



IDENTIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS DE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS*

Alicia Bruno Castañeda
Juan Antonio García Cruz

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta una investigación realizada con futuros profesores de Enseñanza Primaria y Secundaria en la que se analizan cómo estos clasifican problemas aditivos con números negativos según las estructuras de los enunciados. Se han utilizado en la investigación problemas con estructuras de *Combinación*, *Cambio*, *Comparación* y *Dos Cambios*. Los resultados muestran que los estudiantes buscan elementos clave al realizar las clasificaciones que en algunos casos son incompletos y provocan errores en la clasificación. También se ha observado cómo los aspectos contextuales y lingüísticos condicionan la clasificación.

Abstract

This paper reports a research on how prospective teachers classify additive problems on negative numbers. The different structures of problems correspond to those of *Change*, *Combination*, *Comparison* and *Two Changes*. The results show that most of prospective teachers look for key elements to help them in the classification. In some cases these key elements are not suitable at all, and therefore leads to errors in classification. We have also observed how contextual and linguistic features condition final classification.

* Trabajo financiado por el Proyecto de Investigación: PI2000/110: “La formación inicial del profesorado de matemáticas: diseño de un material docente universitario. Una propuesta de innovación en la resolución problemas aditivos con números negativos”, subvencionado por el Gobierno de Canarias. Dirección General de Universidades e Investigación.

Introducción

Se conoce muy poco de las concepciones que tienen los profesores en activo o los profesores en formación sobre los números negativos. Se pueden encontrar algunos resultados en el trabajo de González y otros (1990), en el que se analizan las respuestas de profesores de Primaria en formación y se muestra la ausencia de significados que otorgan estos al concepto, al orden y a las operaciones con números negativos. En Bruno y otros (1998) se realizó una investigación, también con profesores de Primaria en formación, sobre la resolución de problemas aditivos con números negativos. Se encontró que los futuros profesores de Primaria no resolvían estos problemas con números negativos y buscaban otras estrategias, como el uso de números positivos o las representaciones gráficas, las cuales variaron en su nivel de sofisticación y, en general, presentaban poco rigor matemático.

A continuación, presentamos la terminología sobre los problemas aditivos que usaremos en este trabajo, tomada de Bruno y Martínón (1997a) y que ha sido adaptada de Vergnaud (1982).

En primer lugar, diferenciamos entre *historias* (o *situaciones*) *aditivas simples* y *problemas aditivos simples*, como lo hacen Rudnitsky y otros (1995). Una *historia aditiva simple* es una situación numérica que se describe con una adición $a + b = c$. Por ejemplo, "La temperatura por la mañana en la ciudad era de 7 grados sobre cero y a lo largo del día bajó 10 grados. La temperatura por la noche era de 3 grados bajo cero". Claramente, cada historia aditiva cuyo esquema es $a + b = c$, da lugar a tres problemas aditivos simples, según cual de las tres cantidades anteriores se convierta en incógnita.

En segundo lugar, distinguimos entre diversos usos de los números: *estados* (e), que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud,

asociada a un sujeto en un instante (“debo 2”); *variaciones* (*v*), que expresan el Cambio de un estado con el paso del tiempo (“perdí 2”); y *comparaciones* (*c*), que expresan la diferencia entre dos estados (“tengo 2 más que tú”). La consideración de esos tres usos de los números da lugar a diferentes *estructuras* de historias y de problemas. En este trabajo analizamos las siguientes estructuras, que además son las más usuales:

- *Combinación*

(*Combinación de estados*: estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total)

“Pedro tiene 3\$ y debe 15\$. ¿Cuál es su situación económica global?”.

- *Cambio*

(*variación de un estado*: estado inicial + variación = estado final)

“Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?”.

- *Comparación*

(*Comparación de estados*: estado menor + Comparación = estado mayor)

“Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?”.

- *Dos Cambios*

(*Combinación de variaciones sucesivas*: variación 1ª + variación 2ª = variación total).

“La temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de la primera bajada?”.

Las principales investigaciones realizadas sobre la resolución de problemas aditivos con números negativos se han centrado en alumnos de Primaria y Secundaria y han servido para conocer las dificultades que tienen

en su resolución, los errores que cometen y algunas de las estrategias que utilizan (Vergnaud y Durand, 1976; Marthe, 1979; Vergnaud, 1982; Conne, 1985; Bell, 1986; Bruno y Martínón, 1997b).

La resolución de los problemas aditivos implica que los alumnos entiendan correctamente sus enunciados y se hagan una imagen correcta de la situación. Rudnitsky y otros (1995) realizaron una investigación para comprobar si el hecho de que los alumnos aprendan a diferenciar las *estructuras* de los problemas aditivos mejora la resolución de los mismos. Contrastaron varios métodos de enseñanza: (1) el método “redactar”, en el que los alumnos escribían los enunciados de los problemas y discutían las distintas estructuras; (2) el método “resolver”, que consistía en practicar la resolución de problemas de forma sistemática; y (3) el método “tradicional” en su país para la resolución de problemas aditivos. Se muestra que los alumnos que siguieron el método “redactar” obtuvieron mejores resultados en las pruebas realizadas al finalizar el proceso de aprendizaje que los que siguieron los otros métodos.

