupo (ver categoría 4) presenta problemas con la interpretación de la gráfica. En general, los estudiantes fundamentan sus procedimientos en procesos simbólicos- numéricos, de modo que lo gráfico ha pasado a ser algo complementario. Debemos hacer notar que dos estudiantes (ver categorías 2 y 3) del G1 que cursaron PL en esta unidad fueron los que utilizaron aproximación numérica; esto puede estar influenciado por el énfasis puesto en las PL a la aproximaciones numéricas a través del PU.

CC-1/ ÍTEM 3

Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



Categoría 1: No es posible calcular el área de la región

Categoría 1.1. Afirma que la región es infinita. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 25}.

Categoría 1.2. Afirma que el dominio no está restringido. {14, 26}.

Categoría 2: Acota la región dibujando segmentos y calcula el área usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 15.

Categoría 2.1. Afirma que sería imposible calcular el área sin tener el intervalo. {24}.

Categoría 2.2. Afirma que el resto no es calculable porque no se puede asociar a una superficie conocida. {15}.

Categoría 2.3. No considera el resto de la región. {8, 27}.

Categoría 2.4. Afirma que la región es infinita. {1}.

Categoría 2.5. Afirma que el dominio no está restringido. {12}

Categoría 2.6. Afirma que

$$x_1 = \frac{-xy + x}{2};\ x_2 = yx - \tfrac{1}{2};\ x_3 = y - xy;\ A_t = x_1 + x_2 + x_3.\ \{10\}$$

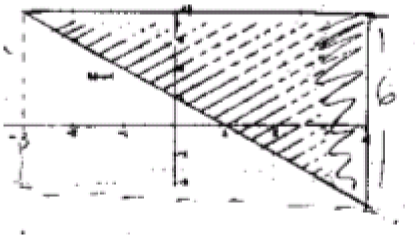
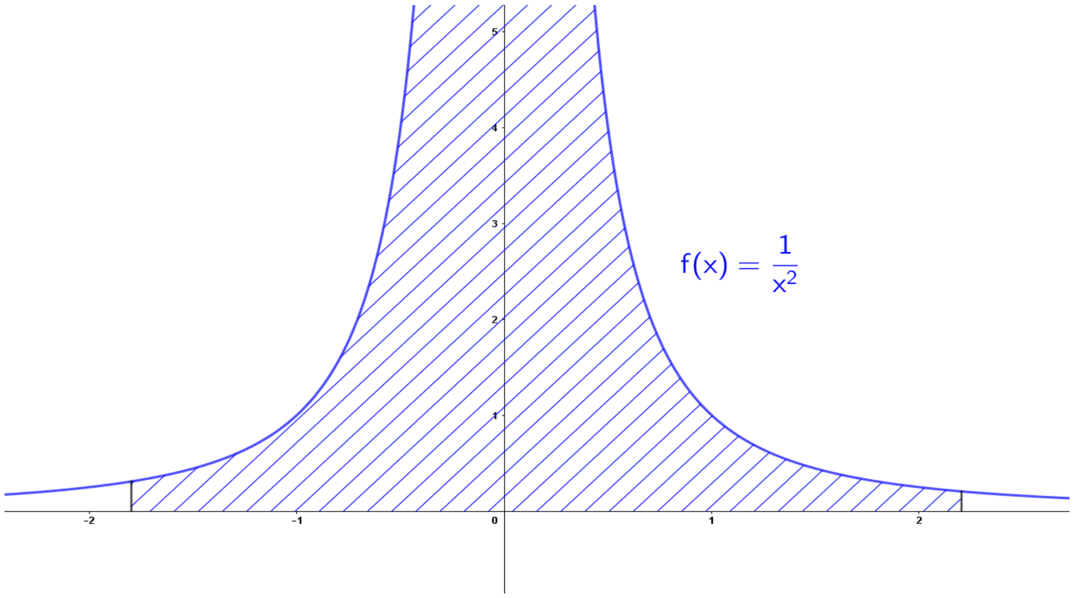


Figura 15

Categoría 3. No responde. {11, 19, 23, 28}

CC-2/ ÍTEM 3

Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



Categoría 1: No es posible calcular el área

Categoría 1.1. La función no es continua en el intervalo. {8, 19, 26}.

Categoría 1.2. Plantea

$$\int_a^b x^{-2}dx$$

Categoría 1.2.1. Para [a, b]= [-18/10, 22/10]. Sin calcular, menciona que la integral no existe en cero. {26}.

Categoría 1.2.2. La calcula dividiendo [a, b] en [-2, 0], [0, 2] y obtiene 1/0 en ambos casos. Menciona que la integral no existe en cero. {5, 27}.

Categoría 1.3. La función no está definida en el intervalo.

Categoría 1.3.1. Plantea $\int_a^b x^{-2} dx$

Divide [a, b] en [-1.7, 0], [0, 2.1] sin calcular. {6}.

Categoría 1.4. La gráfica tiene una asíntota.

Categoría 1.4.1. Plantea $\int_a^b x^{-2} dx$

La calcula para [a, b]= [-1.7, 2.2] y obtiene 1.04278. {12}.

Categoría 1.4.2. Plantea $\int_a^b x^{-2} dx$

La calcula dividiendo [a, b] en [-1.8, 0], [0, 2.1] y obtiene “infinito” en ambos casos. {14}.

Categoría 1.5. Afirma que la función no está definida en un punto x. {22}.

Categoría 1.6. Afirma que la región rayada es infinita. {2, 9, 13, 18, 21, 25}.

Categoría 1.7. Afirma que la curva crece sin límite. {1, 23, 28}.

Categoría 1.8. Afirma que la región no está acotada.

Categoría 1.8.1. Sin explicación por qué. {3}.

Categoría 1.8.1. Da un ejemplo gráfico. Ver figura 16. {24}.

Categoría 1.9. Afirma que la región debe estar en un intervalo cerrado. Da un ejemplo gráfico. Ver figura 17. {4}

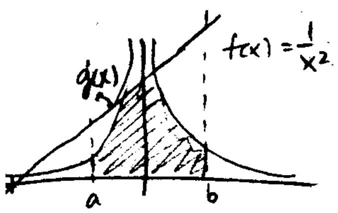


Figura 16

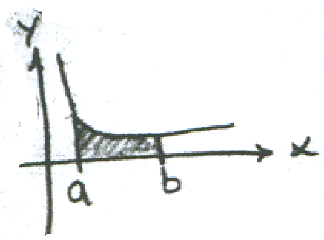


Figura 17

Categoría 2. Sí es posible calcular el área.

Categoría 2.1. Calcula

$$I = \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

Categoría 2.1.1. Para [a, b]= [-1.75, 2.1] y obtiene I= -1.06. {7}.

Categoría 2.1.2. Para [a, b]= [-1.8, 2.2] y obtiene I= -5.49. {15}.

Categoría 2.1.3. Para [a, b]= [0, 2] y obtiene I= 8/3. {20}.

Categoría 2.2. Aplica la Regla de Simpson y afirma que el área es 2.82. {10}.

Conclusiones parciales

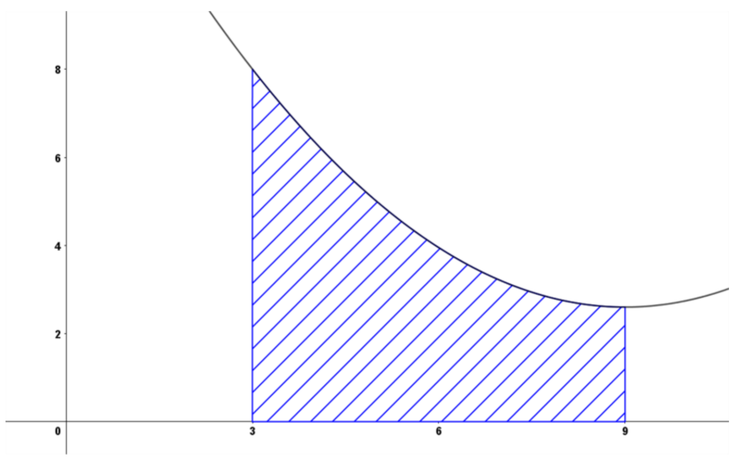
Una vez analizadas las categorizaciones anteriores, podemos afirmar que los estudiantes, antes de recibir la instrucción, basan su justificación en el registro gráfico dado, de modo que la mayoría considera que el área no se puede calcular; argumentando que la región es infinita o su dominio no está restringido (ver categorías 1.1, 1.2). Otros delimitan la región con segmentos, tal vez porque tienen una idea de que el área es siempre finita y que es siempre calculable (ver categorías 2.2, 2.3). Otros, de igual manera, delimitan parte de la región y se refieren al resto como que no es calculable (ver categorías 2.1, 2.2, 2.3). Un estudiante (ver categoría 2.6) establece expresiones algebraicas para el cálculo del área de la región, tal vez tiene la idea de que esta manera de resolución es matemáticamente más aceptable.

