FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA III
ISSN: 1695-6613

RAZONAMIENTOS COMBINATORIOS

Víctor Manuel Hernández Suárez
María Celia Ríos Villar
Francisco Simeón Cabrera Suárez

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este trabajo se incide en las representaciones gráficas y en los recursos informáticos como estrategias fundamentales para la resolución de una clase de problemas de Combinatoria.

Los esquemas cognitivos combinatorios son considerados por Piaget como un componente esencial del pensamiento formal. Es necesario estimular el desarrollo psicoevolutivo del razonamiento combinatorio mediante una adecuada instrucción. En estas actividades se resaltan algunos razonamientos combinatorios propuestos por Georges Papy.

Abstract

In this work, we analyze some graphic representations and informatic resources as fundamental strategies for the resolution of a class of problems of Combinatory.

The combinatory cognition outlines are considered by Piaget like an essential component of the formal thought. It is necessary to stimulate the psychoevolutive development of the combinatory reasoning by means of an appropriate instruction. In these activities some combinatory reasonings proposed by Georges Papy are emphasized.

Introducción

Una descripción magistral de las características e importancia de la Combinatoria es la proporcionada por James Bernouilli, en su *Ars Conjectandi*: "Es fácil darse cuenta de que la prodigiosa variedad que se presenta, tanto en las obras de la Naturaleza como en las acciones humanas, y que constituye la mayor parte de la belleza del Universo, es debida a la multitud de modos diferentes en los cuales sus diversas partes pueden mezclarse o yuxtaponerse. Pero, debido a que el número de causas que concurren en la producción de un acontecimiento dado o efecto es muy a menudo tan enormemente grande y las causas mismas son tan diferentes entre sí, es extremadamente difícil enumerar todos los modos diferentes en los cuales pueden ordenarse o combinarse, y a menudo ocurre que los hombres, aún de la mayor capacidad y de la más grande circunspección caen en la falta de razonamiento que los autores de libros de Lógica llaman *enumeración insuficiente o imperfecta de partes o casos*. Y esto sucede en tal medida, que me atrevo a afirmar que ésta es la principal, casi diría la única fuente del enorme número de opiniones erróneas en asuntos, muy frecuentemente, de gran importancia. Debe reconocerse, por lo tanto, que el arte que procura eliminar esta debilidad y nos enseña a enumerar todos los modos posibles en que un número dado de objetos puede mezclarse y combinarse de manera que estemos seguros de que no hemos omitido ninguno de los posibles debe considerarse de una enorme utilidad y merece nuestra más alta estima y profunda atención. Este es el objeto de la Combinatoria que no debe ser considerada sólo como una rama de las ciencias matemáticas, pues está relacionada con casi todas las formas de conocimientos útiles en las cuales la mente humana puede emplearse" [1].

Las representaciones gráficas y los recursos informáticos constituyen estrategias fundamentales para la resolución de determinados tipos de problemas de Combinatoria.*"Los esquemas cognitivos combinatorios son considerados por Piaget como un componente esencial del pensamiento formal. Es necesario estimular el desarrollo psicoevolutivo del razonamiento combinatorio mediante una adecuada instrucción , ya que no siempre se alcanza espontáneamente al llegar a la edad adulta, como lo prueba las investigaciones de Fischbein. Por lo tanto, compartimos el criterio de Gardiner [6] para quien el "arte de contar" debería formar un hilo continuo a lo largo de la educación de cada niño, esto es, desde Primaria a Bachillerato", Batanero y otros [1].*

En estas actividades seguiremos los esquemas propuestos por Georges Papy en [9].

Los Esquemas didácticos de Papy

Los esquemas binarios de Papy son fundamentales para resolver algunos tipos de problemas de Combinatoria. A continuación se realizarán algunas actividades relacionadas con dichos esquemas.

Actividad 1

Si se dispone de 9 monedas y 5 alcancías vacías. ¿De cuántas maneras podríamos distribuir las monedas en las alcancías, si algunas de ellas pueden quedar vacías?