En una investigación previa nos planteamos la posible extensión de los resultados de Rudnitsky y otros a los problemas con números negativos (Bruno, 2000; Bruno y Espinel, 2003). Para ello se desarrolló una experiencia similar, pero con alumnos de Secundaria en la que se observó que los métodos “redactar” y “resolver” presentaban mejores resultados que el método “tradicional” en la resolución de problemas aditivos con números negativos. Además, el método “redactar” se reveló como un interesante instrumento de investigación, ya que el hecho de que los alumnos escribieran y discutieran sobre los enunciados de los problemas permitió averiguar algunas concepciones que tenían sobre los números negativos. Los problemas escritos por los estudiantes de Secundaria se han utilizado como material de investigación en el trabajo que presentamos aquí.

En este caso, estudiantes futuros profesores de Primaria y Secundaria siguieron de forma breve el método “redactar” y posteriormente se les pidió clasificar, según sus estructuras, historias y problemas redactados por los estudiantes de Secundaria de la investigación previa. El objetivo final de esta investigación es indagar las dificultades y los criterios que utilizan estos estudiantes en la clasificación de los problemas.

Objetivos y diseño de la investigación

Objetivos

Los objetivos de la investigación que se presenta en este trabajo son los siguientes:

- 1) Analizar la dificultad para clasificar problemas aditivos con números negativos por parte de profesores de Primaria y Secundaria en formación.
- 2) Analizar los criterios que utilizan futuros profesores de Primaria y Secundaria para justificar la clasificación de los problemas aditivos con números negativos.

Previamente los estudiantes recibieron formación sobre la clasificación de los problemas, siguiendo las ideas básicas del método “redactar”.

Diseño de la investigación

En la investigación participaron 30 estudiantes universitarios pertenecientes al Título de Maestro especialista en Educación Primaria y 7 estudiantes pertenecientes a la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, estos últimos podrían en un futuro dedicarse a la docencia en educación Secundaria. Por ello nos referiremos a ambos grupos

de estudiantes como “profesores en formación de Primaria y de Secundaria”, respectivamente (o también diremos “futuros profesores de Primaria y Secundaria”).

La investigación realizada tuvo dos partes bien diferenciadas, una primera fase de aprendizaje, por parte de los futuros profesores sobre la clasificación y resolución de los problemas y una segunda fase en la que se entrevistó a una muestra de ellos para conocer el conocimiento que habían construido sobre esta clasificación.

Fase 1. Aprendizaje de los futuros profesores sobre la clasificación de las estructuras de los problemas aditivos con números negativos

Para realizar esta fase de aprendizaje de la clasificación de los problemas, los estudiantes siguieron el método que denominamos “redactar” (Bruno, 2000; Bruno y Espinel, 2003), ya comentado anteriormente. En primer lugar, se les mostró cuatro historias correspondientes a cada una de las estructuras descritas anteriormente (*Combinación, Cambio, Dos Cambios y Comparación*), con el fin analizar las situaciones numéricas que las caracterizan (estados, variaciones y comparaciones), asimismo se analizó cómo a partir de una historia surgen tres problemas aditivos distintos y las operaciones que las resuelven. A continuación, fueron los estudiantes quienes escribieron historias y problemas con el fin de profundizar en las diferenciación de sus estructuras.

Esta instrucción se realizó en 5 sesiones de una hora. Una vez terminada la instrucción, los alumnos respondieron a una prueba escrita en la que tenían que clasificar y resolver 9 problemas aditivos con números negativos.

Fase 2. Entrevistas

Se seleccionó una muestra de los estudiantes que siguieron la instrucción a los que se entrevistó de manera individual.

Se seleccionaron siete estudiantes futuros profesores de Primaria, que denominaremos P1, P2,..., P7 y los siete estudiantes futuros profesores de Secundaria, que denominaremos S1, S2,..., S7. La selección de los estudiantes del primer grupo se hizo en función de los resultados obtenidos en la prueba escrita, tomando como criterio que hubiera estudiantes con diferentes niveles de éxito en la clasificación y que en la resolución de los problemas mostraran diferentes modos de resolución (números positivos, representación en la recta o ecuaciones, principalmente).

Las entrevistas fueron videograbadas y en ellas se pidió a los estudiantes que clasificaran historias o problemas según sus estructuras y, a continuación, que resolvieran los problemas.