Después de cursar la unidad, la mayoría de los estudiantes considera que el área de la región no se puede calcular. Utilizan el registro gráfico, unos con mayor énfasis (ver categorías 1.1, 1.6, 1.7, 1.8.1) que otros (ver categorías 1.2.1, 1.4.1); argumentan que la función no existe en cero, que la región es infinita, o que no está acotada; los razonamientos basados en registros gráficos están ligados, en gran parte, al tratamiento de los registros simbólicos, es decir al cálculo de la Integral Definida; la representación gráfica ejerce mayor influencia en el tipo de respuesta que la algebraica (ver categoría 1.2.1). Los que mencionan que sí es posible calcular el área sólo usan el registro simbólico esto es, calculan la integral aplicando directamente la regla de Barrow como el cálculo de integrales (ver categoría 2.1) o la aproximación numérica (ver categoría 2.2). Varios estudiantes del G1 dan argumentaciones gráficas en sus respuestas (ver categorías 1.6, 1.7, 1.8.1); debemos hacer notar que un estudiante (ver categoría 1.9) dibuja una figura semejante a la que se puede obtener trabajando con el PU, es decir, con la idea de aproximar una región mediante cuadraturas.

En un posterior estudio con PL se tendrá que observar la influencia del ambiente computacional y el uso del PU en la resolución de problemas de cálculo de Integral Definida que estén relacionadas con regiones no acotadas y determinar si los estudiantes tratan de realizar sus cuadraturas o si intentan realizar aproximaciones.

CC-1/CC-2/ ÍTEM 4

El área de la región sombreada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados?



CC-1. Primera pregunta

Categoría 1 Trabaja sobre la gráfica dada.

Categoría 1.1. Dibuja cuatro rectángulos, calcula el área usando la fórmula $A=\frac{b\cdot h}{2}$ y justifica la cota inferior comparando con el área de $R_1=12$ y la cota superior comparando con la suma aproximada de las áreas $R_1+1/3R_2+1/2R_3=26$. Ver figura 18. {25}.

Categoría 1.2: Dibuja dos rectángulos, calcula las áreas usando la fórmula $A=b\cdot h$ y justifica la cota inferior comparando con el área de $R_2=12$ y la cota superior comparando con el área de $R_1=48$. Ver figura 19. {18, 20, 21, 26}.

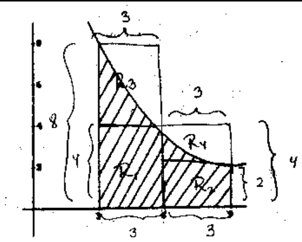


Figura 18

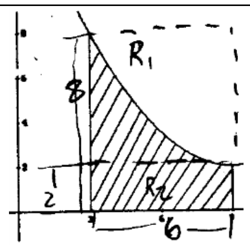


Figura 19

Categoría 1.3: Dibuja un triángulo y un rectángulo, calcula las áreas usando las fórmulas $A=b\cdot h$ y $A=\frac{b\cdot h}{2}$ respectivamente. Justifica la cota inferior comparando con el rectángulo de área igual a 12, y la cota superior comparando con la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo (área total = 30). Ver figura 20. {1, 5, 6, 9, 10, 12, 19, 22}.

Categoría 1.4: Dibuja dos rectángulos y un triángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A=b\cdot h$ y $A=\frac{b\cdot h}{2}$ respectivamente, suma las áreas, obtiene el valor 24 y lo compara con las dos cotas dadas. Ver figura 21. {2}.

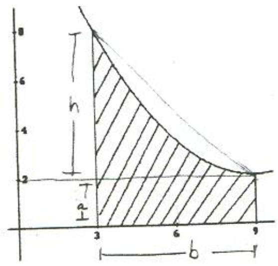


Figura 20

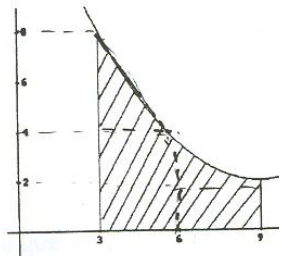


Figura 21

Categoría 1.5: Dibuja dos trapecios y calcula sus áreas usando la fórmula $A=\frac{(B+b)}{2}h$. Justifica la cota inferior y la compara con el área del trapecio que es igual a 22.2, y la cota superior comparando con el área del trapecio igual a 30. Ver figura 22. {7}.

Categoría 1.6: Dibuja un trapecio, calcula el área usando la fórmula $A=\frac{(B+b)}{2}h$, y justifica las dos cotas por comparación con el trapecio de área 30. Ver figura 23. {8, 14}.

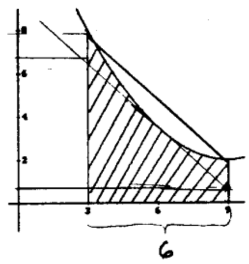


Figura 22

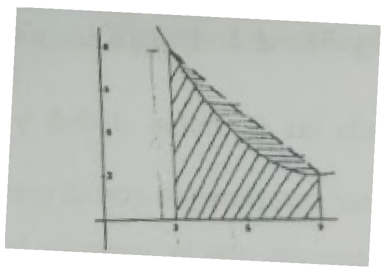


Figura 23

Categoría 2. No responde. {3, 4, 11, 13, 15, 16, 17, 23, 24, 27, 28}.

CC-1: Segunda pregunta

Categoría 1. Calcula cotas más ajustadas.

Categoría 1.1. Dibuja un triángulo y un rectángulo. Ver figura 20.

Categoría 1.1.1. Calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, y propone una mejor cota inferior con el área de triángulo, igual a 18, y una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo, igual a 30. {1, 5, 9, 10, 12}.

Categoría 1.1.2. Calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, propone una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo, igual a 30. {6, 19, 22}.

Categoría 1.2. Dibuja dos trapecios, calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{(B+b)}{2} h$ y propone una mejor cota inferior con el área del trapecio igual a 22.2 y una mejor cota superior con el área del trapecio igual a 30. Ver figura 22 {7}.

Categoría 2. Calcula un valor aproximado del área.

Categoría 2.1. Dibuja cuatro rectángulos, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y afirma que el valor aproximado es 26. Ver figura 18. {25}.

Categoría 2.2. Dibuja dos rectángulos y un triángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, y afirma que el valor aproximado del área es 24. Ver figura 21. {2}.

Categoría 2.3. Dibuja un trapecio y calcula el área usando la fórmula $A = \frac{B+b}{2} h$ y afirma que el valor aproximado del área es 30. Ver figura 23. {8,14}.

Categoría 2.3. Dibuja un triángulo y un trapecio y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$ y $A = b \cdot h$ respectivamente, y afirma que el valor aproximado del área es 25. Ver figura 24. {26}.

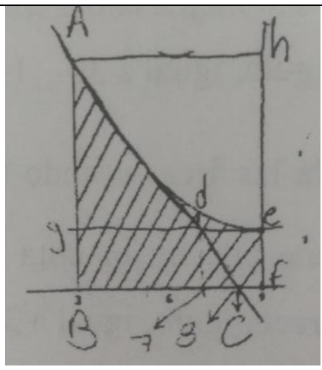


Figura 24

Categoría 3. No responde. {3, 4, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 28}.

CC-2. Primera pregunta

Categoría 1. Trabaja sobre el gráfico dado.