O, O, O, O, O, O, O, O, O

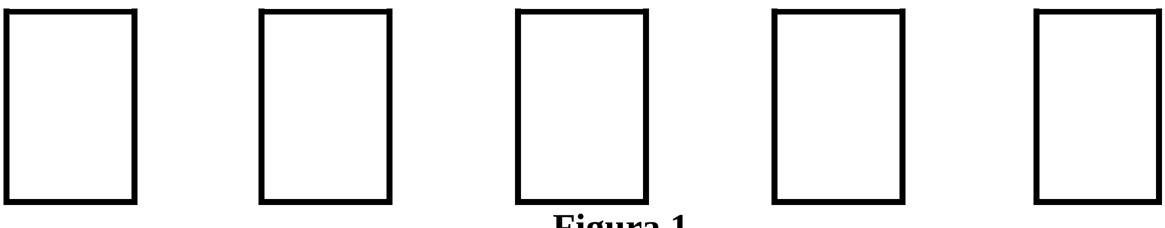


Figura 1

En esta actividad no nos interesa saber cuáles son las monedas colocadas en cada alcancía. Basta conocer el número de monedas que se han colocado en cada una.

Solución:

Una manera de colocar las monedas en las alcancías sería:

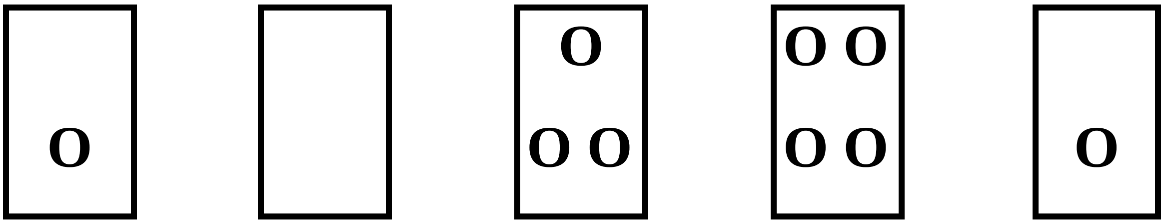


Figura 2

Consideremos que las alcancías han sido dispuestas de manera fija, como en la figura anterior. Esta situación puede describirse perfectamente mediante el esquema:

o||ooo|oooo|o

Figura 3

o también mediante la **"palabra binaria"**,

O| |OOO|OOO|O

Figura 4

Se trata de una "palabra binaria" de 13 cifras que comprende 9 cifras O (correspondientes a las 9 monedas) y 4 cifras **|** (por lo tanto hay una cifra **|** menos que la cantidad de alcancías). Así, la "palabra binaria" definida por la siguiente situación:

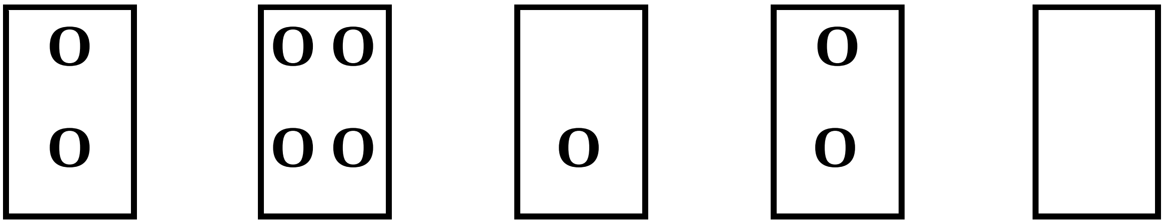


Figura 5

vendría descrita por el esquema binario:

OO|OOOO|O|OO|

Actividad 2

Representar las situaciones traducidas mediante:

OOO | OOO | | O | OO

OOOOOOOOO | | | |

| | | | OOOOOOOOO

O | O | O | O | OOOOO

Figura 6

Solución:

La primera situación vendría dada por:

