FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA III
ISSN: 1695-6613

CLASIFICACIÓN DE TAREAS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA CON MAGNITUDES DISCRETAS RELATIVAS CON ALUMNOS DE 7 Y 8 AÑOS

Susana Serrano Bernal
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo ponemos de manifiesto los distintos niveles de dificultad que presentan los problemas aritméticos elementales verbales de estructura aditiva con cantidades positivas y negativas en alumnos de 7 y 8 años. Se propone, además, una jerarquización en función de los niveles de competencia de estos problemas en relación con el esquema parte-parte-todo y la fenomenología de los mismos. El análisis de los problemas se realiza a partir del Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, desarrollado en Socas, Hernández y Noda (1998).

Abstract

In this work we show the different levels of difficulty that verbal elementary arithmetic problems of additive structure with positive and negative quantities in students of 7 and 8 years present. Also, a hierarchization in function of the levels of competition of these problems with relationship with the outline part-part-everything and the phenomenology of the same ones is proposed. The analysis of the problems is carried out starting from the Pattern of competitions for the conceptual preservative field of the discrete magnitudes, developed by Socas, Hernández and Noda (1998).

Marco conceptual

Introducción

El trabajo de investigación que presentamos sobre resolución de problemas de estructura aditiva se enmarca en el Modelo de Competencias para el Campo Conceptual Aditivo de las Magnitudes Discretas desarrollado en Socas, Hernández y Noda (1998).

Este modelo de competencias permite hacer una organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas desde el enfoque de la resolución de problemas. Se sitúa en el subperíodo piagetiano de las operaciones concretas, en el que intervienen los agrupamientos lógicos e infralógicos, el grupo aritmético **Z** y la medida. Los organizadores del modelo son elementos de naturaleza epistemológica, fenomenológica y cognitiva asociados al campo de las magnitudes discretas relativas. Muestra cómo el grupo aditivo y ordenado de los números enteros es un buen modelo para organizar los fenómenos que se dan en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas bajo el cual se pueden dar explicaciones homogéneas a las diferentes situaciones y problemas que se dan en el estudio, y cómo las categorías de cambio, combinación y comparación son pertinentes para la clasificación de problemas.

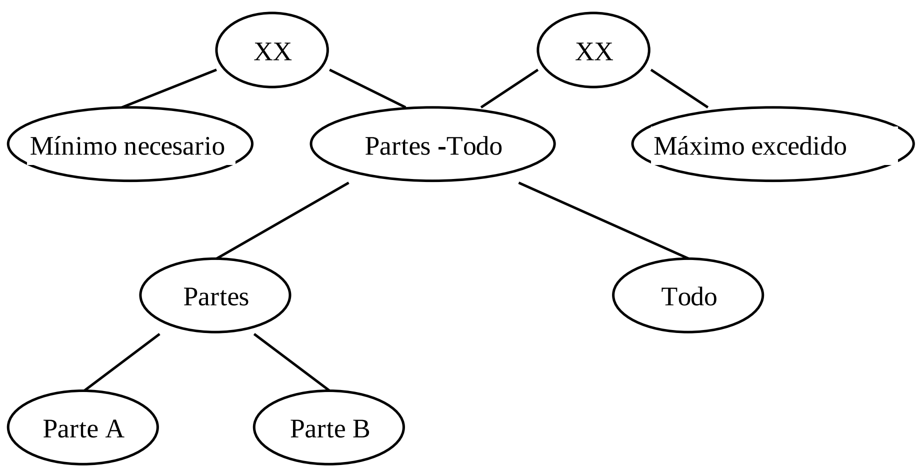
Esta propuesta de organización que integra los elementos y relaciones que se dan en el campo conceptual aditivo, permite una nueva clasificación de las diferentes situaciones y problemas del mismo, integra y explica resultados de otras investigaciones, en particular la clasificación hecha en el campo de los naturales por Carpenter y Moser (1983) y otros, y las Categorías de Vergnaud (1982), y facilita la relación con un posible modelo de ejecución.

Lo que pretendemos con este trabajo es realizar una clasificación de tareas de los problemas aditivos de manera que contenga todos los tipos (categorías) que se encuentran en la literatura, y además incluya aquellos problemas que causan dificultades, como sucede, por ejemplo, con la comparación entre variaciones, categoría semántica no contemplada en Carpenter y Moser, y con la relación entre transformaciones que no está en la propuesta de Vergnaud mientras que sí se encuentran en el modelo de competencias de Socas, Hernández y Noda (1998).

Analizamos a continuación de forma abreviada las tres componentes asociadas al modelo de competencia: cognitiva, epistemológica y fenomenológica.