Categoría 1.1. Dibuja dos rectángulos, calcula las áreas usando la fórmula A=b.h y justifica la cota inferior comparando con el área del rectángulo, igual a 12, y la cota superior comparando con el área del rectángulo, igual a 48. Ver figura 25. {1, 2, 4, 9, 18, 19, 21, 24}.

Categoría 1.2. Dibuja un triángulo y un rectángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente, y justifica las cotas comparando con la suma de las áreas, igual a 30. Ver figura 26. {3,12}.

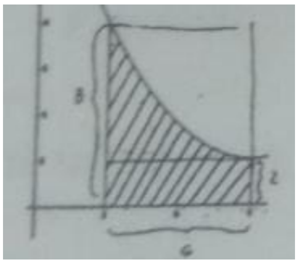


Figura 25

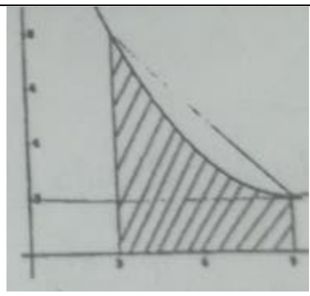


Figura 26

Categoría 1.3. Dibuja un trapecio y un rectángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$ y $A = b \cdot h$ respectivamente, y justifica la cota inferior comparando con el área de trapecio, igual a 12 y la cota superior comparando con el área del rectángulo, igual a 48. Ver figura 27. {7}.

Categoría 1.4. Dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores, para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 17 y para la de los superiores, 29, y no justifica las cotas. Ver figura 28. {22}.

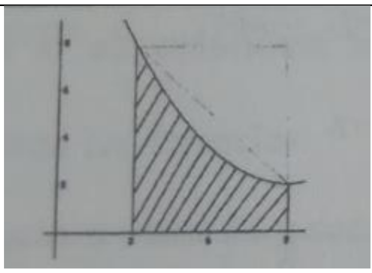


Figura 27

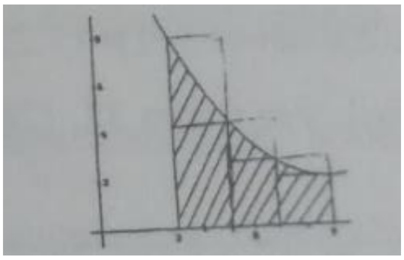


Figura 28

Categoría 1.5. Dibuja dos rectángulos superiores y dos inferiores, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 18 y para la de los superiores, 36, y justifica las cotas. Ver figura 29. {8,25}

Categoría 1.6. Dibuja dos rectángulos y dos triángulos, calcula las áreas usando las fórmulas $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, suma las áreas y obtiene 24. Ahora bien, no justifica las cotas encontradas. Ver figura 30. {13}.

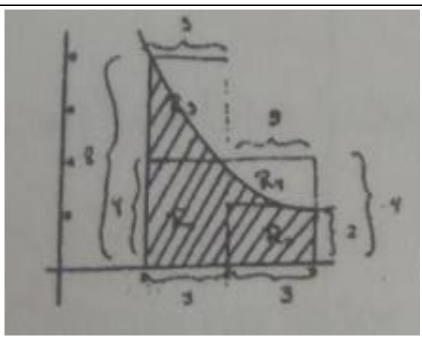


Figura 29

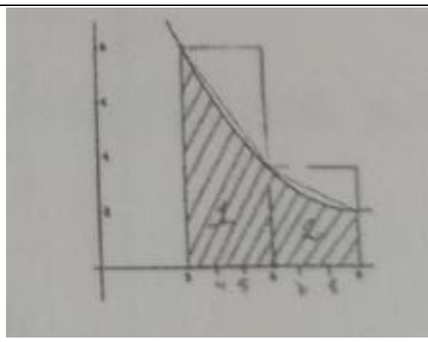


Figura 30

Categoría 1.7. Dibuja dos trapecios, calcula las áreas usando la aproximación numérica y calcula un área $A=\Delta x/2(y_0+y_1+y_2)=25$ sin escribir la justificación. Ver figura 31. {27}.

Categoría 1.8. Dibuja cuatro trapecios, calcula las áreas usando aproximación numérica y justifica las cotas comparando con el área de $A=\Delta x/2(8+6+4+3+2)=17.25$ con $\Delta x=2$ [uso incorrecto de la regla del trapecio]. Ver figura 32. {26}.

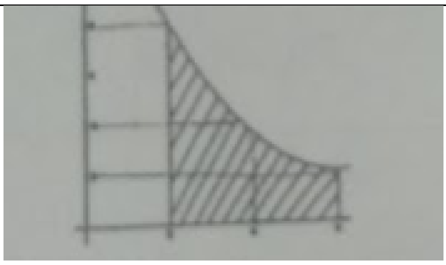


Figura 31

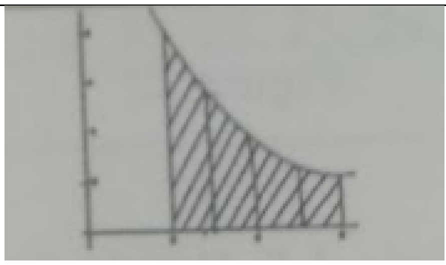


Figura 32

Categoría 1.9. Dibuja siete rectángulos, calcula las áreas usando la aproximación numérica y justifica las cotas comparando con el área de $A=0.75(1+2+3+4+5+6+7+8)$ [error en el cálculo del área de rectángulo]. Ver figura 33. {10}.

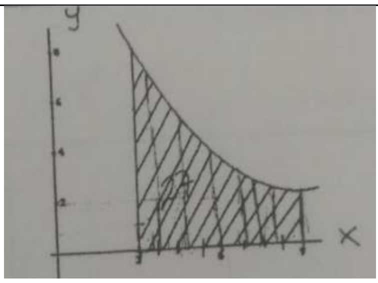


Figura 33

Categoría 2. No marca nada sobre el gráfico dado, obtine las áreas usando una aproximación numérica y justifica las cotas calculando lo siguiente:

$$S_n=\Delta x/3(1.8+4.4+1.2)=52/3, \text{ con } \Delta x=2,$$

$$T_n=\Delta x/2(1.8+2.4+1.2)=18, M_n=\Delta x(8/2+4+2)=20.$$

Esto es, hace un uso incorrecto de las reglas de Simpson, punto medio y trapecios. {5}.

Categoría 3. No responde. {6, 14, 15, 20, 23, 28}.

CC-2. Segunda pregunta

Categoría 1. Calcula cotas más ajustadas.

Categoría 1.1. Dibuja dos triángulos y un rectángulo, calcula las áreas mediante las fórmulas $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente, obtiene para el triángulo el valor 24 y suma las áreas del triángulo y el rectángulo y obtiene el valor 30, propone una mejor cota inferior con el área del triángulo y una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo. Ver figura 34. {1}.

Categoría 1.2. Dibuja dos rectángulos, dos triángulos y dos trapecios, calcula las áreas mediante las fórmulas $A = b \cdot h$, $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = \frac{B+b}{2}h$ respectivamente, y propone una mejor cota inferior con la suma de las áreas de los rectángulos y los triángulos, que es 24, y una mejor cota superior con el área de la suma del áreas de los trapecios, que es 27. Ver figura 30. {13}.

Categoría 1.3. No dibuja sobre el gráfico dado, calcula las áreas mediante una aproximación numérica y justifica las cotas calculando lo siguiente:

Sn=Δx/3(1.8+4.4+1.2)=52/3, con Δx=2, Tn=Δx/2(1.8+2.4+1.2)=18,

Mn=Δx(8/2+4+2)=20.

Es decir, utiliza Uso incorrectamente las reglas de Simpson, punto medio y trapecios. {5}.

Categoría 2. Calcula un valor aproximado del área.

Categoría 2.1. Dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y calcula el promedio de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores, que resulta igual a 23. Ver figura 28. {22}.

Categoría 2.2. Dibuja dos rectángulos superiores y dos inferiores, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y calcula el promedio de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores, cuyo valor es 27. Ver figura 29. {8, 25}.

Categoría 2.3. Dibuja un triángulo y un rectángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, y afirma que el valor aproximado del área es 30. Ver figura 26. {3, 12}.

Categoría 2.4 Dibuja seis trapecios, calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{B+b}{2} h$ y afirma que el valor aproximado del área es 25.3. Ver figura 35. {9}.