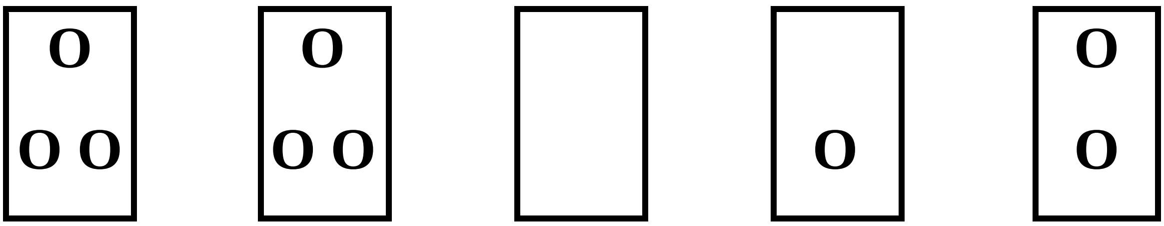
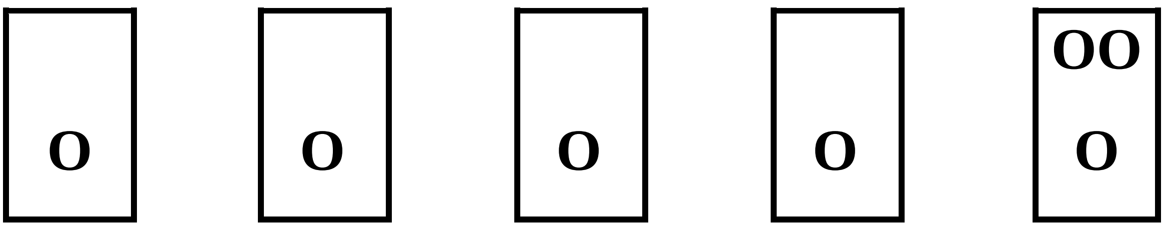


Figura 7

y la última estaría reflejada en la figura siguiente:



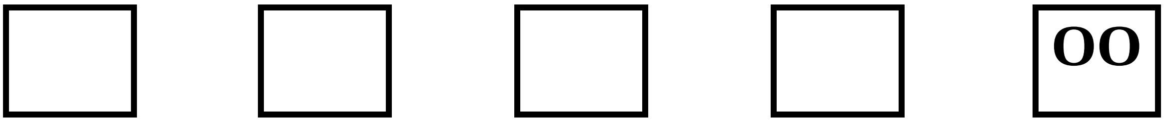


Figura 8

Actividad 3

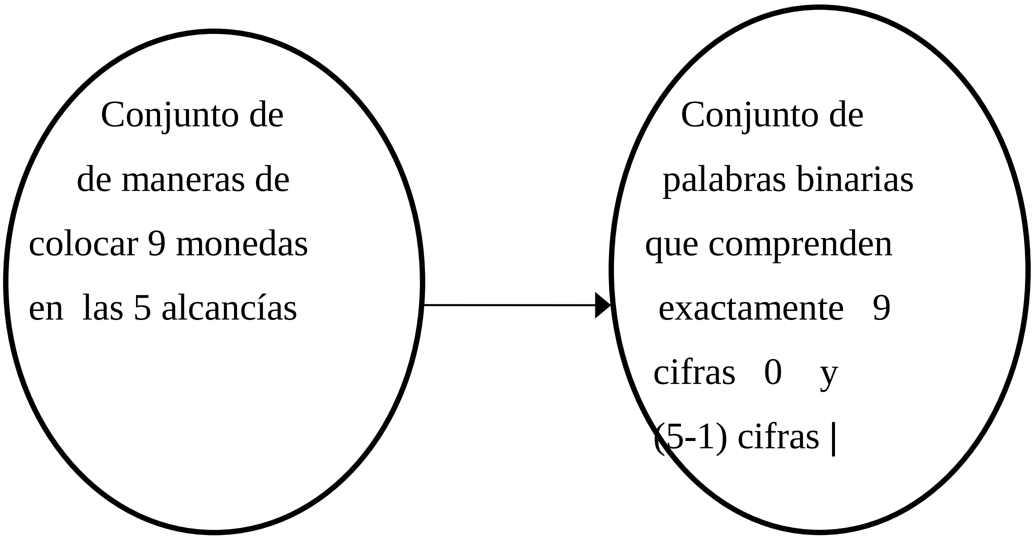
¿Mediante qué “palabra binaria” traduces la situación que consiste en poner todas las monedas en la alcancía central?