Un aspecto importante fue que las historias y problemas utilizados para las entrevistas se tomaron de los redactados por estudiantes de Secundaria y que fueron recopilados en la investigación previa ya comentada (Bruno, 2000, Bruno y Espinel, 2003). Las historias y los problemas utilizados en las entrevistas tenían diferentes estructuras. Además no todas las historias y problemas respondían a las estructuras estudiadas. Es decir, se seleccionaron historias y problemas que tenían un enunciado *estándar* de redacción, mientras que otros presentaban variantes frente a la clasificación estudiada. Este hecho se les comentó a los estudiantes antes de iniciar la entrevista. De esta forma la clasificación resulta más compleja para los futuros profesores, porque previamente tienen que analizar si la redacción del problema era correcta y si respondía a alguna de las estructuras estudiadas. Sin embargo, nos permitió observar su seguridad en la clasificación.

En la tabla 1 se presenta la clasificación que se esperaba que hicieran los estudiantes de las historias y los problemas de las entrevistas y se indica si la redacción respondía, o no, a un enunciado estándar con respecto a las estudiadas en la fase de instrucción.

Tabla 1. Tipos de historias y problemas utilizados en las entrevistas

Historia 1	Comparación	No estándar
Historia 2	Cambio y Dos Cambios (Multitipo)	No estándar
Historia 3	Comparación	No estándar
Historia 4	Dos Cambios	Estándar
Historia 5	Cambio	Estándar
Problema 1	Dos Cambios	No estándar
Problema 2	Comparación	Estándar
Problema 3	Cambio	Estándar
Problema 4	Combinación	Estándar

El protocolo de las entrevistas fue el siguiente: se presentaba al estudiante la historia o el problema y se le pedía clasificarlo. En caso de que pensara que no respondía a un enunciado estándar, debía modificar la redacción para que respondiera a dicho enunciado estándar. Además, debían resolver los problemas, aunque este último aspecto no se analiza en este trabajo.

Resultados

Resultados globales

En las tabla 2 y 3 se resumen los resultados obtenidos en la clasificación de los problemas en los dos grupos de sujetos participantes en la investigación.

Tabla 2. Éxito en la clasificación según alumnos

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
4/9 44%	5/9 55%	3/9 33%	2/9 22%	4/9 44%	7/9 78%	4/9 44%	7/9 78%	8/9 89%	6/9 67%	7/9 78%	4/9 44%	3/9 33%	5/9 55%

Los porcentajes de éxito varían desde un 22% hasta un 89%. Es decir, que todos los alumnos tuvieron dificultad en alguno de los problemas. Aunque no es objeto de estudio, se observa una mayor facilidad para clasificar los problemas por parte de los futuros profesores de Secundaria con respecto a los de Primaria, lo cual requiere un nuevo estudio para su confirmación.

Los resultados de la tabla 3 muestran que los problemas con porcentajes de éxito del 100% son problemas de formato estándar, aunque no todas las historias o problemas de este formato resultan igual de exitosas. Lo que observamos a través de los enunciados de los problemas (ver siguiente apartado) es que cuando los problemas se asemejan a los tratados en la fase de aprendizaje, la clasificación resulta más eficaz por parte de los futuros profesores. En el otro extremo aparecen los problemas que difieren de los tratados en clase, en el sentido de que no pueden ser clasificados sin una previa modificación del enunciado. Dicha modificación no fue realizada por parte de los estudiantes futuros profesores, en la mayor parte de los casos. En el siguiente apartado se comentará cada uno de los problemas y las posibles explicaciones de los problemas que tuvieron un 0% de éxito.

Tabla 3. Porcentaje de respuestas correctas en la clasificación de los problemas

Tipo de estructura	Enunciado	Profesores de Primaria	Profesores de Secundaria
Historia 1 Comparación	No estándar	71%	86%
Historia 2 Cambio y Dos Cambios	No estándar	29%	43%
Historia 3 Comparación	No estándar	57%	43%
Historia 4 Dos Cambios	Estándar	0%	0%
Historia 5 Cambio	Estándar	29%	86%
Problema 1 Dos Cambios	No estándar	0%	43%
Problema 2 Comparación	Estándar	100%	100%
Problema 3 Cambio	Estándar	29%	86%
Problema 4 Combinación	Estándar	100%	100%

Criterios para clasificar

En este apartado se muestran los textos de las historias y problemas empleados en las entrevistas y la clasificación hecha por cada alumno. Asimismo se muestran los criterios y las justificaciones que emplearon para

la clasificación. Se mostrará un ejemplo, en cada caso, de las diferentes respuestas encontradas. En cada una de la tablas se señalarán con letra “negrita” los resultados de los alumnos que hayan dado la respuesta correcta.

Historia 1

La Historia 1 es de Comparación. Se eligió esta historia porque la Comparación se expresa mediante la palabra “diferencia”, mientras que en la instrucción se habían utilizado las expresiones “más que” y “menos que”. El objetivo era pues analizar si los futuros profesores aprecian este hecho.

Historia 1. Escrita por alumnos de Secundaria

En una ciudad había un conserje que cuidaba dos edificios. En uno hay un ascensor en la planta 5 y en el otro está en el sótano 1. El conserje de los edificios llegó a la conclusión de que tenían la diferencia de 6 plantas.