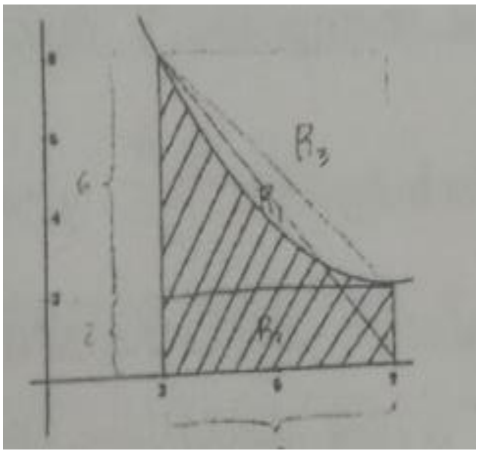


Figura 34

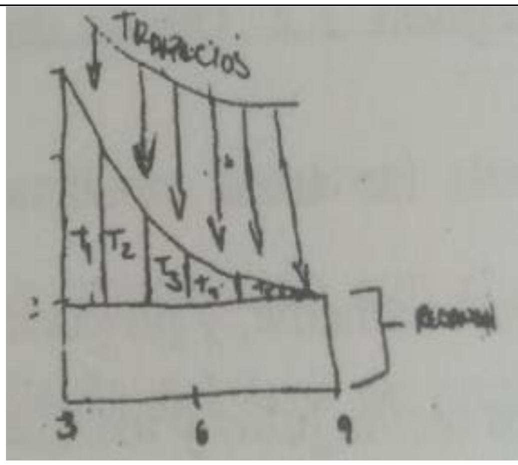


Figura 35

Categoría 2.5. Dibuja dos trapecios, calcula el área usando la aproximación numérica y afirma que, por la regla del trapecio, el valor aproximado del área es A=Δx/2(y_o+y_1+y_2)=25. Ver figura 31. {27}.

Categoría 2.6. Dibuja cuatro trapecios, calcula el área usando aproximación numérica y afirma que el área aproximada es A=Δx/2(8+6+4+3+2)=17.25 con Δx=2 [uso incorrecto de la regla del trapecio]. Ver figura 32. {26}.

Categoría 2.7. Dibuja seis trapecios, calcula el área usando aproximación numérica y afirma que por la regla del trapecio, el área aproximada es,

$$A=\Delta x/2(y_o+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+y_6)=$$

$$1/2(3+2.4+2.5+2.6+2.7+2.8+2.9)=22.5.$$

Errores en los cálculos. Ver figura 36. {19}.

Categoría 2.8. Dibuja siete rectángulos, calcula el área usando aproximación numérica y afirma que el valor aproximado del área es,

$$A=0.75(1+2+3+4+5+6+7+8)=27.$$

Error en el cálculo del área de rectángulo. Ver figura 33. {10}.

Categoría 2.9. No dibuja sobre el gráfico dado, y calcula las áreas usando aproximación numérica

Categoría 2.9.1. Afirma que, por la regla de Simpson, el valor aproximado del área es,

$$S_2=1[8+4.(3.6)+(2.2)]=24.6.$$

Hace un uso incorrecto de la regla. {2}.

Categoría 2.9.2. Usa 10 trapecios y afirma que el valor aproximado del área es,

$$A=6/10(3.6+4.2+4.8+5.4+6+6.6+7.2+7.8+8.4+9)=37.8.$$

{4}.

Categoría 3. Dibuja diecisiete rectángulos inferiores y superiores y afirma que *cuantos más rectángulos.... mayor será la aproximación*. Ver figura 37. {4}.

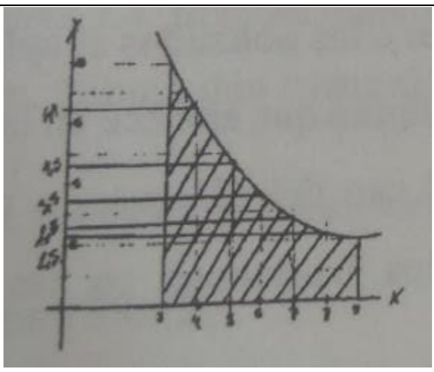


Figura 36

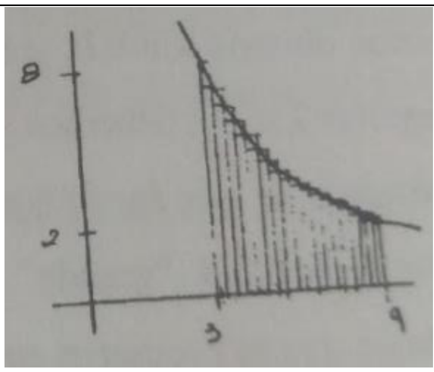


Figura 37

Categoría 4. Afirma que no se pueden dar valores más ajustados porque *no se conoce la función.* {14,21}.

Categoría 5. No responde. {6, 15, 18, 20, 23, 24, 28}.

Conclusiones parciales

Una vez analizadas las categorizaciones anteriores, deducimos que los estudiantes, antes de cursar la unidad de integrales, resuelven el problema realizando el tratamiento del registro gráfico, usando figuras elementales tales como triángulos, trapecios y rectángulos para "cuadrar" la región; se observa que el no tener la expresión algebraica de la función no les dificulta el cálculo del área de la región. Resulta notoria la manera como realizan la cuadratura de la región limitada por la curva, que recuerdan a los procedimientos utilizados por grandes matemáticos en el pasado; la idea de acotar entre dos valores esta presente en los procedimientos y así como el realizar refinamientos (ver categoría 1.1, 1.5, 1.6, 2.3).

Después de haber finalizado la unidad, algunos estudiantes siguen un procedimiento similar al que utilizaron cuando resolvían el CC-1 (ver categorías 1.1, 1.2, 1.3), otros muestran mayor influencia de la instrucción recibida en esta unidad (ver categorías 1.4, 1.9, 2.4, 2.7, 3). La cuadratura de la región limitada por la curva, también está presente en la resolución del problema, pero han mejorado el refinamiento (ver categorías 1.9, 2.4, 2.7, 3). Varios estudiantes del G1 muestran dibujos sobre la gráfica semejantes a los obtenidos al aplicar el PU (ver categorías 2.4, 3); debemos señalar que la figura que aparece en la categoría 3 se asemeja a lo que se obtiene mediante el uso del PU cuando se trata de dibujar una cantidad "grande" de rectángulos basándose en las ideas de aproximación que se proponen en él.

En un posterior trabajo con PL se tendrá que hacer mayor énfasis en la necesidad de hacer cuadraturas para las distintas regiones limitadas por las curvas, mediante el PU, así como mejorar el tratamiento de los registros gráfico-numéricos y establecer conversiones entre ambos registros, planteando además actividades que provoquen la coordinación de ambos registros.

CC-1 /ITEM 5

Calcular el área $A(f(x), -3{,}4)$ siendo $f(x) = \lvert x+2 \rvert$

Categoría 1. Representa gráficamente la función.

Categoría 1.1. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos. Con la expresión algebraica de la función y la fórmula de distancia entre dos puntos obtiene las medidas de los lados y las áreas con la fórmula la . Ver figura 38. {4, 19, 26}.

Categoría 1.2. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 38. {12, 18, 21}.

Categoría 1.3. Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 38. {1, 10, 14, 25}.

Categoría 1.4. Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos. Con la expresión algebraica de la función obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 38. {2}.

Categoría 1.5. Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 38. {9, 27}.

Categoría 1.6. Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos.

Con la expresión algebraica de la función obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 38. {22}.

Categoría 2. La representación gráfica de la función es incorrecta.

Categoría 2.1. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 39. {8}.