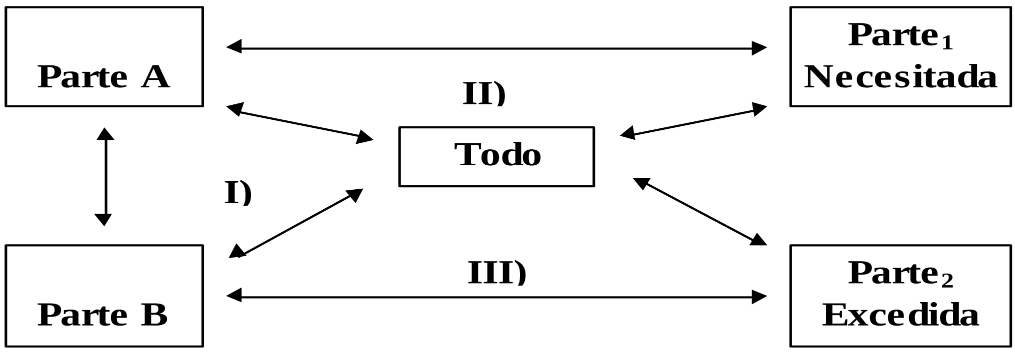
Componente cognitiva

La componente cognitiva está organizada bajo los esquemas partes-todo. Estos esquemas surgen de una adaptación del esquema partes-todo propuesto por Resnick (1983). En la siguiente figura recogemos el esquema partes-todo que ha sido utilizado en diferentes investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento del número natural y en la resolución de problemas aritméticos verbales.



Este esquema especifica que una cantidad (el todo) puede ser dividida (en partes), mientras que la combinación de partes, no excedan ni falten en el todo.

De forma gráfica representamos la propuesta que hacen los autores Socas, Hernández y Noda (1998) acerca de las relaciones entre las partes y el todo; que esquematizan en el diagrama siguiente:



Este diagrama unifica los dos tipos de esquemas: el esquema Parte-Todo, representado en (II) y (III), y el esquema Parte-Parte-Todo, representado en (I).

El esquema partes-todo proporciona una interpretación del número que es similar a la definición del concepto operacional del número dada por Piaget (1965), y proporciona una herramienta útil en la resolución de problemas verbales aritméticos elementales con números naturales.

Los diagramas aditivos de los esquemas partes-todo son una generalización del presentado por Resnick. En particular el esquema de Resnick se refiere al campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas naturales; sin embargo, nuestra idea es utilizarlo en problemas, tanto con cantidades orientadas presentes (números positivos), como con cantidades orientadas ausentes (números negativos) y que en la mayoría de los casos la diferencia entre negativo y positivo difiere respecto a las expectativas del sujeto: descubrimiento de una ausencia o una orientación en ese sentido en lugar de la presencia u orientación en el otro sentido.

Por estas razones, para posibilitar todos los casos posibles e integrar en un mismo modelo de competencias los aspectos cognitivos, epistemológicos y fenomenológicos, nos hemos inclinado por usar el modelo de competencias propuesto por los autores mencionados.

Se hace necesario dotar a los diagramas Partes-Todo de una interpretación explícita de todas las relaciones aditivas que se dan en el supuesto de que las partes y el todo puedan ser consideradas no sólo como cantidades orientadas presentes (positivas), sino también orientadas ausentes (negativas). Los autores recurren a una relación matemática, relación de Chasles (1793-1880), uno de los creadores de la geometría moderna, relación que concreta, en los esquemas partes-todo, todas las relaciones cognitivas posibles entre las partes y todo.

Pasamos a describir la Relación de Chasles y su uso como representación entre las partes y el todo con cantidades positivas y negativas.

La Relación de Chasles para tres puntos establece que:

Todo triplete de puntos A, B y C en una recta, cualquiera que sea su posición relativa, verifica la relación

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Es una relación entre las medida algebraicas de los bipuntos {AB}, {BC} y {AC}; por tanto, una propiedad de estos bipuntos, independientemente del origen elegido en la recta. En efecto, este origen no figura en la relación; se trata, pues, de una propiedad intrínseca de los puntos A, B y C. Esta relación se puede generalizar cuando se consideran n puntos.

Esto nos permite considerar las siguientes situaciones para el esquema Parte-Parte- Todo que es el que vamos a considerar aquí. Surgen de esta manera seis situaciones.

A B C (1)	A C B (2)
B A C (3)	B C A (4)
C A B (5)	C B A (6)

Estas seis situaciones desarrollan todas las posibles uniones entre las partes y la posible separación del todo, tanto si las cantidades están orientadas presentes (positivas) como orientadas ausentes (negativas).

Como hemos indicado, la Relación de Chasles nos ayuda a controlar la Componente Cognitiva de los problemas. Este modelo matemático nos permite considerar todas las relaciones aditivas distintas en el supuesto de que el esquema Parte-Parte-Todo sea considerado para cantidades tanto positivas como negativas.

$$AB + BC = AC$$

La relación existente entre la Relación de Chasles y el diagrama aditivo Parte-Parte-Todo, que dota a las partes y el todo de sentido tanto positivo como negativo, es la siguiente:

ABC →	AB→ Parte positiva BC→ Parte positiva AC→Todo positivo	BCA→	BA→Parte negativa BC→ Parte positiva CA→Todo negativo
ACB→	AB→ Parte positiva CB→Parte negativa AC→Todo positivo	CAB→	AB→ Parte positiva CB→Parte negativa CA→Todo negativo
BAC→	BA→Parte negativa BC→ Parte positiva AC→Todo positivo	CBA→	BA→Parte negativa CB→Parte negativa CA→Todo negativo

En consecuencia, los elementos cognitivos que vamos a considerar asociados al campo conceptual de los números naturales y enteros quedan caracterizados por:

- El esquema aditivo parte-parte-todo, tanto para las cantidades positivas como para las cantidades negativas, que está determinado por el diagrama aditivo y la relación de Chasles.

