ISSN: 1695-6613

ELEGIR ENTRE UNA LISTA DE PREFERENCIAS

María Candelaria Espinel Febles

Universidad de La Laguna

Resumen

Los resultados deseables, pero inalcanzables en una elección, pueden suponer un desengaño para la capacidad que se le atribuye a las Matemáticas. En este artículo se comenta el Teorema de Imposibilidad de Arrow, que nos dice que es imposible encontrar un método para elegir entre varias alternativas que sea justo y razonable. Se muestran algunos ejemplos que reflejan cómo estudiantes con distinta formación matemática proponen de forma natural métodos de agregación para obtener una ordenación social justa.

Abstract

The desirable but unreachable results in a choice can suppose a disillusion for the capacity that is attributed to Mathematics. I will comment the Impossibility Arrow´s Theorem that tells us that it is impossible to find a method to choose between alternative several alternatives that are just and reasonable. I will show some examples that reflect how students with different math training propose in a natural way aggregation methods to obtain a just social ranking.

Introducción

La concesión del premio Cervantes 2000 produjo alguna polémica. Se ha tomado de la prensa (El País, 21.1.2001) el siguiente párrafo: "Según han confirmado varios miembros del jurado, en esa ronda, Bousoño sumaba cinco votos; Umbral, cuatro, y se había producido una abstención ... Dos de los diez miembros del jurado lograron reconducir el resultado argumentando que no había la posibilidad de abstenerse. Todavía fueron necesarias varias rondas de votos hasta que por fin lograron el premio para Umbral con seis votos frente a cuatro. Habían transcurrido casi cuatro horas en las que los diez estudiaron 25 candidaturas".

En las votaciones se había aplicado el sistema Goncourt, premio literario francés, que consiste en elegir a cinco en la primera ronda, cuatro en la segunda, y así sucesivamente. Al parecer, en este caso, la polémica se desató porque no se precisó antes de comenzar las votaciones, si se podía ejercer la abstención o no.

Hace 230 años se debió presentar una situación parecida, que supuso cierta tensión entre dos grandes hombres de ciencia, aunque adversarios, Borda y el Marqués de Condorcet. Efectivamente, el matemático Jean – Charles Borda detectó que el procedimiento que se seguía para elegir a los miembros de la Real Academia Francesa de las Ciencias tenía fallos. Para explicarlo, en 1770, Borda recurrió al siguiente supuesto.

Ejemplo 1: Índice de recuento Borda

Dados tres candidatos A, B y C y doce votantes que reparten sus preferencias según se muestra (“>” significa “preferido a”):

Preferencias	Votos
A > C > B	5
B > C > A	4
C > B > A	3
	12

Recurriendo a la pluralidad o mayoría relativa se obtiene: A > B > C con 5 : 4 : 3 votos, respectivamente. Pero el candidato A que ha obtenido la mayoría, no es necesariamente preferido frente a sus oponentes. Así, al realizar comparaciones de los candidatos A, B y C dos a dos, se tiene:

B > A con 7 : 5

C > A con 7 : 5

C > B con 8 : 4

Esta comparación por parejas lleva a: C > B > A. Con este ejemplo, Borda pone de manifiesto que el candidato A es el peor considerado por los electores en comparaciones por parejas.

Borda propone un método alternativo a la regla de la pluralidad por un sistema de puntos. En el ejemplo considerado, con tres candidatos, al candidato preferido se le asignarían 2 puntos, al siguiente, 1 punto y al último, se le asignaría 0 puntos. A continuación se suman todos los puntos de cada candidato. La ordenación final se confeccionaría de acuerdo con los puntos totales.

El resultado con el ejemplo sería:

$$A \rightarrow 2.5 + 0.4 + 0.3 = 10$$

$$B \rightarrow 0.5 + 2.4 + 1.3 = 11$$

$$C \rightarrow 1.5 + 1.4 + 2.3 = 15$$

El vector de puntos (2, 1, 0) da lugar a la ordenación: C > B > A con respectivamente 15 : 11 : 10 puntos. Para este ejemplo el método propuesto por Borda funciona y coincide con la comparación por parejas. Pero por qué elegir precisamente la ponderación (2, 1, 0) y no usar otra como (4, 1, 0) o (6, 5, 0). Veamos lo que ocurre con el ejemplo de Borda y el vector de pesos (6, 1, 0):

$$A \rightarrow 6.5 + 0.4 + 0.3 = 30$$

$$B \rightarrow 0.5 + 6.4 + 1.3 = 27$$

$$C \rightarrow 1.5 + 1.4 + 6.3 = 27$$

Tenemos: $A > B = C$ con $30 : 27 : 27$ puntos, lo cual supone un empate entre los dos candidatos. Así que el método de Borda o regla de votación posicional también puede llevar algunos inconvenientes como el hecho de que el método pueda ser manipulado mediante la elección de los pesos.