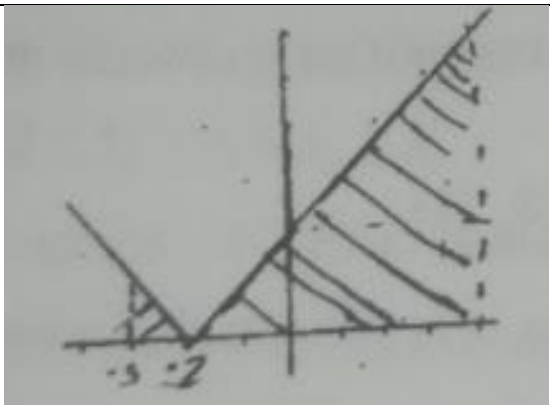
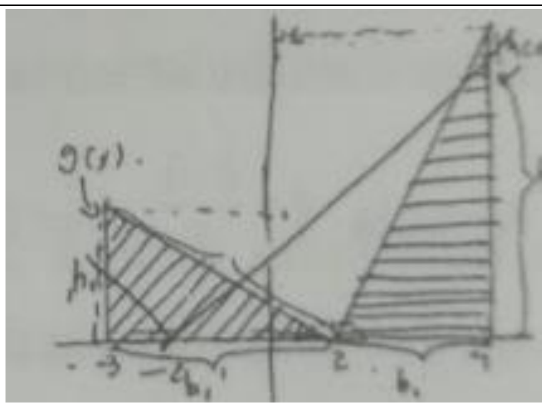
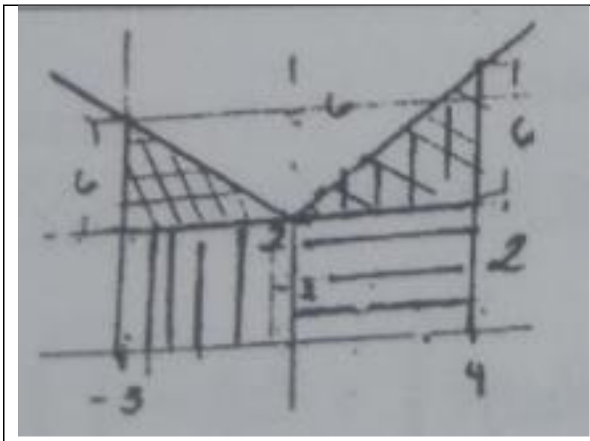
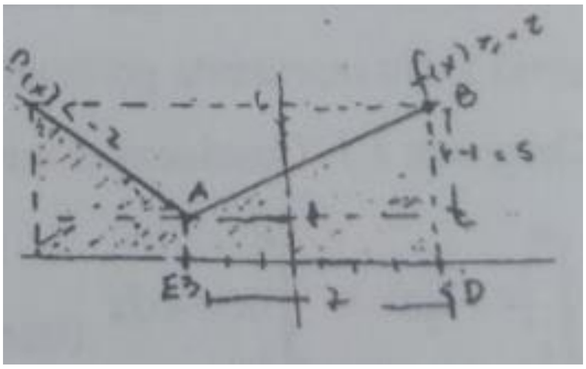
	

Figura 38	Figura 39

Categoría 2.2. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos y dos rectángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y las áreas con la fórmula y   respectivamente. Ver figura 40. {28}.

Categoría 2.3. Elabora una tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos y dos rectángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente. Ver figura 40. {24}.

Categoría 2.4. Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos y dos rectángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente. Ver figura 41. {15}.

 Figura 40	 Figura 41

Categoría 2.5. Define la función a trozos. Dibuja un triángulo. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 42. {11}.

Categoría 2.6. Evalúa la función en [-3,4]. Dibuja un triángulo. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 43. {7}.

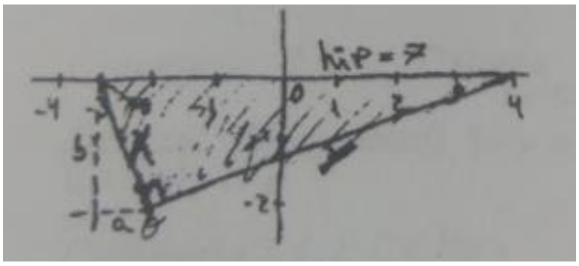


Figura 42

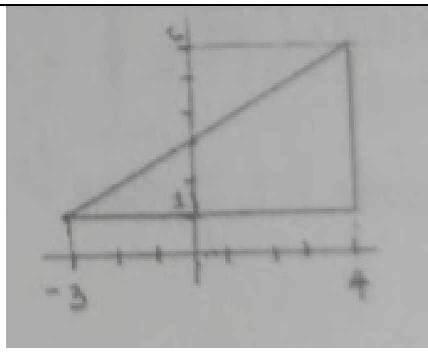


Figura 43

Categoría 3. No responde {3, 5, 6, 13, 16, 17, 20, 23}.

CC-2/ ÍTEM 5

Calcula $\int_{-3}^{4} \lvert \boldsymbol{x} + \mathbf{1} \rvert \, \boldsymbol{dx}$

Categoría I: No representa gráficamente la función.

Categoría 1.1. Considera el integrando como una función lineal. Calcula $\int_{-3}^{4} |x+1| dx$ (trascripción textual)

Categoría 1.1.1. Aplica valor absoluto al resultado. {2, 4, 7, 13, 14, 25}.

Categoría 1.1.2. No aplica valor absoluto. {1, 6, 18, 20, 27, 28}.

Categoría 1.2. Define $|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x-1, & x < 1 \end{cases}$ (trascripción textual)

Categoría 1.2.1. Calcula $\int_{-3}^{4} -x-1 \, dx$ (trascripción textual) {15}.

Categoría 1.2.2. Calcula $\int_{-3}^{4} |x+1| dx = \int_{-3}^{4} x+1 \, dx$ (trascripción textual) {10}.

Categoría 1.3. Define $|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$ (trascripción textual).

Categoría 1.3.1. Calcula $\int_{-3}^{4} |x+1|dx = \int_{-3}^{4} x+1\, dx$ (trascripción textual) {9}.

Categoría 1.3.2. Calcula $\int_{-3}^{-1} -x-1\, dx + \int_{-1}^{4} x+1\, dx$ (trascripción textual) {26}.

Categoría 1.4. Define $|x+1| = \begin{cases} -x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ (trascripción textual).

Categoría 1.4.1. Calcula $\int_{-3}^{4} -x-1\, dx + \int_{-3}^{4} x+1\, dx$ (trascripción textual) {3,5}

Categoría 1.4.2. Calcula

$$\int_{-3}^{0} |x+1|dx + \int_{0}^{4} |x+1|dx =$$

$$\int_{-3}^{0} x+1 \ dx + \int_{-3}^{0} -x-1 \ dx + \int_{0}^{4} x+1 \ dx + \int_{0}^{4} -x-1\, dx$$

(trascripción textual) (12).

Categoría 1.4.3. Calcula

$\int_{-3}^{-1} -x-1 \ dx + \int_{-1}^{0} x+1 \ dx + \int_{0}^{4} -x-1\, dx$ (trascripción textual) {22}.

Categoría 2. Representa gráficamente la función. Ver figura 44.

Categoría 2.1. $|x+1| = \begin{cases} -x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ (trascripción textual)

Categoría 2.1.1. Calcula $\int_{-3}^{-1} -x-1 \ dx + \int_{-1}^{4} x+1 \ dx$ (trascripción textual) {8}.

Categoría 2.1.2. Calcula

$$\int_{a}^{b} |x+1|dx = \left[\left|\frac{x^2}{2}+x\right|\right]_{-3}^{4} = -\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{4} = \cdots = \frac{29}{2}$$

(trascripción textual) {21}.

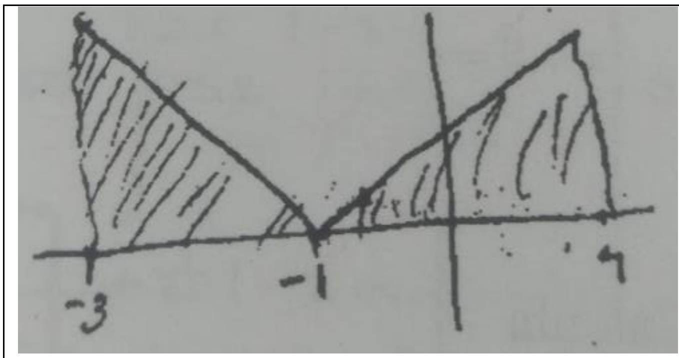


Figura 44

Categoría 3. No responde. {19, 23}.