Tabla 4. Resultados de la clasificación de la Historia 1

Combinación	Cambio	Dos Cambios	Comparación	% correcto
P2	P4		P1, P3, P5, P6, P7	71%
S6			S1, S2, S3, S4, S5, S7	86%

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Comparación

S2. *De Comparación, porque está comparando la posición del ascensor en un edificio y en el otro. Tiene una primera situación en un edificio, la*

segunda en el otro y la diferencia entre los dos. Hay dos estados y la diferencia entre los dos. También puede ser más alto, más bajo....

- Para clasificarlo como de Combinación

S6. *De Combinación, porque al final llega a la conclusión de que la diferencia entre las plantas es de 6, es decir, que si una está en la 5 y el otro en la 1, en total son 6 plantas de diferencia. Si dijera que el ascensor del edificio uno está “plantas más abajo” o “más arriba” del edificio dos, entonces sería de comparar. Pero como lo que dice es que hay 6, pone los dos en un mismo conjunto y dice que hay 6 plantas de diferencia...*

- Para clasificarlo como de Cambio

P4. *Descartando las otras estructuras: De comparación no es, porque cuando es de comparar te habla de dos cosas que se están comparando y aquí hay un conserje que cuida dos edificios. Comparando no. No hay nada que comparar.*

El problema fue clasificado con éxito por 11 de los 14 alumnos, a pesar de que la Comparación no estaba expresada con el término “más arriba que”, para este contexto.

El criterio mayoritario para clasificarlo como Comparación fue nombrar los dos estados diferentes que se están comparando, sin citar de manera expresa la Comparación.

La confusión con los problemas de Combinación se debió al hecho de que para averiguar la diferencia, es necesario sumar $1 + 5$, es decir, interpretaron la diferencia como “averiguar el total”. Otro alumno ratificó la clasificación de Combinación aludiendo a que no hay ninguna variación en el enunciado.

El alumno P4 que clasifica el problema como de Cambio lo hace descartando que no puede ser de las otras estructuras.

Historia 2

La Historia 2 no corresponde a ninguna de las historias analizadas en la instrucción, debido a que se utilizan cuatro datos. La redacción de la historia por parte de los alumnos de Secundaria es correcta, pero tiene la estructura:

$$\text{estado inicial} + \text{variación 1} + \text{variación 2} = \text{estado final},$$

es decir, es una historia multitema, que se puede clasificar como de Cambio y Dos Cambios. Se ha considerado correcta la clasificación cuando el estudiante afirma que no puede clasificarla porque corresponde a una historia con cuatro datos o cuando percibe las dos estructuras, justificándolo adecuadamente.

Historia 2. Escrita por alumnos de Secundaria

En una presa tinerfeña que contenía 700.000 litros de agua, se sustrajo para regadío 300.000 litros de agua. En la siguiente noche a causa de la lluvia se rellenó con una cantidad de 200.000 litros. Después de estudiar la cantidad de agua que había era de 600.000 litros de agua.

Tabla 5. Resultados de la clasificación de la Historia 2

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	Cambio y Dos Cambios	% correcto
P3	P7	P1, P4, P5		P2, P6	29%
S3		S2, S5, S6, S7		S1, S4	43%

Justificaciones:

- Para clasificarlo como de Dos Cambios

P5. *De Dos Cambios, porque hay un estado y ese estado varía. Varía en que sustraemos algo y luego lo volvemos a rellenar.*

- Para clasificarlo como de Combinación

S3. *Yo lo pondría de Combinación por la conclusión final. Los de Combinación suman cosas que han sucedido para calcular la cantidad total. Me confunde un poco... (duda) podría ser de Dos Cambios. Aquí suceden dos cambios, se sustraen y se añaden 600000, pero al final, la última frase,... la forma en que está expresada me hace ver que es de Combinación.*

- Para clasificarlo como de Cambio

P7. *De Cambio, porque hay una situación y luego cambia.*

- Justificación correcta

S1. *De Dos Cambios y de Cambio, lo haría por partes. Hay dos variaciones, primero quita y después pone. Hay una cantidad inicial, hace dos variaciones y lo que te da es el estado final.*

Como puede observarse sólo 5 estudiantes dan una justificación correcta para esta historia. La mayoría de los alumnos la clasifica como de Dos Cambios. Es decir, que los elementos del enunciado que tienen mayor significación para ellos son las dos variaciones, e ignoran el que también se exprese el estado inicial o el estado final.

Por otra parte, encontramos de nuevo que las justificaciones para los problemas de Combinación se apoyan en que “se averigua el total”.

Historia 3

La Historia 3 es de Comparación no estándar debido a que la Comparación se expresa mediante una diferencia, “habían pasado 51 años

desde un nacimiento al otro”. La historia tiene un error en los años que habían pasado, ya que son 69 años y no 51 años, como expresan los estudiantes de Secundaria. Se valorará correcta la clasificación como problema de Comparación y se observará los comentarios sobre la forma en que se expresa la comparación.