La otra persona implicada en el tema, por la misma época, es Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet, matemático, filósofo y político francés. En 1780, el Marqués de Condorcet añade más controversia, al defender que el ganador debe ser el candidato que en una votación cara a cara gane a todos los demás candidatos. En nuestro ejemplo, el ganador debería ser C porque gana a A y a B cuando se enfrentan directamente. Pero tal ganador puede que no exista. Efectivamente, el de Condorcet es un método muy aceptable aunque la elección por pares puede dar lugar a ciclos. Veamos un ejemplo en el que no existe ganador de Condorcet:

Preferencias	Votos
$A > B > C$	1
$B > C > A$	1
$C > A > B$	1

Tenemos que: $A > B$ por $2 : 1$, $B > C$ por $2 : 1$ y $C > A$ por $2 : 1$. Es decir, que A gana a B y B gana a C, pero A no gana a C. No se cumple la transitividad ($A > B,\ B > C \Rightarrow A > C$). Este hecho se le conoce como paradoja Condorcet.

Esta historia que comenzó en 1770, la retomó en 1951 Kenneth J. Arrow, para demostrar que ordenar una lista de preferencias es "el sueño imposible".

Efectivamente, los trabajos de Arrow muestran que no hay una forma de combinar las preferencias individuales de manera que cumplan simultáneamente cinco condiciones mínimas de racionalidad:

a) Racionalidad mínima (transitividad). Si la sociedad prefiere A sobre B y B sobre C; entonces la sociedad prefiere A sobre C.

b) El criterio de Pareto. Si una persona prefiere A sobre B, y el resto es indiferente, entonces la sociedad refiere A sobre B.

c) No dictadura. Las preferencias de la sociedad no reflejan los deseos de un solo individuo.

d) Independencia de alternativas irrelevantes. Si C no figura en el programa, que A sea preferido a B no debe depender de su relación con C.

e) Aplicación universal. El método tiene que servir para cualquier combinación de preferencias individuales que sea posible, no sólo limitarse a situaciones particulares.

Durante las últimas décadas se ha desarrollado una rama especializada, la teoría de elección social, que se ocupa de estudiar los problemas de la agregación de preferencias individuales para satisfacer criterios sociales. Es decir, dado un conjunto de alternativas, cada individuo tendrá un cierto orden de preferencias entre las diferentes alternativas y se plantea el problema de convertir las distintas preferencias individuales en una sola elección para todo el grupo.

Métodos de agregación propuestos por los estudiantes

El tema de las votaciones y sus paradojas se estudia en Teoría de la Decisión, asignatura de la Licenciatura de Matemáticas en la Especialidad de Estadística, y a veces en la Licenciatura de Económicas.

Queríamos analizar cómo se comportarían estudiantes universitarios, que no han recibido una formación previa en el tema, ante situaciones sencillas en las que tienen que elegir una ordenación entre distintas alternativas. Al no tratarse de un tema presente en el temario de asignaturas que imparto, aprovecho para plantearlo, bien los primeros días de clase cuando los alumnos eligen delegado, subdelegado y suplente, o bien algún día que faltan muchos alumnos a clase a causa de un puente o proximidad de exámenes. Se trata de recabar la opinión de los estudiantes para convertir una lista de preferencias en una elección justa.

A continuación, mediante varios ejemplos, se muestra el análisis y los comportamientos de los estudiantes cuando han de convertir la preferencias individuales en una elección razonable y justa.

Ejemplo 2: Cinco votantes y cuatro candidatos

Se les pide a cinco estudiantes que se ordenen de forma secreta entre ellos según preferencias para realizar un determinada tarea. En principio fueron un poco reacios, de hecho uno de ellos se negó a ser elegido, aunque si participó en la votación.

De las 24 (4!) ordenaciones posibles salen elegidas cuatro por los cinco votantes:

Preferencias	Puntos
C > B > D > A	2
D > C > B > A	1
D > A > B > C	1
A > B > C > D	1
	5

Propuse como un desafío que, a la vista de las preferencias individuales, pensaran procedimientos que llevaran a cualquiera de los cuatro candidatos a resultar ganador y les sugerí la posibilidad de la votación estratégica, en el sentido de votar a favor de un resultado que no es el más preferible, pero con el que se logra un mejor resultado a largo plazo.