- Las categorías semánticas de cambio, combinación y comparación, añadidas por nosotros con posterioridad.

Componentes epistemológica y fenomenológica

Analizamos ahora las dos componentes: epistemológica y fenomenológica.

Las operaciones aditivas están representadas por el Grupo (I) del diagrama aditivo del esquema parte-parte-todo y tiene como elementos organizadores a la forma canónica de la operación aditiva a + b = c, que corresponden al aspecto epistemológico y a los significados de los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, que especificaremos a continuación y hace referencia a los aspectos fenomenológicos. En relación con la forma canónica a + b = c, esto nos va a originar siempre tres casos posibles, según sea la posición del dato desconocido.

En este trabajo sólo se van a considerar los problemas cuando el dato desconocido sea c.

En relación con los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, éstos serán expresados como número = magnitud. La expresión, número = magnitud, debe ser interpretada como número entero equivalente a magnitud discreta relativa, que contiene como casos particulares a los números naturales y a las magnitudes discretas. De esta manera, en lo que sigue nos referiremos tanto a cantidades como a medidas y, por tanto, a números. Es decir, estas cantidades pueden ser numéricas o de magnitud y son las que aparecen con un doble sentido o significado, como estado (tengo 6 boliches, debo 6 boliches,...), o como variación (gané 6 boliches, perdí 6 boliches,...).

De esta manera, si consideramos la expresión canónica de la estructura aditiva a + b = c y la representamos por:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_T$$

$$\text{Donde} \quad \Delta \begin{cases} \text{estado} & \square \\ \text{variación} & \bigcirc \end{cases}$$

obtenemos todas las relaciones aditivas posibles de los fenómenos o tipos asociados:

(1) $\square + \square = \square$ (2) $\square + \bigcirc = \square$

(3) $\bigcirc + \bigcirc = \bigcirc$ (4) $\square + \square = \bigcirc$

(5) $\square + \bigcirc = \bigcirc$ (6) $\bigcirc + \bigcirc = \square$

(7) $\bigcirc + \square = \bigcirc$ (8) $\bigcirc + \square = \square$

Es necesario observar que estas ocho relaciones aditivas se pueden reducir a seis en función de las equivalencias entre (2) y (8), y entre (5) y (7).

Si ahora hacemos intervenir la tercera componente del modelo, es decir, la componente cognitiva junto con los esquemas semánticos de cambio y combinación, obtenemos todas las operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas que son en total 144, y si aceptamos por razones de equivalencia la reducción de los casos posibles, como ya hemos indicado: (la de número = magnitud, a seis), nos quedan en total 108.

Forma canónica	Número = Magnitud	Rel. Partes-Todo	
a + b = c	Estado, Variación, Mixta	Rel. De Chasles	
3	8	6	144
3	6*	6	108

En nuestro estudio como sólo consideramos la posibilidad de que el dato desconocido sea "c", observamos que nos quedamos con 36 casos posibles, para el esquema parte-parte-todo, con las cantidades positivas y negativas, las estructuras semánticas de cambio y combinación y la fenomenología asociada.

Los tipos de problemas que nos quedan son los siguientes:

(1) □ + □ = □

A	B	C	1
A	C	B	2
B	A	C	3
B	C	A	4
C	A	B	5
C	B	A	6

(2) □ + ○ = □

A	B	C	7
A	C	B	8
B	A	C	9
B	C	A	10
C	A	B	11
C	B	A	12

(3) ○ + ○ = ○

A	B	C	13
A	C	B	14
B	A	C	15
B	C	A	16
C	A	B	17
C	B	A	18

(4) □ + □ = ○

A	B	C	19
A	C	B	20
B	A	C	21
B	C	A	22
C	A	B	23
C	B	A	24

(5) □ + ○ = ○

A	B	C	25
A	C	B	26
B	A	C	27
B	C	A	28
C	A	B	29
C	B	A	30

6) ○ + ○ = □

A	B	C	31
A	C	B	32
B	A	C	33
B	C	A	34
C	A	B	35
C	B	A	36

Cuestionario

A la hora de confeccionar un cuestionario de problemas nos guiamos por la forma canónica a + b = c (c desconocido), la fenomenología asociada, mediante los esquemas cambio y combinación y el esquema parte-parte-todo.

Además intentamos minimizar la posibilidad de que los alumnos cometieran errores.

En este sentido las acciones consideradas fueron:

- Contexto (conocido para los alumnos).
- Números (menores de 20)
- Tamaño del problema (frases cortas).
- Componente lingüística del problema (deben conocer el significado de todas las palabras)

Tipos de problemas

Problemas tipo 1: estado + estado = estado

$$\square + \square = \square$$

A B C (1) -- Juan tiene 3 cromos en el bolsillo del pantalón y 11 en el estuche de los lápices ¿Cuántos cromos tiene Juan en total?