Historia 3. Escrita por alumnos de Secundaria

Un antepasado de Juan nació en el año 9 a.C. y Juan nació en el año 60 d.C. Juan concluyó que habían pasado 51 años de un nacimiento a otro.

Tabla 6. Resultados de la clasificación de la Historia 3

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P2, P4	P3		P1, P5, P6, P7	57%
S5, S6	S1, S7		S2, S3, S4	43%

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Comparación

S2. *De Comparación, porque está comparando la edad de Juan con la de su antepasado. Es de Comparación porque son personas diferentes. Yo pondría 51 años después, para que fuera una Comparación clara. A lo mejor pondría nació 51 años después del antepasado o 51 años antes que Juan para que sea más clara la Comparación. Como está, parece una diferencia simplemente.*

- Para clasificarlo como de Combinación

P4. *De Combinación, porque al final te dice el tiempo que ha pasado de un nacimiento a otro. Lo veo dándolo todo junto.*

- Para clasificarlo como de Cambio

S1. *Aquí hay un estado inicial y un estado final, y lo que hace es ver la variación. Juan concluyó que habían pasado 69 años de un nacimiento al otro, entonces lo que hace es ver esa variación.*

A pesar de que la Comparación no se expresa de igual forma que en el proceso de instrucción, 6 alumnos clasificaron de forma correcta el enunciado, aunque no todos ellos destacaron el hecho de que se expresara como una diferencia y no como una Comparación.

El principal error fue clasificar la historia como de Combinación, indicando que en el problema se averigua el total, o bien que no hay ninguna variación en el enunciado.

Historia 4

La Historia 4 es de Dos Cambios y está expresada de forma estándar.

Historia 4. Escrita por alumnos de Secundaria

La heladería de Pepe vendió 52 helados el sábado y el domingo 58, en el fin de semana vendió 110.

Tabla 7. Resultados de la clasificación de la Historia 4

Combinación	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P1, P2, P3, P4,P5,P6, P7				0%
S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7				0%

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Combinación

P4. *De Combinación, porque está viendo cuántos helados hay en total y dice lo que vende en un día y lo que vende en el otro.*

S2. *De Combinación, porque un día vende 52 helados y otro día vende 58, en total vende 110. Combinación es cuando tenemos dos cosas y tenemos después un total. Como son días diferentes se consideran como cosas diferentes. Tenemos lo que pasó el sábado, lo que pasó el domingo y lo que pasó en total.*

Ningún estudiante entendió este problema como un problema de Dos Cambios en el que se da una variación (los helados que se vendieron el sábado), una segunda variación (los helados que se vendieron el domingo) y se averigua la variación total (los helados que se vendieron en todo el fin de semana). Las justificaciones que dan los estudiantes se refieren al hecho de que se averigua el total y no indican que se suman dos variaciones para encontrar la variación total. Pensamos que la incorrecta clasificación se debe, bien a que no se percibe el “vender” como una variación sino como un estado, o bien, porque la venta se produce en de dos días consecutivos en lugar de en un período más corto de tiempo.

Historia 5

La Historia 5 es de Cambio y enunciado estándar.

Historia 5. Escrita por alumnos de Secundaria

Un submarino cuando salió del puerto iba a una profundidad de 543 m bajo el nivel del mar. Tras ser detectados tuvo que bajar 323 m más, para escapar del radar de los otros submarinos. Y estaba al final a una profundidad de 866 m. bajo el nivel del mar.

Tabla 8. Resultados de la clasificación de la Historia 5

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P4, P5, P7	P2, P6	P1, P3		29%
	S1, S2, S3, S4, S6, S7	S5		86%

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Dos Cambios

S5. *De Dos Cambios, porque estaba en un estado, a 543 m debajo del mar y tuvo que bajar, modificó su situación y cambió su estado, hay una variación. Los Dos Cambios son los que cambian su nivel, su altitud, bajar de un sitio a otro, cambiar de situación.*

- Para clasificarlo como de Cambio

S1. *De Cambio, porque tiene una situación inicial, que es la profundidad a la que está al principio, y hay una variación, que son 323 metros más y al final da la situación final.*

- Para clasificarlo como de Combinación

P7. *Es Combinación porque está a un nivel, más otros tantos metros y al final sumas los metros, ¿en qué metros está?*

Obsérvese como el alumno S5 confunde en su justificación los problemas de Cambio con los de Dos Cambios. La historia fue clasificada de forma correcta por 8 estudiantes. Los errores de clasificación se debieron al hecho de entenderla como una historia de Combinación porque hay una suma o bien por que hay dos estados. Otros estudiantes la interpretaron como de Dos Cambios por entender que el estado inicial es una variación.