Solución:

| | OOOOOOOOO | |

Figura 9

Del análisis de los esquemas binarios de Papy, se deduce que podemos establecer la siguiente biyección:



En el problema que nos ocupa, todas las palabras binarias comprenden 13 signos. Cada una de esas palabras queda determinada por el lugar que en ella ocupan los **O**.

OO|O|OOOO||OO ➔{1,2,4,6,7,8,9,12,13}

OOOOOOOOO|||| ➔{1,2,3,4,5,6,7,8,9}

||||OOOOOOOOO ➔{5,6,7,8,9,10,11,12,13}

O|O|O|O|OOOOO ➔{1,3,5,7,9,10,11,12,13}

||OOOOOOOO|O| ➔{3,4,5,6,7,8,9,10,12}

Figura 10

Actividad 4

¿Cuál es la palabra binaria aplicada sobre {1,2,4,6,8,10,11,12,13}?

¿Cuál es la manera de colocar las monedas en las alcancías definida por {2,3,4,6,8,9,10,12,13}?

Solución:

OO|O|O|O|OOOO

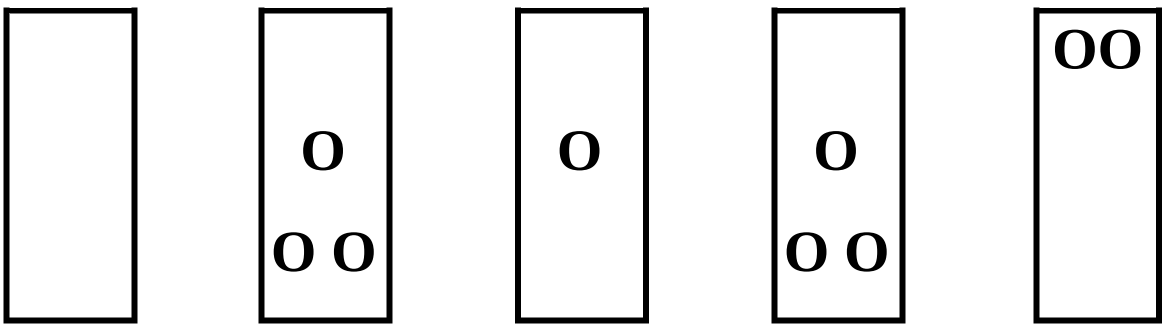
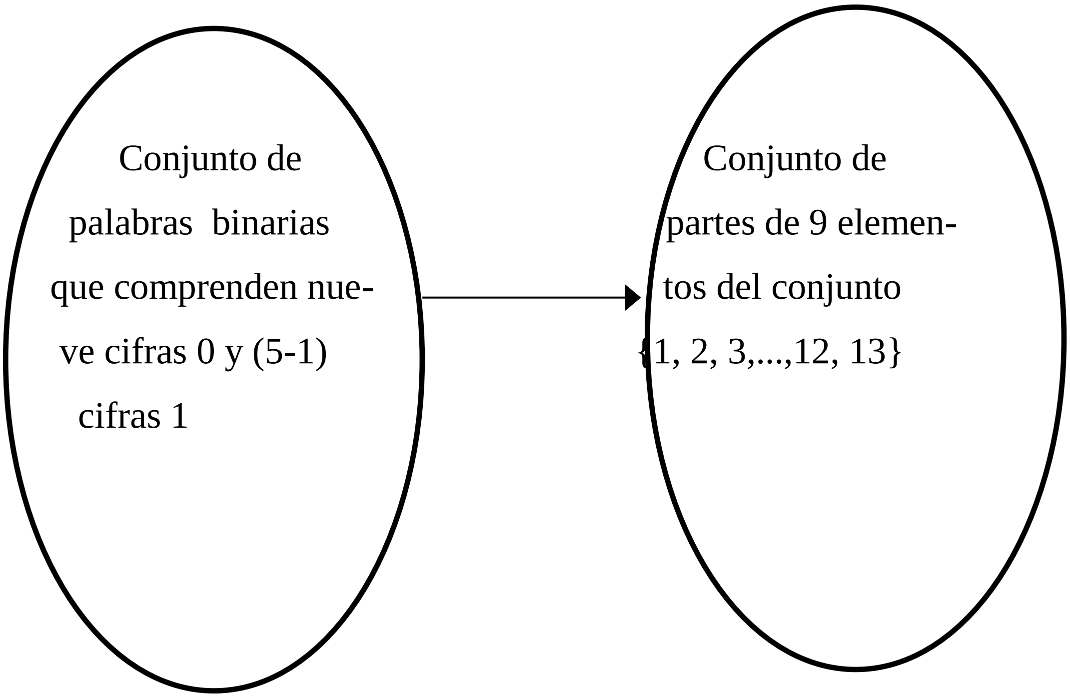
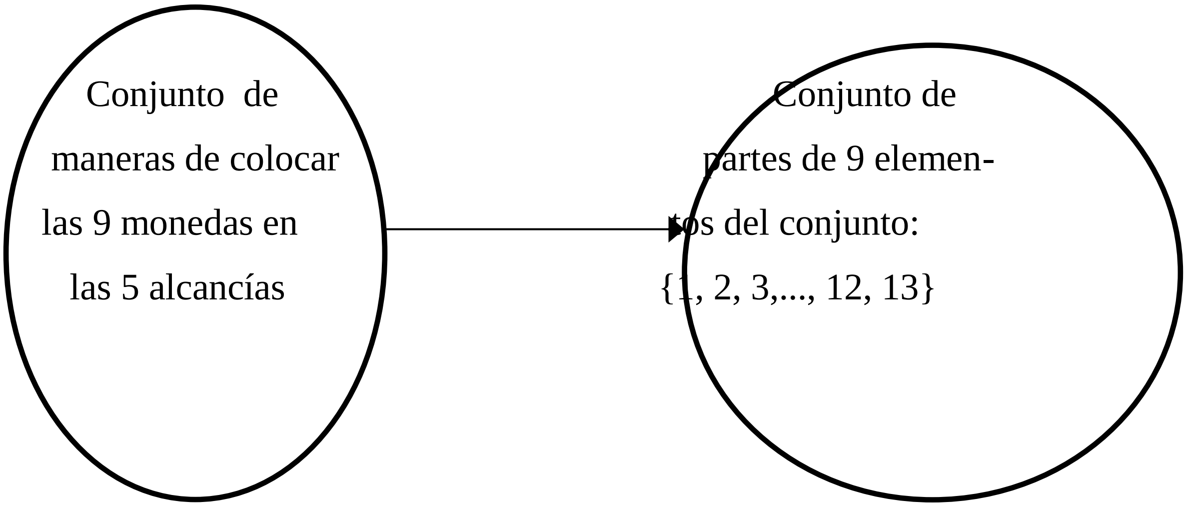


Figura 11

Así, se infiere una biyección entre:



De lo expuesto, resulta la biyección compuesta:



Por tanto, el número de formas de distribuir las 9 monedas en las 5 alcancías es igual al número de partes de 9 elementos de un conjunto de 13=9 + 5 - 1 elementos, o sea:

$$\binom{13}{9} = \binom{9+5-1}{9} = 715$$

Generalización

Se plantea el siguiente problema inicial:

Determinar el número de sucesiones de p naturales cuya suma es n

Resolución:

La situación de la figura 3 se puede representar mediante el término siguiente,

$$1 + 0 + 3 + 4 + 1$$

Las situaciones descritas en la Actividad 2 pueden simbolizarse por,

$$3 + 3 + 0 + 1 + 2$$
$$9 + 0 + 0 + 0 + 0$$
$$0 + 0 + 0 + 0 + 9$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 5$$

De lo visto anteriormente, se deduce que el número de sucesiones de 5 números naturales cuya suma es 9, viene dado por:

$$\binom{13}{9} = \binom{9+5-1}{9} = 715$$

Si se sigue un proceso recurrente, se infiere que el número de sucesiones de p números naturales cuya suma es n será el número combinatorio:

$$\binom{n+p-1}{n}$$

Problema equivalente a determinar el número de maneras de colocar n monedas en p alcancías.