A C B (2) --Antonio tiene 15 cromos en la mochila y le debe 7 cromos a Juan; si le paga a Juan ¿Cuántos cromos le quedan a Antonio?

B A C (3) -- Luis le debe 6 cromos a Carlos; en su casa Luis tiene 19 cromos; si le da a Carlos lo que le debe ¿Cuántos cromos le quedan a Luis?

B C A (4) -- Luis le debe 16 cromos a Carlos, en su casa Luis tiene 8 cromos, si le da todos a Carlos ¿Cuántos cromos le debe aún Luis a Carlos?

C A B (5) -- Juan tiene 4 cromos, le debe a su hermano 17 cromos; se le da todo lo que tiene ¿Cuántos cromos le deberá todavía Juan a su hermano?

C B A (6) -- Luis le debe 5 cromos a Juan y 8 a Carlos ¿Cuántos cromos debe Luis en total?

Problemas tipo 2: estado + variación = estado

□ + ○ = □

A B C (7) -- Carmen tiene 5 manzanas, va al super y compra 7 manzanas ¿Cuántas manzanas tiene ahora Carmen?

A C B (8) -- Ángel tiene 13 manzanas, se come 4 ¿Cuántas manzanas le quedan?

B A C (9) -- Mi madre necesita 4 manzanas para preparar una tarta. Si compra 10 manzanas en el super ¿Cuántas manzanas le sobran?

B C A (10) -- Mi tía necesita 12 manzanas para preparar el postre de la cena. Si va al super y compra 6 ¿Cuántas manzanas le faltarán todavía?

C A B (11) -- Lali tiene 7 manzanas en la cocina. Si van a cenar 15 personas y todos quieren 1 manzana ¿Cuántas manzanas le faltan?

C B A (12) -- En casa no hay manzanas, mamá le debe 3 a la vecina y nos quiere dar 8 para la excursión ¿Cuántas manzanas le hacen falta a mamá?

Problemas tipo 3: variación + variación = variación

○ + ○ = ○

A B C (13) -- Mi madre me ha dado 9 pesetas y mi tía 8 ¿Cuánto dinero me han dado en total?

A C B (14) -- Por mi cumpleaños me han regalado 19 pesetas y me he gastado 13 ¿Cuánto me queda para gastarme en caramelos?

B A C (15) -- Juan le quiere regalar a su hermana 12 pesetas, si por su cumpleaños le regalan 18 pesetas ¿Cuánto dinero se podrá gastar en chicles Juan después de hacerle el regalo a su hermana?

B C A (16) -- Juan quiere regalarle a su hermana 15 pesetas, si por su cumpleaños le regalan 7 pesetas ¿Cuánto dinero tendrá que conseguir Juan para poder regalarle a su hermana todo lo que él quiere?

C A B (17) -- Mi madre me ha dado 6 pesetas, me quiero comprar un paquete de papas que cuesta 15 pesetas ¿Cuánto más me tienen que dar para poderme comprar las papas?

C B A (18) -- Me he gastado 4 pesetas en caramelos y 9 en pipas ¿Cuánto me he gastado en total?

Problemas tipo 4: estado + estado = variación

$$\square + \square = \bigcirc$$

A B C (19) -- Tengo 6 globos amarillos y 8 globos rojos ¿Cuántos globos puedo regalar a mis compañeros?

A C B (20) -- Tengo 15 globos, si 7 están pinchados ¿Cuántos globos podré usar para la fiesta?

B C A (22) -- Le debo 16 globos a Juan, tengo 5 globos ¿Cuántos globos tengo que comprar para darle a Juan todo lo que le debo?

C A B (23) -- Tengo 15 globos, le debo 19 globos a Juan ¿Cuántos globos tengo que comprar para darle a Juan todo lo que le debo?

C B A (24) -- Le debo 6 globos a Carlos y 11 a mi hermano ¿Cuántos globos he de conseguir para pagar mi deuda?

Problemas tipo 5: estado + variación = variación

□ + ○ = ○

A B C (25) -- En una caja de bombones hay 15, si pongo 3 más ¿Cuántos bombones me puedo comer?

A C B (26) -- En una caja de bombones hay 17, si me como 6 ¿Cuántos bombones puedo repartir entre mis compañeros?

B A C (27) -- A la caja de bombones que me regalaron le faltan 7 bombones, si compro 12 bombones ¿Cuántos se quedan por fuera de la caja?

B C A (28) -- A la caja de bombones que me regalaron le faltan 15 bombones, si compro 6 y los meto dentro ¿Cuántos bombones más podré meter en la caja?

C A B (29) -- En mi caja de bombones hay 7; si quiero darle un bombón a cada uno de mis 12 amigos ¿Cuántos bombones tengo que comprar?

C B A (30) -- A mi caja de bombones le faltan 5, entre mis hermanos y yo nos hemos comido 6 ¿Cuántos bombones tengo que comprar para llenar la caja?

Problemas tipo 6: variación + variación= estado

○ + ○ = □

A B C (31) -- Mi madre me comprado 12 lápices y mi hermano me ha dado 6 ¿Cuántos lápices tengo ahora?

A C B (32) -- Me han regalado 15 lápices y he perdido 7 ¿Cuántos lápices me quedan?