Problema 1

El Problema 1 no puede clasificarse atendiendo a las estructuras estudiadas por los estudiantes, ya que el problema indica que hay una posición de partida (no numérica), dos variaciones sucesivas y se pregunta por la posición final, es decir,

variación 1 + variación 2 = estado final

Si se supone que la posición inicial es 0, se admite una clasificación como: estado inicial + variación 1 + variación 2 = estado final

Se clasificarán como correctas las explicaciones como la anterior, las que indiquen que el problema no puede identificarse con ninguna estructura, o bien, las que modifiquen el enunciado, como por ejemplo, cambiar la pregunta del Problema 1.1 por una variación total.

Problema 1. Escrito por alumnos de Secundaria

Problema 1.1

Paula está en la puerta del instituto, camina hacia la derecha 10 m y después 13 m hacia la izquierda ¿en qué posición está?

Problema 1.2

Paula está en la puerta del instituto, camina 10 m hacia la derecha, luego camina algo hacia la izquierda y ahora está 3 m hacia la izquierda de la puerta del instituto ¿cuántos metros caminó?

Problema 1.3

Paula está en la puerta del instituto, camina 10 m hacia la derecha y luego camina 13 m hacia la izquierda y se encuentra 3 m hacia la izquierda de la puerta del instituto ¿cuántos metros camina hacia la derecha?

Tabla 9. Resultados de la clasificación del Problema 1

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
	P2, P4	P1, P3, P5, P6	P7	0%
S6	S3, S5	S1, S2, S4, S7		43%

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Combinación

S6. (No da ninguna justificación)

- Para clasificarlo como de Cambio

P2. *Aquí presentan un estado... 10 m. Luego resulta que cambia y va para allá (señala a la izquierda en la recta). Es un esquema de variación, por eso es de Cambio.*

- Para clasificarlo como de Dos Cambios (justificación correcta)

P3. *Hay una posición inicial, se cambió y luego se volvió a cambiar. Dos Cambios porque está en una posición y la cambia hacia una posición y luego la vuelve a cambiar a la izquierda, hay dos Cambios seguidos de su posición inicial.*

- Para clasificarlo como de Comparación

P7. *Es de comparación porque compara las dos posiciones.*

- Para clasificarlo como de Dos Cambios (justificación incorrecta)

S2. *De Dos Cambios, porque está en una posición, se mueve hacia un lado y después hace otro movimiento y se queda en -3. A lo mejor en lugar de preguntar ¿en qué posición está, pues preguntaría ¿cuánto caminó en realidad?, indicando el cambio final, que el cambio final fue que se movió 3 a la izquierda.*

Este problema resultó particularmente difícil de clasificar. De nuevo los alumnos centran su atención en las dos variaciones y olvidan la variación total. Algunos de los que lo clasifican como problema de Cambio transforman la primera variación en un estado y no manifiestan ser conscientes de ello.

Problema 2

El Problema 2 es de Comparación y está redactado de forma estándar en un contexto también usual para ellos.

Problema 2. Escrito por alumnos de Secundaria

Problema 2.1

Débora quiere ir a Londres para ver a su familia. Ella vive en Tenerife y la temperatura allí es de 20 grados sobre cero. Para ver si tiene que llevar su ropa de abrigo llama a su madre y ella como sabe que a Débora le cuesta un poco razonar problemas le dice que en Londres tuvieron 15 grados menos que en Tenerife ¿Qué temperatura hubo en Londres ese día?

Problema 2.2

Débora quiere ir a Londres para ver a sus padres. Ella vive en Tenerife y la temperatura allí fue de 20 grados sobre cero. Para ver si tiene que coger ropa de abrigo llama a su madre y ella le dice que ese día hubo en Londres 5 grados ¿Cuál ha sido la temperatura en Londres con respecto a Tenerife?

Tabla 10. Resultados de la clasificación del Problema 2

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
			P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7	100%
			S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7	100%

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Comparación

P1. *La temperatura de Londres y la de Tenerife. El dato que vas a sacar lo sacas de datos diferentes.*

S7. *De Comparación, porque te da el estado de una cosa y la diferencia con el estado de otra. El estado uno más la Comparación es igual al estado dos. Al final pregunta un estado.*

Todos los estudiantes clasificaron de forma correcta este problema. El hecho de que sea un problema en formato estándar favorece la respuesta correcta. Las justificaciones son de dos tipos, las que se conforman con buscar dos estados diferentes y las que además de ello, ponen el énfasis en que hay una Comparación, es decir, “15 grados menos”.

Problema 3

El Problema 3 es de Cambio y con enunciado estándar.

Problema 3. Escrito por alumnos de Secundaria

Historia

Pedro se prepara para saltar de una avioneta que vuela a 20 metros. Pedro ha saltado pero el paracaídas no se abre y cae al mar. De tanta altura Pedro se hunde 5 metros y flotando se da cuenta de que bajó 25 metros.