Generación de Variaciones con Matlab 5.3

Con el siguiente programa informático en Matlab 5.3, se pueden engendrar las 715 formas distintas de distribuir las 9 monedas en las 5 alcancías.

```
n=1;
for i=9:90000
a=floor(i/10000);
b=floor((i-a*10000)/1000);
c=floor((i-a*10000-b*1000)/100);
d=floor((i-a*10000-b*1000-c*100)/10);
e=floor((i-a*10000-b*1000-c*100-d*10)/1);
if((a+b+c+d+e)==9)
victor(n)=i;
n=n+1;
end
end
for i=1:11:715
disp (sprintf('%05d %05d %05d %05d %05d %05d %05d %05d %05d %05d
%05d', victor(i:i+10)))
end
```

Así, se obtendría la siguiente tabla numérica de las 715 variaciones posibles, en la que se puede considerar cada variación como un número de 5 cifras. De esta manera, la variación 00009 refleja la siguiente situación: 0 monedas en la primera alcancía, 0 en la segunda, 0 en la tercera, 0 en la cuarta y 9 monedas en la quinta alcancía.

```
00009 00018 00027 00036 00045 00054 00063 00072 00081 00090 00108
00117 00126 00135 00144 00153 00162 00171 00180 00207 00216 00225
00234 00243 00252 00261 00270 00306 00315 00324 00333 00342 00351
00360 00405 00414 00423 00432 00441 00450 00504 00513 00522 00531
00540 00603 00612 00621 00630 00702 00711 00720 00801 00810 00900
01008 01017 01026 01035 01044 01053 01062 01071 01080 01107 01116
01125 01134 01143 01152 01161 01170 01206 01215 01224 01233 01242
01251 01260 01305 01314 01323 01332 01341 01350 01404 01413 01422
01431 01440 01503 01512 01521 01530 01602 01611 01620 01701 01710
01800 02007 02016 02025 02034 02043 02052 02061 02070 02106 02115
02124 02133 02142 02151 02160 02205 02214 02223 02232 02241 02250
```