B A C (33) -- He perdido 6 lápices de mi caja, si compro 16 lápices ¿Cuántos lápices se quedan fuera de la caja?

B C A (34) -- He perdido 10 lápices de la caja, si compro 5 y los meto en la caja ¿Cuántos lápices le faltan a la caja?

C A B (35) -- He comprado 6 lápices, tengo que llevar a clase 15 lápices ¿Cuántos lápices me faltan?

C B A (36) -- Tengo que llevar 7 lápices a clase de música y 6 a clase de dibujo ¿Cuántos lápices me hacen falta?

Diseño de la investigación: administración y resultados del cuestionario

Administración

Instrumentos: cuestionario

Los 36 tipos de problemas obtenidos se organizaron en hojas de 6 problemas, de forma que en cada hoja hubiera un problema de cada estructura cognitiva y cada problema tuviera una fenomenología distinta.

Administración

La administración del cuestionario a los alumnos se realizó de forma distinta a los alumnos de Segundo que a los de Tercero.

A los alumnos de Tercero se les pasaron directamente las hojas sin que la profesora las hubiera tenido antes. Cada alumno realizó 12 problemas, dos de cada estructura cognitiva, y dos de cada fenomenología consideradas. Los problemas se realizaron en dos días no consecutivos.

Con los alumnos de Segundo lo que se hizo fue entregar los problemas a la profesora para que ella los propusiera de la misma forma en que habitualmente los alumnos realizaban los problemas en clase. El resultado fue que la profesora propuso modificaciones no esperadas en un principio. Cada alumno realizó el mismo número de problemas (12) pero en este caso fueron realizados de 3 en 3, lo que supuso una mayor duración.

Aunque la administración del cuestionario debería ser la misma para los alumnos de Segundo y Tercero, la indicación de adaptarlos al modelo de clase supuso diferencias sustanciales a la hora de presentar los problemas. Al analizar la situación se tomó la decisión de considerar los dos cuestionarios y estudiar sus influencias en la resolución de problemas.

Dado que los cambios propuestos por la profesora de Segundo afectaron a la fenomenología y a la categoría de los problemas, decidimos realizar el estudio en dos partes. En este artículo nos vamos a centrar en los resultados de los alumnos de Tercero, y dejaremos para un trabajo posterior el estudio sobre los cambios realizados por la profesora de Segundo y su influencia en los resultados de los alumnos; para terminar comparando éstos últimos con los obtenidos por los alumnos de Tercero.

En definitiva, se trata en este trabajo la clasificación de tareas a partir de los resultados globales obtenidos con los alumnos de Tercero mediante las categorías que se desprenden del marco teórico.

Resultados globales obtenidos por los alumnos de Tercero

A partir del criterio según el cual un problema está bien resuelto cuando el alumno ha planteado de forma correcta la operación que resuelve el problema y la ha efectuado con exactitud, organizamos cuatro niveles de dificultad para los problemas: NIVEL I (de menor dificultad): Comprende aquellos problemas en los que el porcentaje de alumnos que los resuelven correctamente está comprendido entre un 76 y un 100%; NIVEL II: Comprende problemas en los que el porcentaje de alumnos resuelven correctamente está entre un 51 y un 75%; NIVEL III: Comprende problemas en los que el porcentaje de alumnos que resuelven correctamente está entre un 26 y un 50%; NIVEL IV (de máxima dificultad): Comprende aquellos problemas en los que el porcentaje de alumnos que resuelven correctamente está entre el 0 y un 25%.

De los resultados obtenidos por los alumnos de Tercero, los porcentajes de aciertos son los expresados en la Tabla 1, lo que nos permite una organización de los problemas propuestos según su nivel de dificultad para los alumnos de Tercero.

Tabla 1

NIVEL IV	**NIVEL III**	**NIVEL II**	**NIVEL I**
[0%-25%]	**[26%-50%]**	**[51%-75%]**	**[76%-100%]**
9	2	3	1
10	5	4	7
12	11	6	14
16	13	8	24
17	20	15	25
19	22	18	26
23	27	30	31
29	28	32	
34	36	33	
35			

Si observamos la Tabla 1 detectamos niveles de dificultades diferentes para la determinación del todo en función de la fenomenología y de las cantidades presentes y ausentes. Ello que indica que el trabajo está en buen camino, y que es necesaria una clasificación de tareas de los problemas aditivos, dado que presentan diferentes grados de dificultad a los alumnos.

Resultados relacionados con la fenomenología y la estructura cognitiva

Presentamos ahora, en la Tabla 2, los porcentajes de cada uno de los problemas organizados por su fenomenología, y dentro de cada fenomenología por la estructura cognitiva correspondiente[(1)].

Tabla 2

TIPO DE PROBLEMA	PORCENTAJE DE RESULTADOS POSITIVOS
(1) □ + □ = □	72.7%
A B C 1	100
A C B 2	40
B A C 3	60
B C A 4	57.15
C A B 5	50
C B A 6	66.7
(2) □ + ○ = □	41.59
A B C 7	100
A C B 8	66.7
B A C 9	20
B C A 10	20
C A B 11	42.86
C B A 12	0
(3) ○ + ○ = ○	49.525
A B C 13	50
A C B 14	83.3

[(1)] Estamos denominando estructura cognitiva correspondiente a la relación parte-parte-todo modelizada por la Relación de Chasles.