Se muestra un resumen de los criterios que surgieron en la puesta en común. Llama la atención que uno de los estudiantes utilizara pesos con números impares para el método Borda.

1. Mayoría relativa. Elegir al candidato que ha obtenido mayor número de primeros lugares.

i) Votación sincera. Recuento de las primeras preferencias: C → 2 votos, y D → 2 votos. Por tanto empate entre C y D.

ii) Votación estratégica. Intuyendo que primera preferencia no va a ganar, vota a su segunda preferencia. Por ejemplo: D > A > B > C cambia a A > D > B > C lo que da lugar a C → 2 votos y también A → 2 votos. Ahora el empate está entre A y C.

2. Votación secuencial.

i) Elección a dos vueltas. Se realizan dos votaciones. En la primera participan todos los candidatos, de entre los cuales se elige a los dos más votados. Sólo con estos dos candidatos se realiza una segunda votación, dando ganador al que obtenga más votos.

ii) Eliminación del candidato con menor número de primeros puestos. Gana C.

iii) Eliminación del candidato con mayor número de últimos puestos. Gana C.

3. Comparación por parejas. Todas las parejas posibles; este “cara a cara” da un posible ganador Condorcet.

i) Votación sincera

B > A 3 : 2	C > A 3 : 2	D > A 4 : 1
C > B 3 : 2	B > D 3 : 2	C > D 3 : 2

Gana C > B > D por 3 : 2 : 1

ii) Votación estratégica

Por ejemplo: D > C > B > A puede impedir que gane C si traiciona su preferencia a D > B > C > A dando lugar a B > C con 3 : 2.

4. Recuento Borda. Se puntúan las alternativas de cada lista en orden creciente y se suman los puntos de cada candidato.

Los pesos (4, 3, 2, 1), dan lugar a

$$C = D > B > A \text{ con } 14 : 14 : 13 : 10$$

Los pesos (5, 3, 1, 0), dan lugar a

$$C > D > B > A \text{ con } 14 : 12 : 11 : 8$$

Ejemplo 3: Tres candidatos y todas las alternativas

Esta situación viene propuesta en el texto *Mathematics and Politics* (Taylor, 1995). Se consideran tres opciones y las seis ordenaciones posibles.

Preferencias	Porcentaje de votos
A > B > C	22
A > C > B	23
B > A > C	15
B > C > A	29
C > A > B	7
C > B > A	4
	100

La cuestión está en cómo elegir una ordenación a partir de las preferencias particulares.

1. Mayoría. El candidato A es preferido como primero sobre los otros, ya que $A \rightarrow 45 \quad B \rightarrow 44 \quad C \rightarrow 11$

Sin embargo la ordenación A > B > C sólo tiene un 22 % de los votos

2. Comparación por parejas:

$$A > B \; 52 : 48, \quad B > C \; 66 : 34, \quad A > C \; 60 : 40$$

Por tanto, se debería optar por A > B > C, pero como ya se ha dicho no cuenta ni con la cuarta parte de los votos.

3. Recuento Borda: Con pesos (3, 2, 1) se obtiene A > B > C con pesos totales 294 : 222 : 174. De nuevo la misma clasificación final.

Sorprende cómo algunos estudiantes se dejan llevar por cómo se presenten las seis ordenaciones. Por ejemplo, si se coloca la preferencia B > C > A con 29 votos, en primer lugar, defienden al candidato B como el más preferido.

Ejemplo 4: Cinco votantes y tres candidatos

En este caso se les plantea a los alumnos una situación análoga al ejemplo previo pero con sólo tres alternativas:

Preferencias	Votos
B > C > A	2
A > C > B	2
A > B > C	1

1. Mayoría: A > B > C

2. Comparación por parejas: A > B 3 : 2 B > C 3 : 2 A > C 3 : 2

Por tanto, A > B > C

3. Recuento Borda: Con pesos (3, 2, 1): A > B > C 11 : 10 : 9

A pesar de hacerle ver a los estudiantes que la preferencia A > B > C sólo cuenta con el apoyo de un voto de los cinco, se quedan con esta opción como la elección más justa.

Si el ejercicio se propone para asignar cargos, por ejemplo, en una comunidad de vecinos, la mayoría de los alumnos defiende los cargos (Presidente, Secretario, Tesorero): A > C > B 3 : 4 : 2

En caso de que los candidatos (A, B y C) figuren con nombres (Antonio, Benito y Carmen), le asignan el cargo de Secretario a Carmen.

