FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA III
ISSN: 1695-6613

PROBLEMAS DIDÁCTICOS ENTRE EL OBJETO MATEMÁTICO Y SU REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA. ESTUDIO CON NÚMEROS DECIMALES

Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

La enseñanza-aprendizaje de los conjuntos numéricos en el sistema educativo está excesivamente individualizada en cada conjunto numérico, con conexiones poco significativas entre los diferentes números y entre éstos y sus representaciones semióticas. Uno de estos conjuntos numéricos, que emerge de manera confusa, es el conjunto *D* de los números decimales, en el que el objeto "número decimal" es caracterizado erróneamente y en el que la representación decimal de los diferentes números es identificada como un número decimal.

En este trabajo analizamos el estatus matemático de los números decimales, así como los problemas didácticos que ocasiona la confusión entre el objeto número decimal y la representación semiótica de los diferentes números en la escritura decimal.

Abstract

The teaching-learning of the numeric sets in the educational system is excessively individualized in each numeric set, with not very significant connections among the different numbers and between these and its semiotics representations. One of these numeric sets that emerges in a confused way is the set D of the decimal numbers, in which the object "decimal number" is erroneously characterized and where the decimal representation of the different numbers is identified as a decimal number.

In this work we analyze the mathematical status of the decimal numbers, as well as the teaching problems that the confusion between the object decimal number and the semiotic representation of the different numbers in the decimal writing causes.

Introducción

En el periódico, El País, del lunes 26 de junio de 2000 apareció un artículo en su sección de economía: "La Bolsa de Nueva York se olvida de los quebrados y acoge los decimales", en el que el articulista, Ricardo de Rituerto, comentaba que la globalización ha llegado a la Bolsa de Nueva York, en la que el dios dinero tiene su catedral en Wall Street, centro de todas las miradas del mundo financiero e industrial para leer en la imparable cinta de cotizaciones, fracciones de medio, octavos, dieciseisavos, treintaidosavos, y sesentaicuatroavos de dólar. Esta es una representación que tiene sus días contados, pues a partir de septiembre la bolsa neoyorquina dejará de lado dos siglos de tradición y cotizará en fracciones decimales, como todo el mundo. En realidad, la Bolsa de Nueva York abandonará las fracciones binarias (divisiones en 2, 4, 8, 16, 32 y 64), para acogerse a las ventajas de las fracciones decimales (divisiones en 10, 100,...).

En Europa, por su parte, el uno de enero de 2002, su sistema monetario se regirá igualmente por las ventajas que ofrecen las fracciones decimales, por ejemplo, el euro y sus divisiones los eurocéntimos.

Los números decimales se han convertido, en estos últimos años, en los protagonistas de todos los cálculos, ordenadores, calculadoras, ..., desplazando completamente a las fracciones. Sin embargo, su tratamiento en el ámbito escolar, propuestas curriculares en programas oficiales y desarrollos didácticos, no parece estar a la altura de las circunstancias, y no sólo por el interés del cálculo con calculadoras y ordenadores sino, también, por el papel determinante que pueden jugar en la organización y comprensión de los sistemas numéricos.

La escritura decimal de los números ha producido confusiones entre lo que es un número decimal y lo que no es un número decimal, identificando más al número decimal por su escritura decimal que por sus propiedades intrínsecas, lo que ha originado cierta ambigüedad entre la escritura decimal y el número decimal, de tal manera que decimal está asociado a números con comas en contraposición al número entero o número sin comas; esta acepción del término decimal es origen de diferentes errores.

En este artículo trataremos de ver cómo el conjunto *D* de los números decimales (fracciones decimales) es caracterizado erróneamente dentro de los sistemas numéricos, y formulamos una propuesta curricular de los sistemas numéricos en la que D juega un papel relevante.

Aprendizaje de los números

El aprendizaje de los números constituye un dilatado proceso que se desarrolla a lo largo de toda la enseñanza no universitaria. El proceso de enseñanza-aprendizaje se organiza en torno a diferentes sistemas numéricos; comienza con los primeros números naturales a los que se añade posteriormente el cero, para acabar con la introducción de los números reales y complejos en el Bachillerato.

Muchos alumnos terminan sus estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números [Robinet (1986), Fischbein (1994)], y, aunque manifiestan que los números que conocen son los naturales, los fraccionarios y los decimales, omitiendo los irracionales y los negativos, muestran gran confusión con la terminología (enteros, fraccionarios, decimales, racionales, irracionales, etc.). La dificultad continúa cuando intentan relacionar los números en los distintos sistemas numéricos.

Robinet (1986) observó que los números reales, para una buena parte de los alumnos, son números que pertenecen a cualquiera de los conjuntos *N,Z,D* y *Q*, y algunos números como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$; diferenciado, a menudo, los números de *R* por su escritura y no por sus propiedades numéricas.