Problema 3.1

Pedro salta de una avioneta que vuela a 20 metros y cae 5 metros bajo el nivel del mar ¿Cuántos metros bajó?

Problema 3.2

Pedro salta de una avioneta que vuela a 20 metros, si baja 25 metros ¿A cuántos metros se encuentra?

Problema 3.3

Pedro salta de una avioneta y cae 5 metros bajo el nivel del mar. Si baja 25 metros ¿A cuántos metros volaba la avioneta?

Tabla 11. Resultados de la clasificación del Problema 3

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P1, P3, P4, P6, P7	P2, P5			29%

S6	S1, S2, S3, S4, S5, S7			86%
----	---------------------------	--	--	-----

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Cambio

P2. *Siempre me equivoco con Combinación y Cambio, porque no sé... todavía no diferencio bien entre lo que es el estado y la variación. Se supone que se presenta un estado que es que vuela a 20 metros y ha habido algo que ha variado ese estado. Yo pienso que es una variación, porque ha pasado algo, para mi es de Cambio.*

S4. *De Cambio, porque estás aquí (se refiere a la posición inicial), cambia, le pasa esto de 25, y acaba en 5. Hay una posición inicial y pasa algo y acaba aquí (se refiere a la posición final).*

- Para clasificarlo como de Combinación

P1. *Diría que es de Combinación por la operación que te queda en total. Sería sumar dos cosas.*

S6. *Es un Combinación porque dice que salta de la avioneta 20 metros y cae y se hunde 5 metros, luego baja 25 metros, los 20 más los 5, es una Combinación porque cuenta los metros totales.*

En este problema sorprende el hecho de que 6 estudiantes lo entiendan como un problema de Combinación. De nuevo la justificación es que se averigua el total o que hay una suma. No se observa ahora que algún alumno lo haya interpretado como un problema de Dos Cambios. En este caso hay grandes diferencias entre los profesores de Primaria en formación y los de Secundaria.

Problema 4

El Problema 4 es de Combinación y con enunciado estándar.

Problema 4. Escrito por alumnos de Secundaria

Historia

Zerac está pasando una mala racha porque le ha pedido dinero a Pedro y a Enrique. Al hacer las cuentas llegó a la conclusión de que debe 4.000.000 de pesetas, ya que a Pedro le debe 3.500.000 pesetas y a Enrique 500.000.

Problema 4.1

Zerac está pasando una mala racha porque le ha pedido dinero a Pedro y a Enrique. Al hacer las cuentas llegó a la conclusión de que debe 4.000.000 de pesetas, ya que a Pedro le debe 3.500.000 pesetas. ¿Cuánto le debe a Enrique?

Problema 4.1

Zerac está pasando una mala racha porque le ha pedido dinero a Pedro y a Enrique. Al hacer las cuentas llegó a la conclusión de que debe 4.000.000 de pesetas, ya que a Enrique le debe 500.000 ¿Cuánto le debe a Pedro?

Tabla 12. Resultados de la clasificación del Problema 4

Combina	Cambio	Dos Cambios	Compara	% correcto
P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7				100%
S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7				100%

Justificaciones

- Para clasificarlo como de Combinación

- P1.** *De Combinación, porque la cantidad inicial es el resultado de dos cantidades de partes diferentes. Se unen dos cantidades para dar una tercera. Pueden unirse sumando o restando, pero el resultado es de una cantidad de Enrique y una cantidad de Pedro.*
- S2.** *De Combinación, porque tenemos una situación, y es que debes a Pedro tanto dinero, y otra situación, que debes a Enrique tanto dinero y en total debes 4000000.*

Todos los alumnos clasifican de forma correcta el problema. Se trata de un problema de formato estándar que no contiene ningún elemento confuso para los estudiantes, quienes aluden en sus justificaciones a que hay dos estados y se averigua el estado total, o bien a que hay una suma.

Conclusiones

Como ya comentamos, al principio de la entrevista, se dijo a los estudiantes que algunas de las historias o problemas que iban a clasificar podían ser incorrectas con respecto a las estudiadas por ellos. Sin embargo, a lo largo de la entrevista parecían olvidar este hecho, y algunos de ellos asumieron que los textos estaban bien redactados y los clasificaron, a pesar de que en algunos casos no era posible hacerlo sin una previa modificación del enunciado.

Importancia del lenguaje en la clasificación de las historias

Los resultados confirman la importancia del lenguaje en la comprensión de los enunciados de los problemas. Así, encontramos que todos los alumnos clasifican el Problema 2, de Comparación de manera correcta. Sin embargo, hay algunos alumnos que tienen dificultades para clasificar las Historias 1 y 3, también de Comparación. La forma de expresar

las comparaciones en estos tres casos puede ser la causa, ya que aparece expresada con tres expresiones diferentes: “tenían la diferencia de 6 plantas” (historia 1), “habían pasado 51 años de un nacimiento a otro” (historia 3), y “15 grados menos que”. Es evidente que la última expresión facilita la clasificación. En estos tres casos, el que se trate de contextos distintos, como lo son el ascensor, las temperaturas y la cronología, influye en la facilidad para realizar la clasificación; el contexto cronología fue el que resultó más complejo.