Conclusiones parciales

Después de analizar las categorizaciones hechas para el CC-1 se observa que una gran parte de los estudiantes elaboran una representación gráfica de la función, algunos no especifican el procedimiento (ver categorías 1.1, 1.2, 2.1, 2.2), otros lo hacen usando tablas de valores (ver categorías 1.3, 1.4, 2.3) y otros definiendo la función a trozos (ver categorías 1.5, 2.4, 2.5); una vez representada la función, delimitan las regiones con dos triángulos, y, seguidamente, calculan el valor del área con la respectiva fórmula; algunos estudiantes se han equivocado al realizar la representación gráfica (ver categoría 2); no obstante, la idea general es empezar con un registro gráfico y realizar la conversión al registro simbólico de la manera más sencilla, ajustada evidentemente a los conocimientos que tienen hasta el momento.

Después de la instrucción, una parte de los estudiantes realizan un tratamiento sólo en el registro simbólico, algunos consideran el integrando como un función lineal (ver categoría 1.1); puede que estos estudiantes no tengan claro que se trata de la función valor absoluto y crean que sólo se trata del valor absoluto de un número; otros definen a trozos la función (ver categoría 1.2, 1.3, 1.4) y cometen errores, tanto en la definición como en el planteamiento de las integrales, principalmente en los límites de integración; únicamente uno (ver categoría 1.3.2) plantea y calcula las integrales; puede que al no representar gráficamente la función haya contribuido a que no se percaten del error. Los estudiantes que representaron gráficamente la función (ver categoría 2), a partir de la definición a trozos, escribieron correctamente los límites de integración, y, salvo un error de cálculo de la integral, resolvieron las integrales. Hay que hacer notar que los estudiantes pudieron haber calculado la integral con un procedimiento similar al usado en el CC-1 y no lo hicieron; puede que crean que este procedimiento no sería aceptable en una prueba sobre integrales.

El cambio de proceder en la resolución de este tipo de problema puede tener varias explicaciones; puede ser debido al contenido involucrado, a conocimientos previos o ahora adquiridos, o a la forma como se les ha presentado el problema. Se deben aclarar tales aspectos.

CC-2/ ÍTEM 6 (sólo en CC-2)

Indicar si es verdadero o falso que:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_{-1}^{1} = -\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2.$$

Justifique su respuesta.

Categoría 1: Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Resuelve la integral de igual manera que la dada. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 22, 23, 25, 28}.

Categoría 2: Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 2.1. La función no es continua. {8, 19}.

Categoría 2.2. El área de $1/x^2$ es infinita cerca de cero. {21}.

Categoría 2.3. La gráfica tiene una asíntota vertical. Representa gráficamente la función. Ver figura 45. {14, 24}.

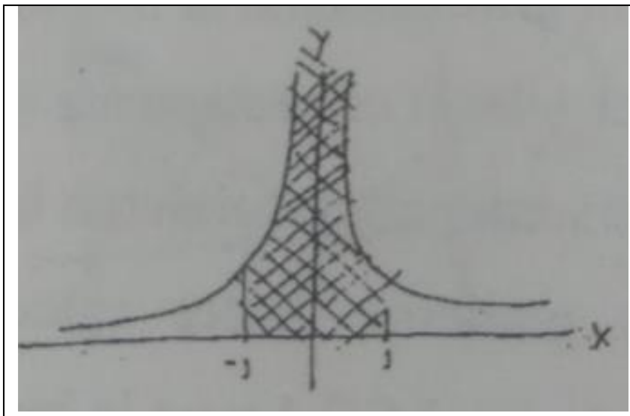


Figura 45

Categoría 3. No responde. {9, 26}

Conclusiones parciales

Después de analizar las categorizaciones anteriores, los estudiantes que afirman que la proposición es falsa se limitan a comprobar el procedimiento y no se detienen a reflexionar sobre el problema, al parecer se dejan llevar por la presentación del registro simbólico sin plantearse una representación gráfica (ver categoría 1). De los que afirman que es falsa, dos estudiantes representan gráficamente la función, pueden que hayan identificado la relación de este ítem con el ítem 3 (ver categoría 2.3); otros argumentan que la función no es continua o que "*el área...es infinita cerca de cero";* es posible que estos estudiantes se refieran a la necesidad de que la función sea continua para poder utilizar la Regla de Barrow. Ninguno de los estudiantes ha señalado el resultado negativo de la integral como argumento en su justificación, lo que resulta un tanto extraño si nos atenemos al tipo de respuesta en otros items (el área es positiva).

De las respuestas dadas en este ítem se generan algunos interrogantes:

¿Influyó en la respuesta de los estudiantes la presentación tan aparentemente directa de la Regla de Barrow?

¿Por qué no relacionaron este ítem, con el ítem 3?

¿Están pensando los estudiantes en las hipótesis de aplicación de la regla de Barrow cuando al expresar que la función no es continua o el área es infinita? Al no tomar en cuenta el resultado negativo de la integral ¿están relacionando la Integral Definida con el área o no logran establecer conexión alguna? Se Tratará en el estudio definitivo de aclarar estos interrogantes.

CC-1/ ÍTEM 6

Indicar si es verdadero o falso que: Si $A(f(x), a, b) \geq A(g(x), a, b)$ entonces $g(x) \geq f(x)$ para todo x que pertenece a $[a, b]$. Justifique su respuesta

Categoría 1. Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 1.1. Justifica rehaciendo la tesis $f(x) \geq g(x)$. {1, 3, 5, 12, 13, 15, 25}.

Categoría 1.2. Se requiere tener funciones definidas. {7}.

Categoría 1.3. Dibuja un diagrama y menciona que *g(x) tiene más área que f(x).* Ver figura 46. {24}.

Categoría 1.4. Representa gráficamente dos rectas y marca una región.

Categoría 1.4.1. Justifica rehaciendo la hipótesis, $A(g(x), a, g) \geq A(f(x), a, b)$. Ver figura 47. {2, 22}

Figura 46

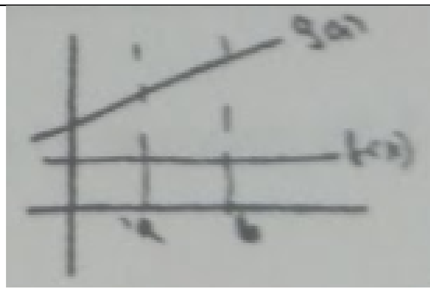


Figura 47

Categoría 1.4.2. Justifica rehaciendo la tesis $f(x) \geq g(x)$. Ver figura 48. {4, 6, 9, 17, 18, 19, 21}.

Categoría 1.4.3. Usa funciones lineales particulares y valores de estas y rehace la tesis . Ver figura 49. {14}.

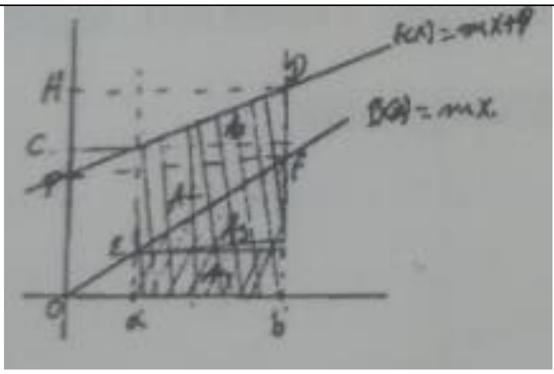


Figura 48

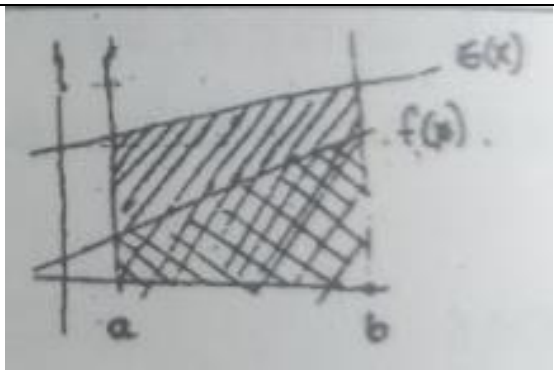


Figura 49

Categoría 1.4.4. Basa su justificación en el gráfico y menciona que se cumple en este caso. Ver figura 50. {26}

Categoría 2. Afirma que la proposición es verdadera, dibuja un diagrama.