En el ámbito de la formación del profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria, durante los cursos 1993-97, se propuso la realización de una actividad en la que se pedía que señalaran qué números estaban representados por determinadas expresiones semióticas, a 67 alumnos de 5º curso de Ciencias Matemáticas, especialidad de Matemática Fundamental.

Encontramos, salvo pequeñas diferencias no significativas, dos grupos de respuestas que llamaremos: A y B. El grupo A, está formado por 57 alumnos y constituye el 85% de la muestra. El grupo B, está formado por 10 alumnos y representa el 15% de la muestra. Resultados que mostramos en los cuadros 1 y 2, respectivamente.

Cuadro 1

GRUPO A: 57 alumnos (85%)

Actividad: Rellena los siguientes cuadros colocando un SÍ o NO, según que las siguientes expresiones representen o no, a un número que pertenezca a los conjuntos numéricos indicados.

	N **Naturales**	**Z** **Enteros**	**D** **Decimales**	**Q** **Racionales**	**I** **Irracionales**	**R** **Reales**
-3,9	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
0	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
¼	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
1+√2	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
2	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
(1+√5)/2	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
10/5	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
Π	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**

	N Naturales	Z Enteros	D Decimales	Q Racionales	I Irracionales	R Reales
-7/3	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
0,666...	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
Π-5	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
0,5	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
$(\sqrt{2})^2$	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
$3-\sqrt{3}$	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
-1/3	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
0,0011...	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
-3	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
1,48	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
1,3555...	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**

Cuadro 2

GRUPO B: 10 alumnos (15%)

Actividad: Rellena los siguientes cuadros colocando un SÍ o NO, según que las siguientes expresiones representen o no, a un número que pertenezca a los conjuntos numéricos indicados.

	N Naturales	Z Enteros	D Decimales	Q Racionales	I Irracionales	R Reales
-3,9	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**	**SÍ**
0	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
¼	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
$1+\sqrt{2}$	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**

	N Naturales	Z Enteros	D Decimales	Q Racionales	I Irracionales	R Reales
2	**SÍ**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
$(1+\sqrt{5})/2$	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
10/5	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
Π	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
-7/3	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
0,666...	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**	**SÍ**
Π-5	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
0,5	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**	**SÍ**
$(\sqrt{2})^2$	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
$3-\sqrt{3}$	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**SÍ**
-1/3	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
0,0011...	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**	**SÍ**
-3	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**
1,48	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**	**SÍ**
1,3555...	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**	**SÍ**

Observamos en los alumnos de 5º curso de la Licenciatura en Matemáticas dos tendencias en relación con los números decimales. La primera, se caracteriza por identificar el "número decimal como sinónimo de número real". La segunda, aunque minoritaria en este grupo de alumnos, es también significativa, y se caracteriza por identificar el "número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con comas".

También podemos observar en las respuestas a este cuestionario, situaciones donde los números racionales son identificados por su escritura fraccionaria, es decir, el número racional se identifica como el cociente de dos números enteros.

Hay en estos alumnos de sólida formación matemática una tendencia que se caracteriza por identificar el número con su representación semiótica.

Debemos añadir que la tendencia minoritaria en los alumnos de la Licenciatura en Matemáticas se convierte en la tendencia mayoritaria en los alumnos del Centro Superior de Educación en la especialidad de Primaria, aunque la casuística es mucho mayor en este grupo de alumnos.

Los números desde una perspectiva curricular

El tratamiento de los sistemas numéricos en la enseñanza no universitaria es como sigue: naturales, fraccionarios y decimales en Primaria y naturales, enteros, decimales y fraccionarios en Secundaria Obligatoria, dejando para el bachillerato el número real y el número complejo, dependiendo del tipo de Bachillerato.

Si consideramos los números decimales y reales en el currículo canario (Resolución del 23 de junio de 1995 de la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa por la que se establecen orientaciones para la elaboración de la secuencia de contenidos y criterios de evaluación para los dos ciclos de la ESO. Área de Matemáticas. n. 96, pp. 7571-7614, BOC, 1995), en el Primer Ciclo la propuesta a nivel de conceptos es:

- *Números naturales.*
- *Números fraccionarios y decimales. Fracciones sencillas, decimales y porcentajes.*
- *Números negativos.*
- *Sistema de numeración decimal.*
- *Jerarquía de las operaciones. Paréntesis.*
- *Significado de la suma, resta, producto y división con naturales, fraccionarios, decimales y negativos.*

...

Contenidos de los que no podemos extraer una tendencia determinada respecto de los números decimales.