TIPO DE PROBLEMA	PORCENTAJE DE RESULTADOS POSITIVOS
B A C 15	66.7
B C A 16	20
C A B 17	20
C B A 18	57.15
(4) □ + □ = ○	32.93
A B C 19	14.29
A C B 20	50
Hubo que eliminarlo al tener errores el enunciado	
B C A 22	33.3
C A B 23	0
C B A 24	100
(5) □ + ○ = ○	57.62
A B C 25	100
A C B 26	85.71
B A C 27	50
B C A 28	33.3
C A B 29	16.7
C B A 30	60
(6) ○ + ○ = □	47.3
A B C 31	100
A C B 32	60
B A C 33	57.15
B C A 34	0
C A B 35	16.7
C B A 36	50

Si los resultados de la Tabla 2 los organizamos teniendo en cuenta sólo la fenomenología y los agrupamos en intervalos de dificultad, obtenemos la siguiente Tabla 3:

Tabla 3

Nivel IV	**Nivel III**	**Nivel II**	**Nivel I**
[0%-25%]	**[25%-50%]**	**[50%-75%]**	**[75%-100%]**
	○ + ○ = ○ □ + □ = ○ ○ + ○ = □ □ + ○ = □	□ + □ = □ □ + ○ = ○	

Si observamos esta última tabla nos damos cuenta de que no hay para los alumnos ninguna fenomenología que presente una dificultad extrema (ni máxima, ni mínima), siendo la estructura cognitiva correspondiente a cada problema el factor que transforma a éste en uno de nivel máximo o mínimo de dificultad. Como podemos observar en la siguiente Tabla 4:

Tabla 4

Nivel IV	**Nivel III**	**Nivel II**	**Nivel I**
[0%-25%]	**[25%-50%]**	**[50%-75%]**	**[75%-100%]**
C B A	B C A B A C	A C B C A B	A B C

De los resultados anteriores relacionados con la fenomenología observamos que: existen cuatro fenomenologías con un mismo nivel de dificultad (Nivel III). No obstante, precisando más, y para estos alumnos de Tercero de Primaria, los problemas cuya fenomenología asociada presenta una mayor dificultad son los del tipo:

□ + □ = ○ (estado + estado = variación), con un 32.93% de aciertos; seguidos de los problemas cuyas fenomenologías son :

○ + ○ = ○ (variación + variación = variación), 49.525%

○ + ○ = □ (variación + variación = estado), 47.3%

□ + ○ = □ (estado + variación = estado), 41.59%

cuyas dificultades resultan más o menos similares.

Por el contrario, en los problemas que tienen un Nivel II de dificultad, es la fenomenología

□ + ○ = ○ (estado + variación = variación), (57.62% de aciertos) la que presenta una mayor dificultad.

Por último la fenomenología:

□ + □ = □ (estado + estado = estado) (72.7%), se muestra como la fenomenología menos complicada, tal y como podemos observar en la Tabla 2.

Si profundizamos en el análisis dentro de cada fenomenología observamos que hay problemas con distintos grados de dificultad. Esto es lo que nos proponemos ahora, para lo que haremos intervenir en cada fenomenología la estructura cognitiva asociada.

Analizamos el estudio de cada fenomenología de mayor a menor dificultad.

Así pues en la fenomenología (4) □ + □ = ○ (estado + estado = variación), observamos que los problemas de las estructuras cognitivas ABC y CAB resultan más complicados. Mientras que el de la estructura cognitiva CBA apenas presenta dificultad. Hemos de señalar como hecho sorprendente que si bien esta fenomenología es la que presenta en conjunto un mayor nivel de dificultad, en ella se da la estructura cognitiva CBA, que junto con la ABC, de las fenomenologías 1,2,5 y 6, presenta un menor nivel de dificultad, como se puede observar en la Tabla 2.

Problemas pertenecientes a esta fenomenología (4) como:

A B C -> Tengo 6 globos amarillos y 8 globos rojos ¿Cuántos globos puedo regalar a mis compañeros? (33.3% de aciertos)

C A B -> Tengo 15 globos, le debo 19 globos a Juan ¿Cuántos globos tengo que comprar para darle a Juan todo lo que le debo? (0% de aciertos)

resultan más complicados para estos alumnos que problemas de la misma fenomenología tales como:

C B A -> Le debo 6 globos a Carlos y 11 a mi hermano ¿Cuántos globos he de conseguir para pagar mi deuda? (100% de aciertos)

que parece no presentar dificultad para los alumnos.

¿Por qué ABC es más complicado que CBA?

Un estudio más profundo, mediante entrevistas vídeograbadas, de los procesos de pensamiento implicados requiere esta cuestión.

No obstante apuntaremos algunas conjeturas:

- Observamos que los alumnos restan en lugar de sumar, incluso algunos lo hacen en el orden de aparición de los números.

- Los alumnos parecen tener conocimientos matemáticos adecuados, pues resuelven correctamente otros problemas.