Categoría 2.1. Escribe *A(g(x),a,b)A(f(x)a,b) f(x)g(x)↔ g(x)f(x).* Ver figura 51. {8}.

Categoría 2.2. Escribe que *xa o xb.* Ver figura 51. {10}

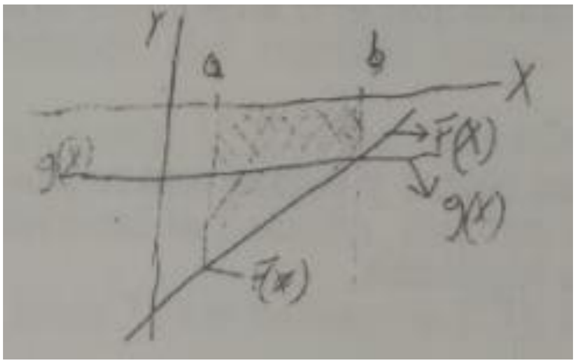


Figura 50

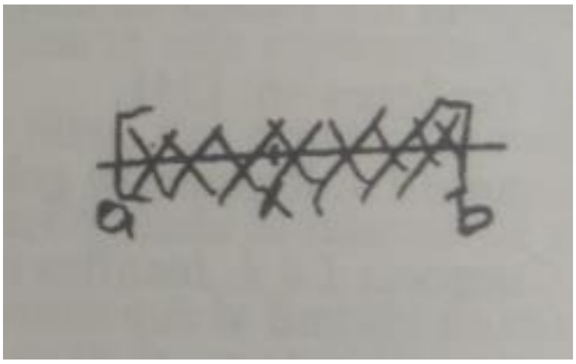


Figura 51

Categoría 3. No responde. {11, 16, 20, 23, 27, 28}.

CC-1/ ÍTEM 7

Indicar si es verdadero o falso que: Si $f(x) \geq g(x)$ entonces $A(f(x), a, b) \geq A(g(x), a, b)$. Justifique su respuesta.

Categoría 1. Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Dibuja un diagrama y menciona que *f(x) tiene más área que g(x).* Ver figura 52. {24}.

Categoría 1.2. Representa gráficamente dos rectas y marca una región.

Categoría 1.2.1. Rescribe la proposición enunciada. Ver figura 54. {2, 4, 6, 9, 18, 19, 21, 22}.

Categoría 1.2.2. Usa funciones lineales particulares y valores de estas para justificar. Ver figura 53. {14}.

Categoría 1.2.3. Basa su justificación el gráfico, menciona que se cumple según la gráfica. Ver figura 53. {26}

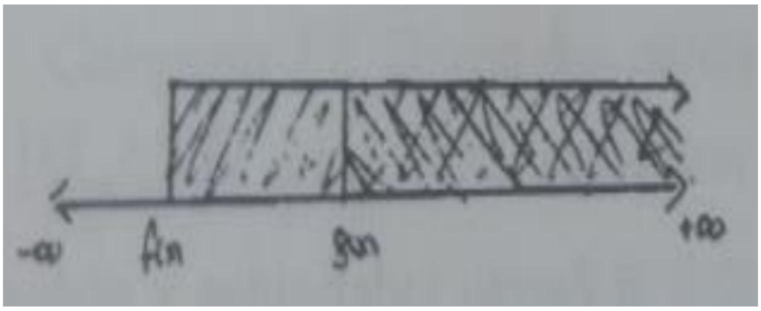


Figura 52

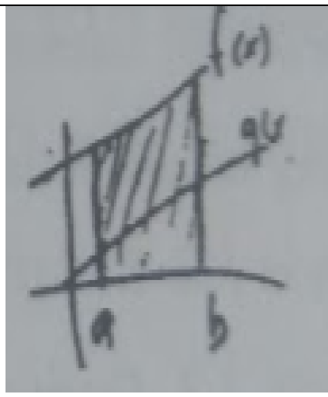


Figura 53

Categoría 1.3. Dibuja un diagrama.

Categoría 1.3.1. Vuelve a escribir la proposición. Ver figura 51. {8}.

Categoría 1.3.2. Rescribe la proposición enunciada. Ver figura 51. {10}

Categoría 1.4. Rescribe la proposición enunciada. {1, 5, 12, 15, 25, 20}

Categoría 2. Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 2.1. Se requiere tener funciones definidas. {3,7}.

Categoría 2.2. Se requiere tener la figura. {13}.

Categoría 3. No responde. {11, 16, 17, 23, 27, 28}.

CC-2/ ÍTEM 7

Indicar si es verdadero o falso que: Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ entonces $f(x) \geq g(x)$, para todo *x* que pertenezca a $[a, b]$. Justifique su respuesta.

Categoría I. Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Compara integrales particulares, por ejemplo: $\int_0^2 (x^2 + x)dx \geq \int_0^2 x^2\, dx$.

Categoría 1.1.1. De la comparación hecha, infiere que se cumple la tesis. {2, 4, 10, 14, 20, 24, 25, 28}.

Categoría 1.1.2. Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica la tesis. {3, 8}.

Categoría 1.2. Rescribe la proposición enunciada. {5, 6, 7, 12, 13, 15, 23}

Categoría 1.3. Deriva las integrales como si fueran indefinidas y deduce que se cumple la tesis. {18, 19, 21, 27}.

Categoría 2. Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 2.1. Resuelve $\int_0^2 (x^2 + x)dx \geq \int_0^2 x^2 dx \ldots 2.66 \geq 4$ y escribe "*FALSO*". {1}.

Categoría 2.2. Dibuja regiones y asegura que se cumple la hipótesis y no la tesis. Ver figura 54. {22}, ver figura 55 {26}.

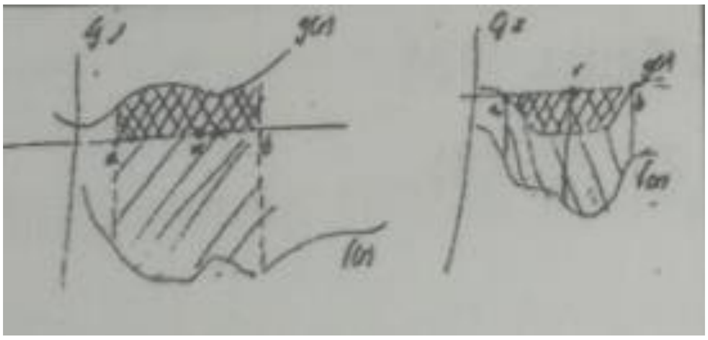


Figura 54

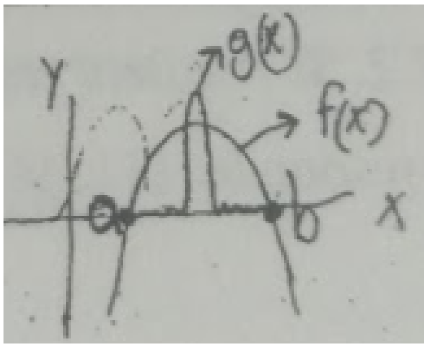


Figura 55

Categoría 3. No responde. {9}.

CC-2/ ÍTEM 8

Indicar si es verdadero o falso que: Si $f(x) \geq g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. Justifique su respuesta

Categoría 1. Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Da ejemplos particulares, por ejemplo *f(x)=x+2* y *g(x)=x+1*.

Categoría 1.1.1. Asegura que *f(x)≥g(x),* calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados. {2, 3, 10, 14, 19, 28}.

Categoría 1.1.2. Calcula valores de las funciones y los compara, calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados. {8, 20, 25}.

Categoría 1.2. Dibuja dos curvas y basa su justificación en el gráfico. Ver figura 56. {26}.

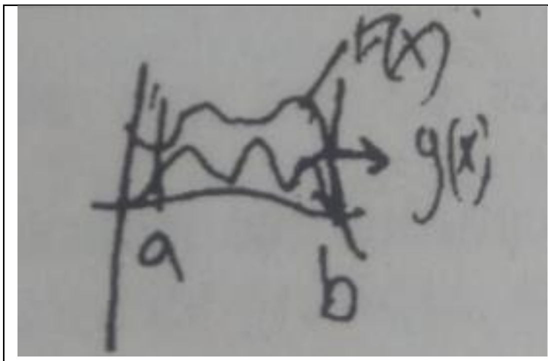


Figura 56

Categoría 1.3. Menciona que la desigualdad no se altera al aplicar la integral. {1, 5, 6}.