02304 02313 02322 02331 02340 02403 02412 02421 02430 02502 02511
02520 02601 02610 02700 03006 03015 03024 03033 03042 03051 03060
03105 03114 03123 03132 03141 03150 03204 03213 03222 03231 03240
03303 03312 03321 03330 03402 03411 03420 03501 03510 03600 04005
04014 04023 04032 04041 04050 04104 04113 04122 04131 04140 04203
04212 04221 04230 04302 04311 04320 04401 04410 04500 05004 05013
05022 05031 05040 05103 05112 05121 05130 05202 05211 05220 05301
05310 05400 06003 06012 06021 06030 06102 06111 06120 06201 06210
06300 07002 07011 07020 07101 07110 07200 08001 08010 08100 09000
10008 10017 10026 10035 10044 10053 10062 10071 10080 10107 10116
10125 10134 10143 10152 10161 10170 10206 10215 10224 10233 10242
10251 10260 10305 10314 10323 10332 10341 10350 10404 10413 10422
10431 10440 10503 10512 10521 10530 10602 10611 10620 10701 10710
10800 11007 11016 11025 11034 11043 11052 11061 11070 11106 11115
11124 11133 11142 11151 11160 11205 11214 11223 11232 11241 11250
11304 11313 11322 11331 11340 11403 11412 11421 11430 11502 11511
11520 11601 11610 11700 12006 12015 12024 12033 12042 12051 12060
12105 12114 12123 12132 12141 12150 12204 12213 12222 12231 12240
12303 12312 12321 12330 12402 12411 12420 12501 12510 12600 13005
13014 13023 13032 13041 13050 13104 13113 13122 13131 13140 13203
13212 13221 13230 13302 13311 13320 13401 13410 13500 14004 14013
14022 14031 14040 14103 14112 14121 14130 14202 14211 14220 14301
14310 14400 15003 15012 15021 15030 15102 15111 15120 15201 15210
15300 16002 16011 16020 16101 16110 16200 17001 17010 17100 18000
20007 20016 20025 20034 20043 20052 20061 20070 20106 20115 20124
20133 20142 20151 20160 20205 20214 20223 20232 20241 20250 20304
20313 20322 20331 20340 20403 20412 20421 20430 20502 20511 20520
20601 20610 20700 21006 21015 21024 21033 21042 21051 21060 21105
21114 21123 21132 21141 21150 21204 21213 21222 21231 21240 21303
21312 21321 21330 21402 21411 21420 21501 21510 21600 22005 22014
22023 22032 22041 22050 22104 22113 22122 22131 22140 22203 22212
22221 22230 22302 22311 22320 22401 22410 22500 23004 23013 23022
23031 23040 23103 23112 23121 23130 23202 23211 23220 23301 23310
23400 24003 24012 24021 24030 24102 24111 24120 24201 24210 24300
25002 25011 25020 25101 25110 25200 26001 26010 26100 27000 30006
30015 30024 30033 30042 30051 30060 30105 30114 30123 30132 30141
30150 30204 30213 30222 30231 30240 30303 30312 30321 30330 30402
30411 30420 30501 30510 30600 31005 31014 31023 31032 31041 31050
31104 31113 31122 31131 31140 31203 31212 31221 31230 31302 31311
31320 31401 31410 31500 32004 32013 32022 32031 32040 32103 32112
32121 32130 32202 32211 32220 32301 32310 32400 33003 33012 33021
33030 33102 33111 33120 33201 33210 33300 34002 34011 34020 34101
34110 34200 35001 35010 35100 36000 40005 40014 40023 40032 40041

40050 40104 40113 40122 40131 40140 40203 40212 40221 40230 40302
40311 40320 40401 40410 40500 41004 41013 41022 41031 41040 41103
41112 41121 41130 41202 41211 41220 41301 41310 41400 42003 42012
42021 42030 42102 42111 42120 42201 42210 42300 43002 43011 43020
43101 43110 43200 44001 44010 44100 45000 50004 50013 50022 50031
50040 50103 50112 50121 50130 50202 50211 50220 50301 50310 50400
51003 51012 51021 51030 51102 51111 51120 51201 51210 51300 52002
52011 52020 52101 52110 52200 53001 53010 53100 54000 60003 60012
60021 60030 60102 60111 60120 60201 60210 60300 61002 61011 61020
61101 61110 61200 62001 62010 62100 63000 70002 70011 70020 70101
70110 70200 71001 71010 71100 72000 80001 80010 80100 81000 90000

La Enseñanza de la Combinatoria en la Educación Secundaria

Las actividades combinatorias constituyen un medio excelente para que los alumnos realicen actividades de matematización (modelización, representación, formulación, abstracción, validación y generalización, entre otras). La matemática combinatoria es el núcleo central de la matemática discreta, cuya enseñanza sistemática es propuesta con énfasis en los diseños curriculares de la mayor parte de las naciones, para los niveles de la educación secundaria, motivado en gran parte por las numerosas aplicaciones de la misma en diferentes ámbitos profesionales.

Desde el punto de vista de la formación matemática de los alumnos, el interés de la enseñanza de la Combinatoria es resaltado por Freudenthal [1], quien afirma que las actividades combinatorias son muy eficientes para promover la reinvención matemática por parte de los alumnos.