En el segundo Ciclo en lo referente a conceptos tenemos:

- Números naturales, enteros, decimales (fraccionarios o no) y números negativos (afianzamiento del significado).
- Decimales infinitos, no periódicos, como expresión de una cantidad inconmensurable respecto a otra tomada como unidad (introducción).
- Continuidad en R (introducción).
- Sistema de numeración decimal.
....

Contenidos que hemos seleccionado y subrayado y que muestran una tendencia a identificar los números decimales con los números reales.

Si analizamos, igualmente, los diferentes textos españoles que interpretan y desarrollan la propuesta curricular para Matemática de Secundaria Obligatoria, por ejemplo, los textos de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (Coriat y otros 1994, Becerra y otros, 1996), a modo de síntesis, podemos señalar que optan por una organización del tipo:

I. *"Un número decimal es una secuencia de cifras separadas por una coma. Las cifras anteriores a la coma son la parte entera y las que están después son la parte decimal. Así:*

32,475

Parte entera   Parte decimal

II. *"Si en un número decimal se pueden contar sus cifras se dice que es un número decimal limitado o finito".*

III. *"Los números decimales pueden ser:*
Exactos: 4,25 ; 1,387
Periódicos puros: 8,232323... ; 0,777777...
Periódicos mixtos:2,455555... ; 1,326666...

También hay otros números decimales que son ilimitados, pero que sus cifras no se repiten periódicamente. Por ejemplo:
3,141592654...
1,41421356....

Estos últimos números no se obtienen a partir de una fracción.

(Becerra y otros,1996, pp. 53-55)

La situación presentada ahora es análoga a la de la postura anterior: identificar los números reales como números decimales.

Al intentar estudiar el origen de la identificación del número decimal como sinónimo del número real en el ámbito educativo, además de razones históricas, podemos encontrar dos referencias significativas. Una de ellas es el conocido texto de Courant y Robbins (1971). En este libro, página 69, se da como definición general, que dado un punto P de la recta que no esté representado por una fracción decimal "con un número finito n de cifras", está representado por la *fracción decimal infinita*, $z,a_1a_2a_3...$, si para cualquier valor de n el punto P está situado en el intervalo de longitud $1/10^{-n}$, con origen en el punto $z,a_1a_2a_3...a_n$, definición que permite establecer una correspondencia entre los puntos de la recta numérica y todas las "fracciones decimales finitas o infinitas". Ello origina una nueva interpretación: un "número" es una fracción decimal finita o infinita. Los decimales infinitos que no representan números racionales serán llamados números irracionales.

Indican los autores que hasta mediado del siglo XIX estas consideraciones eran aceptadas como satisfactorias para el sistema de los racionales y los irracionales, sistema designado con el nombre de *continuo numérico*. Señalan que el desarrollo de la Geometría Analítica y el Cálculo Diferencial e Integral, se hace sin riesgo con este concepto de número y que es durante la crisis de los principios del Análisis cuando se abre paso la idea de que el concepto de número irracional requería un análisis más preciso.

Más adelante, precisan la definición provisional anterior, formulando la siguiente: *el continuo numérico, o sistema de números reales es la totalidad de los decimales infinitos. Los números racionales son los decimales periódicos; los números irracionales son los decimales no-periódicos* .

Esta organización es adaptada en el texto del Grup Zero (1978): *"la medida y el número",* y ésta es también una referencia significativa, ya que tuvo cierta influencia en los desarrollos curriculares de los sistemas numéricos en España.

A pesar de haber pasado más de 20 años, sigue siendo significativo como ejemplo de este planteamiento. De esta manera, al igual que Courant y Robbins, adoptan esta posición y proponen didácticamente identificar el conjunto de todos los números decimales, con el conjunto de los números reales, recuerdan como importante la necesidad de considerar a los números enteros como un número decimal de período 0, y aportan la siguiente clasificación para su uso en el contexto escolar:

Números Decimales o Números Reales

- Decimales periódicos o Números racionales
  - Números enteros -5, 0, -1, 7...
    - Números naturales: 1, 2, 3, ...
    - Cero: 0
    - Enteros negativos:-1,-2,..
  - Decimales limitados: 3,12; -12, 35; 0,14832;...
  - Decimales periódicos puros: 27,323232... -1, 487487487...
  - Decimales periódicos mixtos: 4,3717171... -18, 15676767...
- Decimales ilimitados no periódicos o Números irracionales: $\sqrt{2}$ = 1,4142... - 7, 010010001... Π = 3,1415926...

Los números decimales

Antes de que el número decimal fuese considerado un objeto matemático, con estatus de número organizado como un espacio sistémico (sistema numérico) con una estructura determinada, ha pasado por diferentes etapas que constituyen formas distintas de usarlo como herramientas de cálculo y de caracterizarlo como objeto matemático.