Categoría 1.4. Escribe en lenguaje habitual la proposición. {4, 9, 13, 15, 22, 23}.

Categoría 2. Afirma que la proposición es falsa porque se desconoce el intervalo de integración. {7, 12}.

Categoría 3. Afirma que la veracidad o falsedad de la proposición depende de la constante de integración. {18, 21, 27}.

Categoría 4. No responde. {24}.

Conclusiones parciales

Después de analizar las categorizaciones anteriores, podemos afirmar que los estudiantes, antes de cursar la unidad, no logran entender los términos generales planteados, unos rehacen la tesis o la hipótesis (ver categorías 1.1, 1.4.1, 1.4.3, 2.1 del ítem 6; 1.1, 1.3 del ítem 7), pensamos que es posible que se fijen en los términos interiores a los paréntesis de $A(f(x), a, b) \geq A(g(x), a, b)$ y que no se percaten de que se trata de comparación de áreas; otros mencionan que requieren definir funciones particulares (ver categorías 1.2 del ítem 6 y 2.1 del ítem 7); esto puede evidenciar que sólo conciben las proposiciones en términos particulares; otros elaboran diagramas sobre una recta (ver categorías 1.3 del ítem 6 y 2.2 del ítem 7), puede que estos estudiantes crean que se trata de inecuaciones en una variable. Entre los estudiantes que logran "entender" los planteamientos generales, tenemos los que dan contraejemplos (ver categorías 1.4.2, 1.4.4 del ítem 7) y los que dan ejemplos en los que se cumple la proposición (ver categorías 1.2.1 y 1.2.3), estos estudiantes relacionan las proposiciones con el área de regiones.

Después de desarrollar la unidad, entre los que interpretan la proposición, unos plantean integrales de funciones particulares (caso ítem 7) y luego camparan las funciones (ver categorías 1.1.1, 1.1.2) y viceversa (caso ítem 8) (ver categorías 1.1.1, 1.1.2); el tratamiento se circunscribe al registro simbólico, no se puede afirmar o negar que se planteen registros gráficos o relacionan este razonamiento con área de regiones. Dos estudiantes (ver categoría 2.2 del ítem 7) elaboran registros gráficos en los que se representan contraejemplos de la proposición, con la salvedad de que, el dibujado por el estudiante número 22, sólo es válido para el caso de que se considere el área de las regiones; en cambio en el del estudiante número 26, representa un contraejemplo, tanto si se trata del área como de integrales definidas cualesquiera. El registro gráfico elaborado en el ítem 8 (ver categoría 1.2) constituye una representación particular de la proposición.

Pensamos que el principal problema de los estudiantes ante estas proposiciones generales radica en una falta de comprensión no solo de los conocimientos relacionados, sino del propio significado del concepto de proposición. Habrá que tener en cuenta en el estudio definitivo este aspecto.

Conclusiones

Al inicio mencionamos que el presente trabajo forma parte de una investigación más amplia; localmente nos propusimos, con la aplicación de los cuestionarios, determinar tres aspectos relevantes:

- La idea de área que tienen los estudiantes antes de conocer el concepto de Integral Definida
- Cómo influye la instrucción recibida sobre la idea de área que tienen los estudiantes que participaron en Prácticas de Laboratorio
- Cómo utilizan las representaciones gráficas, numéricas y simbólicas a la hora de resolver los problemas sobre la Integral Definida que requieran del conocimiento de su relación con el área de figuras planas.

Teniendo en cuenta estos aspectos, podemos decir que los estudiantes, antes de recibir la instrucción, consideran el área como un valor numérico positivo asignado a una región; construyen figuras como si se tratase de un puzzle, sin tomar en cuenta las referencias con el sistema de ejes cartesianos. Puede que al considerar que el área de una región no acotada no se puede calcular, estén pensando en la figura, en cierto sentido, independiente del plano cartesiano. En relación con el uso de representaciones graficas-simbólicas, ya sea que el ítem este planteado en los dos sistemas de representación o en uno de ellos, los estudiantes siguen una secuencia gráfica-simbólica-numérica; se nota que las dos últimas son consecuencia de una utilización inicial del sistema de representación gráfico. Al expresar el cálculo del área con una proposición general, lo abordan con el uso de representaciones gráficas, tratando de mostrar la veracidad o falsedad de la proposición.

Una vez que los estudiantes han cursado la unidad, ambos grupos, utilizan fundamentalmente representaciones simbólicas-numéricas; las representaciones gráficas son utilizadas cuando se les proporciona y de una manera referencial. Hacen uso de las expresiones algebraicas de las funciones y las referencias del sistema de ejes cartesianos; puede que esto haya influido en que, como la inicio, no consideren las figuras como un puzzle. Se pudiera pensar que este comportamiento ha ocasionado un retroceso en la capacidad gráfica del estudiante, pero lo observado en el análisis del ítem 4 hace dudar de esta evidencia; la conducta del estudiante puede estar condicionada por varios elementos:

Por una parte,

- la resistencia a la visualización (Eisenberg y Dreyfus, 1991),
- la idea de que es una prueba sobre integrales y que los argumentos simbólicos serían más aceptables que los gráficos,
- resolverlo simbólicamente es más rápido y contundente (una economía de registros).

Por otro lado,

- La consideración de la Integral Definida como una herramienta para el cálculo del área de una región;

- La incapacidad de distinguir entre las distintas connotaciones de la Integral Definida y su relación con el área.

El registro simbólico de la Integral Definida ejerce una influencia determinante en la resolución de los problemas.

Centrándonos en el desempeño de los estudiantes que cursaron Prácticas de Laboratorio, se observó que, en líneas generales, utilizan divisiones de las gráfica que se asemejan a las obtenidas por ellos con el PU, tanto con la idea de "rellenar la región" como con el uso de un número "grande" de figuras elementales (rectángulos, trapecios). También se observa que algunos de estos estudiantes utilizan aproximaciones numéricas de las integrales y las áreas, tal vez por el énfasis puesto en el acercamiento al concepto de Integral Definida que se hace.

Los resultados obtenidos hasta este punto de la investigación, algunos de los cuales hemos reseñado en este trabajo, proporcionan elementos para continuar con el estudio en un ambiente que combine las clases habituales con las Prácticas de Laboratorio al objeto de, por una parte, responder a las preguntas abiertas que han ido surgiendo durante el análisis realizado y, por otra, determinar la vialidad de la implementación de nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

Referencias

BLISS, J., (1987), *Qualitative Data Analysis for Educational Research,* USA, Croom Helm.

CALVO, C., (1997), *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales*. Tesis de Maestría. UAB (sin publicar).

CAMACHO, M.; DEPOOL, R., (2000), Programa de Utilidades para la Enseñanza del Concepto de Integral Definida para futuros Ingenieros. Ejemplos de Aplicación. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 4 (16), 193-200.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R., (2003), Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE. Educación Matemática.* Pendiente de publicación.

DUVAL, R., (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives 5* (1993) 37-65.

DUVAL, R., (1995), *Sémiosis et pénsee humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel*, Peter Lang.

EDWARDS, C.; PENNEY, D., (1996): *Cálculo,* México, Prentice Hall.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. (1991), On the reluctance to visualize in Mathematics. En Zimmermann, W.; Cunnigham, S. (eds): *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 25-37. Washington, MAA.

MUNDY, J., (1984), Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En *Theory Research and Practice in Mathematics Education.* Bell, A.; Low, B.; Kilpatrick, J., (Eds.). *Proceedings,* ICME 5. Adelaide, Working group reports and collected papers, 170-172, Nottingham, Shell Center.

ORTON, A., (1983), Student's understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics,* 14 (1), 1-18.

RASSLAN, S.; TALL, D., (2002), Definitions and Images for the Definite Integral Concept. *Proceedings of the 26th PME,* 4, 89-96.

VINNER, S., (1991), The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.), *Advanced in Mathematical Thinking,* 65-80, Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.