Fischbein analizó el efecto de la instrucción sobre el desarrollo de la capacidad combinatoria en estudiantes de secundaria. Realizó un análisis teórico de la relación entre el pensamiento combinatorio, la recursión y la inducción matemática, así como el papel de las representaciones y modelos generativos en facilitar y acelerar el paso de unos estadios a otros. Concede una gran trascendencia a la intuición como parte de la conducta inteligente.

Él y sus colaboradores han investigado el papel de la instrucción, basada especialmente en el uso sistemático del diagrama en árbol, en la aceleración de la adquisición de los esquemas intelectuales característicos del razonamiento combinatorio.

Como resultado de sus trabajos se mostró que a los adolescentes de edades comprendidas entre 10 y 15 años, se puede enseñar con éxito un cierto número de procedimientos combinatorios, si se usan diagramas en árbol como recurso didáctico.

Kaput [5] enumera las siguientes razones positivas para la enseñanza de la Combinatoria en los niveles de secundaria:

♦ Dado que no depende del cálculo complicado, puede ser iniciada en una etapa muy temprana; de hecho permite plantear problemas para todos los niveles educativos (incluso en los últimos cursos de primaria).

♦ Permite dar oportunidades a los estudiantes de realizar actividades características de la matematización: hacer conjeturas, generalización, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, etc.

♦ Se proporcionan oportunidades de distinguir entre demostraciones rigurosas y plausibles.

♦ Pueden proponerse gran variedad de campos de aplicación, tanto internas a la propia matemática como externas: física, química, biología, análisis de redes, diseño de experimentos, teoría de la comunicación, probabilidad, programación dinámica, teoría de números, topología, matemática recreativa, etc.

♦ Se pueden proponer problemas desafiantes, algunos no resueltos aún, aunque al alcance de la comprensión de los estudiantes. Ello permite que aprecien la necesidad de creación de nuevas matemáticas. Puesto que muchos problemas y aplicaciones de la Combinatoria se han desarrollado recientemente, puede mostrar la naturaleza dinámica de esta ciencia.

♦ Al crear la costumbre de examinar todas las posibilidades, enumerarlas y hallar la mejor alternativa, contribuye al desarrollo del pensamiento sistemático.

♦ Puede contribuir a dar sentido a conceptos algebraicos elementales como los de aplicación, relaciones binarias, funciones, isomorfismo, etc.

Estas razones han sido citadas también por Batanero, p. 84-85, en [1].

Por otra parte, consideramos especialmente adecuada la Combinatoria para alcanzar los siguientes objetivos del Área de Matemáticas, presentados en el Currículo de la ESO de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias (1996):

- Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales, las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística), con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
- Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
- Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.
- Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

- Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.
- Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.

Referencias Bibliográficas

[1] BATANERO, M.C. y otros (1996): *Razonamiento combinatorio.* Síntesis. Madrid.

[2] CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES DEL GOBIERNO DE CANARIAS (1996). *Currículo de la ESO*.

[3] NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). *http://www.nctm.org/standards*. USA.

[4] DE LA CRUZ, M.C. y otros (1993): *Actividades sobre Azar y Probabilidad.* Narcea. Madrid.

[5] FISCHBEIN, E. (1987): *Intuition in science and mathematics; an educational approch*. Dordrecht: D. Reidel.

[6] GARDINER, A.D. (1991): *A cautionary note*. En: M.J. Kenney y C. R. Hirsch (Eds.).

[7] KAPUR, J.N. (1970): *Combinatorial analysis and school mathematics. Educational Studies in Mathematics*, Vol. 3, p. 111-127.

[8] KENNEY, M.J. y HIRSCH, C.R. (1991): *Discrete Mathematics across the Curriculum*, K-12. 1991 Yearbook. Reston, VA: NCTM.

[9] PAPY, G. (1.972): *Matemática Moderna*, Tomo V. Editorial Universitaria de Buenos Aires.

[10] PÉREZ, C. (1999): *Análisis matemático y Álgebra lineal con MATLAB*. Ra-Ma. Madrid.

[11] SCHIELACK, V.P., J.R., (1991): *Combinatorics and Geometry.* En: M. J. Kenney y C. R. Hirsch, (Eds.).