La estructura de Comparación

Cuando el problema está redactado de forma estándar, es decir, que expresa la comparación con los términos *menos que*, los alumnos lo clasifican con un 100% de aciertos.

El criterio fundamental de los alumnos para clasificar los problemas de Comparación es identificar la existencia de “dos estados distintos que se comparan”. Los alumnos expresan que “hay dos cosas distintas” o “hay dos personas diferentes”... En menos ocasiones se busca o se nombran los términos “más que” o “menos que” como fundamento en su clasificación.

Los alumnos que clasificaron de forma incorrecta la estructura Comparación fue porque optaron por la estructura Combinación o Cambio. Nunca identificaron estos dos tipos de problemas con la estructura Dos Cambios

Los alumnos que confundieron estos problemas con uno de Combinación aludieron a que no aparecen los términos *más que* o *menos que*, y argumentaron que las dos cantidades se sumaban o que no había ninguna variación.

Las clasificaciones de estos problemas como de Cambio fueron casos especiales, por ejemplo, en la Historia 1, en el contexto ascensor, un alumno

indica que sólo hay una persona, y no dos como en los problemas de Comparación, sin fijarse en que lo que se está comparando es la posición de los dos ascensores y no la posición de las personas.

La estructura de Combinación

Las justificaciones para identificar un problema/historia como de Combinación son de dos tipos. Por un lado, buscar en el enunciado dos estados parciales o dos partes y el estado total. Por otra parte, apoyarse en la idea de que la historia implica sumar los dos números. Este criterio lleva a errores en algunos problemas que no tienen la estructura de Combinación, pero en la que hay una suma, como es el caso de la Historia 1 de Comparación.

Otro criterio que ha aparecido es la idea de que no hay Cambios o variaciones en la situación descrita en el enunciado, sino sólo estados.

Las palabras “juntar”, “unir” o “averiguar el total” predomina en las justificaciones. Estas palabras están tan fuertemente asociadas a la estructura Combinación que creemos que es la causa que lleva a clasificar la Historia 5 como de Combinación y no de Dos Cambios.

La estructura de Dos Cambios

Para clasificar un problema o historia como de Dos Cambios la clave fundamental para los estudiantes es encontrar las dos variaciones. Una vez que han identificado las variaciones son pocos los que buscan la variación total. Es por ello que se han cometido algunos errores de clasificación en problemas que no son de Dos Cambios de manera “pura”, como es el caso de la Historia 2.

Las historias y problemas de esta estructura se confundieron con los de Combinación porque se interpretaron las variaciones como estados. Los errores de clasificación de esta estructura son variados, lo que hace pensar

en la importancia del contexto, la manera de expresar el enunciado o la operación con la que se resuelve el problema.

La estructura de Cambio

El criterio predominante para clasificar los enunciados de Cambio es la identificación del estado inicial, la variación que se produce en ese estado y el estado final que resulta.

Los problemas o historias de Cambio nunca se clasifican como de Comparación. Los errores que hemos observado es el confundirlos con problemas de Combinación, al entender que el estado final es el resultado de sumar dos cantidades y averiguar el total.

En resumen, hemos situado a los futuros profesores de Enseñanza Primaria y Secundaria de Matemáticas ante la evaluación de problemas aditivos escritos por alumnos de Secundaria. La corrección y la clasificación de los problemas o historias por parte de estos alumnos universitarios ha presentado ciertas dificultades, lo cual indica la necesidad de un trabajo profundo en las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas para facilitar dicha comprensión.

Referencias bibliográficas

BELL, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

BRUNO, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *EMA, Investigación e innovación en educación matemática*, 5(3), 236-251.

BRUNO, A.; ESPINEL, C. (2003). Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio básico. *Educación Matemática* (aceptado para publicar).

BRUNO, A.; ESPINEL, C.; MARTINÓN, A. (1998). Prospective teachers solve additive problems with negative numbers. *Focus on learning problems in mathematics*, 19(4), 36.55.

BRUNO, A.; MARTINÓN, A. (1997a). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.

BRUNO, A.; MARTINÓN, A. (1997b). Procedimientos de resolución de problemas aditivos de números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (2), 249-258.

CONNÉ, F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5(3) 269-332.

GONZÁLEZ, J.L.; IRIARTE, M.D.; JIMENO, M.; ORTIZ, A.; ORTIZ, A.; SANZ, E.; VARGAS, I. (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

MARTHE, P. (1979). Additive problems and directed numbers. *Proceedings of the III PME*, 153-157. Warwick.

RUDNITSKY, A.; ETHEREDGE, S.; FREEMAN, J.M.; GILBERT, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5) 467-486.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, en Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (Eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. New Jersey: LEA..

VERGNAUD, G.; DURAND, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