Nos preguntamos: ¿Cambiarán las cosas si en ABC todos los globos fueran del mismo color? De ser afirmativa la respuesta, será el contexto el que nos ha creado la dificultad.

Analizamos ahora, los problemas de la fenomenología (2):

□ + ○ = □ (estado + variación = estado), problemas cuya fenomenología sigue en dificultad a la anterior.

En los problemas de esta fenomenología hemos de destacar los problemas de la estructura cognitiva ABC:

ABC -> Carmen tiene 5 manzanas, va al súper y compra 7 manzanas ¿Cuántas manzanas tiene ahora Carmen? (100% de aciertos).

Éste es el más sencillo de esta fenomenología y parece no presentar ningún tipo de dificultad para el alumnado de este nivel.

Por el contrario, los pertenecientes a las estructuras cognitivas BAC, BCA y sobre todo CBA, presentan una gran dificultad.

BAC-> Mi madre necesita 4 manzanas para preparar una tarta. Si compra 10 manzanas en el súper ¿Cuántas manzanas le sobran? (20% de aciertos).

BCA-> Mi tía necesita 12 manzanas para preparar el postre de la cena. Si va al súper y compra 6 ¿Cuántas manzanas le faltarán todavía? (20% de aciertos).

CBA-> En casa no hay manzanas, mamá le debe 3 a la vecina y nos quiere dar 8 para la excursión ¿Cuántas manzanas la hacen falta a mamá? (0% de aciertos).

Pasamos ahora a considerar el estudio de los problemas de la fenomenología (6): ○ + ○ = □ (variación + variación = estado). Hemos de señalar que la estructura cognitiva que presenta una menor dificultad para al alumnado es la ABC, siendo las estructuras BCA y CAB las que les resultan más complicadas.

ABC-> Mi madre me ha comprado 12 lápices y mi hermano me ha dado 6 ¿Cuántos lápices tengo ahora? (100% de aciertos).

BCA-> He perdido 6 lápices de mi caja, si compro 16 lápices ¿Cuántos lápices se quedan fuera de la caja? (0% de aciertos).

CAB-> He comprado 6 lápices, tengo que llevar a clase 15 lápices ¿Cuántos lápices me faltan? (16.7% de aciertos).

En el análisis de los problemas de la fenomenología (3):

○ + ○ = ○ (variación + variación = variación), observamos que esta presenta menos diferencias entre los resultados de los problemas.

En esta fenomenología, el problema que presenta la estructura cognitiva ACB, es el menos complicado con diferencia; siendo los más complicados los que presentan las estructuras BCA y CAB.

ACB-> Por mi cumpleaños me han regalado 19 pesetas y me he gastado 13 ¿Cuánto me queda para gastarme en caramelos? (83.3% de aciertos).

BCA-> Juan quiere regalarle a su hermana 15 pesetas; si por su cumpleaños le regalan 7 pesetas ¿Cuánto dinero tendrá que conseguir Juan para poder regalarle a su hermana todo lo que él quiere? (20% de aciertos).

CAB-> Mi madre me ha dado 6 pesetas; me quiero comprar un paquete de papas que cuesta 15 pesetas. ¿Cuánto me tienen que dar para poderme comprar las papas? (20% de aciertos).

Los problemas que presentan una menor dificultad son los pertenecientes a la fenomenología (5):

☐ + ○ = ○ (estado + variación = variación)

y a la fenomenología (1):

☐ + ☐ = ☐ (estado + estado = estado); siendo esta última la que resulta menos complicada a estos alumnos.

Dentro de los problemas pertenecientes a la fenomenología (5) ☐ + ○ = ○ (estado + variación =variación) los problemas que parecen más sencillos para los alumnos son los pertenecientes a las estructuras cognitivas ABC y ACB.

ABC-> En una caja de bombones hay 15; si pongo 3 más ¿Cuántos bombones me puedo comer? (100% de aciertos).

ACB-> En una caja de bombones hay 17; si me como 6 ¿Cuántos bombones puedo repartir entre mis compañeros? (85.71% de aciertos).

Los más complicados para los alumnos son los pertenecientes a las estructuras cognitivas BCA y CAB.

BCA-> A la caja de bombones que me regalaron le faltan 15 bombones; si compro 6 y los meto dentro ¿Cuántos bombones más podré meter en la caja? (33% de aciertos).

CAB -> En mi caja de bombones hay 7; si quiero darle un bombón a cada uno de mis 12 amigos ¿Cuántos bombones tengo que comprar? (16.7% de aciertos).

Finamente, son los problemas de la fenomenología (1):

☐ + ☐ = ☐ (estado + estado = estado) los que presentan una menor dificultad para los alumnos de Tecero.

Hay que destacar que los problemas que tienen por estructura cognitiva ABC, tal como se esperaba, parecen ser los más sencillos de este tipo:

ABC-> Juan tiene 3 cromos en el bolsillo del pantalón y 11 en el estuche de los lápices ¿Cuántos cromos tiene Juan en total? (100% de aciertos).

Y los problemas que con diferencia parecen ser los más complicados son los pertenecientes a la estructura cognitiva ACB.

ACB-> Antonio tiene 15 cromos en la mochila y le debe 7 cromos a Juan; si le paga a Juan ¿Cuántos cromos le quedan a Antonio? (40% de aciertos).