Ejemplo 5: Preferencias deportivas

El siguiente ejemplo es el resultado del trabajo de un alumno al que le interesó de forma especial el tema cuando se trabajó en clase. Para ampliar sus conocimientos leyó el Capítulo 11 de libro *Las matemáticas en la vida cotidiana* (COMAP, 1998). Realizó una encuesta entre 52 compañeros sobre sus preferencias deportivas en relación a Baloncesto, Voleibol y Natación.

Se recoge el resultado de la encuesta y un resumen del análisis realizado por este alumno:

Preferencias	Votos
B > V > N	12
V > B > N	12
V > N > B	11
B > N > V	8
N > V > B	5
N > B > V	4
	52

1. Mayoría relativa:

i) Votación sincera, da como ordenación ganadora V > B > N con 23 : 20 : 9.

ii) Votación estratégica, si los 4 votos de N > B > V cambian a B > N > V, el resultado sería

B > V > N con 24 : 23 : 5

2. Votación secuencial:

i) Eliminación del candidato con menor número de primeros puestos. Gana V.

ii) Eliminación del candidato con mayor número de últimos puestos. Gana V.

3. Comparación por parejas:

i) Votación sincera, V > B 28 : 24, B > N 32 : 20, V > N 35 : 17 la ordenación ganadora es V > B > N, siendo la relación transitiva.

i) Votación estratégica, los 12 votos de B > V > N pueden impedir que haya ganador de Condorcet, cambiando a B > N > V 20 (12 + 8) votos y, por tanto:

V > B 28 : 24 B > N 32 : 20 N > V 35 : 17

4. Recuento Borda (3, 2, 1): V > B > N con 115 : 104 : 92.

Reflexión

La capacidad de las Matemáticas para demostrar que ciertas tareas son imposibles tiene un efecto de desencanto, en contraposición al perfecto método preferido de teorema - demostración. Al hilo del tema de este encuentro interuniversitario: "Razonamientos y Pruebas en Matemáticas" invito a reflexionar sobre uno de estos teoremas de imposibilidad y analizo cómo reaccionan los estudiantes sin una formación previa sobre el tema.

La mayoría de los teoremas de imposibilidad es muy difícil de demostrar a un nivel académico medio, pero se puede dar vida al tema mediante ejemplos. La experiencia contada aquí con estudiantes universitarios se llevó a cabo en una asignatura de libre configuración. Los alumnos que participaron cursaban Magisterio en diversas especialidades, Pedagogía, Informática y Matemáticas. Para todos, pensar sobre votaciones y elecciones desde un punto de vista matemático les resultaba novedoso y parecían estar muy interesados. De hecho, contaron alguna situación vivida por ellos en la que los resultados en una elección fueron distintos a los que se habían esperado.

Antes de esta experiencia, ya cuando preparamos las actividades para el texto "Matemáticas para nuestro tiempo" (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias, 1998) decidimos incluir la actividad A10, "Votos", por la buena acogida que encontramos por parte de los alumnos de Primero de Bachillerato. Estos defendían sus preferencias para delegado, subdelegado y suplente, con argumentos diversos. La actividad incluso fue mejorada con las propuestas y reflexiones de los alumnos.

Una experimentación parecida con alumnos de Bachillerato es descrita por la profesora Mercedes Alemán en *Números*, volumen 37 (1999), bajo el título "Toma de decisiones en grupo (Votaciones)".

Esto nos anima a indagar un poco más sobre la lógica que siguen las personas cuando, ante una lista de posibilidades, deben defender la alternativa que les parece más justa teniendo en cuenta las preferencias expresadas en votación. Las votaciones y elecciones están presentes en nuestra sociedad, pero con frecuencia son temas que apenas o nada se abordan en las asignaturas presentes en el currículum. Votar es un elemento democrático. Cuando sólo hay dos candidatos, funciona la regla de la mayoría. Cuando hay tres o más candidatos, la regla de la mayoría tiene varios defectos entre ellos permitir que salga elegido un candidato minoritario. Creemos que las paradojas, la transitividad o la búsqueda de estrategias óptimas, son perfectamente admisibles en unos contenidos de Matemática Aplicada y suponen un medio para desarrollar un comportamiento racional. Queremos finalizar invitando a que estos conocimientos formen parte de la formación matemática de cualquier ciudadano.

Referencias bibliográficas

COMAT (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley y Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.

TAYLOR, A. D. (1995). *Mathematics and Politics. Strategy, Voting, Power and Proof*. Spring – Verlag. New York.