A modo de conclusión:

Si organizamos los resultados de los problemas comentados anteriormente en intervalos de dificultad, teniendo en cuenta la fenomenología y la estructura cognitiva obtenemos la siguiente tabla:

Tabla 5

Nivel IV	**Nivel III**	**Nivel II**	**Nivel I**
[0%-25%]	**[26%-50%]**	**[51%-75%]**	**[76%-100%]**
	2 □ + □ = □ ACB 5 □ + □ = □ CAB	3 □ + □ = □ BAC 4 □ + □ = □ BCA 6 □ + □ = □ CBA	1 □ + □ = □ ABC
9 □ + ○ = □ BAC	11 □ + ○ = □ CAB	8 □ + ○ = □ ACB	7 □ + ○ = □ ABC
10 □ + ○ = □ BCA			
12 □ + ○ = □ CBA 16 ○ + ○ = ○ BCA	13 ○ + ○ = ○ ABC	15 ○ + ○ = ○ BAC 18 ○ + ○ = ○ CBA	14 ○ + ○ = ○ ACB
17 ○ + ○ = ○ CAB	20 □ + □ = ○ ACB		24 □ + □ = ○ CBA
19 □ + □ = ○ ABC	22 □ + □ = ○ BCA		
23 □ + □ = ○ CAB	27 □ + ○ = ○ BAC	30 □ + ○ = ○ CBA	25 □ + ○ = ○ ABC

Nivel IV	**Nivel III**	**Nivel II**	**Nivel I**
[0%-25%]	**[26%-50%]**	**[51%-75%]**	**[76%-100%]**
29 □ + ○ = ○ CAB 34 ○ + ○ = □ BCA 35 ○ + ○ = □ CAB	28 □ + ○ = ○ BCA 36 ○ + ○ = □ CBA	32 ○ + ○ = □ ACB 33 ○ + ○ = □ CAB	26 □ + ○ = ○ ACB 31 ○ + ○ = □ ABC

De ella podemos extraer las siguientes consecuencias:

En los problemas que presentan mayor grado de dificultad para los alumnos, los del Nivel IV: [0%-25%], observamos que no aparece la fenomenología: □ + □ = □, como era de esperar, al tratarse de la fenomenología menos complicada; sin embargo sí aparece en este Nivel IV, un problema de la estructura cognitiva ABC, en teoría la menos complicada, si bien este problema corresponde a la fenomenología más complicada □ + □ = ○ (que habitualmente no aparece en los libros de texto).

Hemos de destacar que la fenomenología: □ + ○ = □, se esperaba a priori como muy sencilla, dada su aparición en los libros de texto; pero no es así, pues encontramos la mitad de sus estructuras cognitivas dentro de este grupo, de mayor dificultad, especialmente cuando se pone en relación cantidades ausentes (negativas).

En general, la estructura cognitiva que nos encontramos con una mayor frecuencia dentro del nivel IV que presenta una mayor dificultad es CAB, seguida de BCA.

En el nivel III, de dificultad [26%-50%], observamos que aparecen todas las fenomenologías y todas las estructuras cognitivas.

En el nivel II: [51%-75%], aparecen también todas las fenomenologías; □ + □ = □, aparece tres veces. En relación con las estructuras cognitivas, la que más aparece es CBA, que relaciona nuevamente las tres cantidades ausentes (negativas).

Es el nivel I, el que presenta una menor dificultad en su resolución para los alumnos. En él aparecen todas las fenomenologías, y observamos la presencia de la estructura cognitiva ABC como la más frecuente (4 ocasiones), que relaciona tres cantidades presentes (positivas).

Debemos comentar, finalmente, el problema 24 que pertenece a la fenomenología: □ + □ = ○, la de mayor dificultad, y a la estructura cognitiva: CBA (tres cantidades ausentes) y, por tanto, también de mayor dificultad; sin embargo, es resuelto por la totalidad de los alumnos. Ello nos conduce a la necesidad de seguir profundizando en el papel que juegan no sólo los aspectos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos, sino también los contextos en la resolución de problemas aditivos, que aventuramos como explicación de este hecho a falta de otros argumentos.

No obstante, podemos señalar, que los tres aspectos anteriores: epistemológico, fenomenológico y cognitivo, junto con el aspecto contextual se muestran como argumentos determinantes para clasificar las tareas en resolución de problemas de estructura aditiva con magnitudes discretas relativas.

Referencias bibliográficas

CARPENTER, T.P. Y MOSER, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R.Lesh y M. Landdau (Eds.): *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

FUSON, K. C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D.A. Grouws: *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 243-275. New York: MacMillan Publishing Company.

PIAGET, J (1965). *The child's conception of number.* New York: Norton.

RESNICK, L.B., (1983). A developmental theory of number understanding. En H.P. Ginsburg (Ed) *The development of mathematical thinking*. Academic Press. New York

SOCAS, M.M.; HERNÁNDEZ, J. Y NODA, A. (1998). Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas. *Enseñanza de las Ciencias.* 16(2), pp.261-269.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg (Eds): *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale: N.J. Lawrence Erlbaum.