Brousseau (1986), describe dos etapas para caracterizar el proceso histórico que desarrolla la mayoría de los objetos matemáticos: etapa paramatemática (*el objeto es familiar, reconocido, nombrado, del que se estudian las características y propiedades, pero el que todavía, por diversas razones, no ha sido organizado y teorizado*), y etapa matemática (*el objeto se pone bajo el control de una teoría y se define exactamente por las estructuras en las que interviene y por las propiedades que satisface, puesto a salvo de ambigüedades y errores...*).

A grandes rasgos, podemos encontrar estas etapas en el desarrollo de los números decimales (Centeno, 1988).

Podemos indicar que durante siglos los números decimales han servido para medir y representar cantidades, al igual que se utilizaban los sexagesimales, sin ser reconocidos ni como objeto de estudio ni como útil aplicable a la resolución de problemas. Este tratamiento tiene especial interés a partir del siglo IX, cuando Al-Khowarizmi unifica el cálculo de los naturales con el de las razones geométricas e introduce la numeración decimal.

Como señala Brousseau (1981), se puede suponer que durante seis siglos (siglos X al XV), los decimales están potencialmente presentes en la cultura y su estatus está en evolución. Es decir, desde el siglo X, con Al-Uglidisi, el decimal se utiliza conscientemente, se le reconoce y se le nombra, pero no es todavía un objeto de estudio. Es en el siglo XV, con Al-Kashi, cuando se le reconoce como un descubrimiento matemático, pero se carece todavía de una caracterización teórica del mismo.

En la primera mitad del siglo XVI aparece una gran cantidad de libros de álgebras especialmente de origen germánicas y es en una de ellas, la de Rudolff, en el año 1525, donde el autor muestra el carácter particular que tiene la división por 10, 100, 1000, etc. y señala una notación eficiente; así por ejemplo, indica, que si se divide 652 por 10, da 65/2, etc. Durante algún tiempo este autor fue considerado el padre de las fracciones decimales y de su notación moderna, pero estudios posteriores ponen de manifiesto que el autor no conocía la importancia y la generalidad de este método y que las cifras separadas no eran décimas, centésimas, ..., sino simplemente el resto de la división. Va a ser Viète, en el año 1579, gran algebrista francés de la segunda mitad del siglo XVI, quien los utiliza sistemáticamente y de manera consciente en una de sus obras y propone sustituir las fracciones sexagesimales y sus múltiplos de sesenta, que eran utilizadas habitualmente desde la antigüedad, por los múltiplos y submúltiplos de diez. Así, escribe la apotema de un polígono regular de 96 lados, inscrito en un círculo de radio 200 000, como **99 946**|458.75, donde **99 946** va en negrita para indicar la parte entera; este mismo número es escrito, a veces, con la siguiente notación **99 946** 458 75/1 000 00.

A pesar de la propuesta de Viète de generalizar el uso de las fracciones decimales y de que éstas fueran aceptadas por los matemáticos y astrónomos de primera fila, los decimales se extenderán gracias a las obras de dos autores, Stevin con la publicación en año 1585 de una obra llamada *La Disme,* y Napier en año 1617, autor de las primeras tablas de logaritmos publicadas.

Pese al interés, en diferentes autores, por generalizar el uso de las fracciones decimales, éste no se extiende, probablemente, por que los textos donde eran utilizadas no se detenían a explicarlas, hasta que Stevin, en 1585, en su libro de 36 páginas, *La Disme*, explica la base del sistema de numeración decimal para números no enteros, y lo que es más importante, la descripción de los algoritmos de las cuatro operaciones elementales y el de la raíz cuadrada para estos números, y precisa el ámbito de utilización de estos nuevos números: la unificación de los sistemas de medida, pesos y monedas, que tanto había de favorecer el comercio y los intercambios de todo tipo. Con Napier se avanza hacia la notación moderna de los decimales; éste propone, citando a Stevin, la notación moderna 1.993,273 con un punto o una coma para 1993 273/1000, aunque también utiliza, a veces, la notación 821, 2’ 5’’ para 821 25/100. Sin embargo, el reconocimiento matemático de los números decimales no se dará hasta que los números reales fueron plenamente aceptados como objetos matemáticos.

Los números decimales como sistema numérico

Entendemos por sistemas numéricos el desarrollo del objeto número (natural, entero, decimal, racional, algebraico, real y complejo) en conexión mediante diferentes ampliaciones o extensiones, y presentado manteniendo una unidad basada en la noción de estructura.

Se consideran los sistemas de numeración como colecciones de signos que permiten representar todos los números de un conjunto, y se acepta el teorema fundamental de los sistemas de numeración, en el que dada una base $n>1$, todo número p puede descomponerse de manera única en la forma

$$p = a + bn + cn^2 + dn^3 + ... + fn^{k-2} + gn^{k-1} + hn^k,$$

siendo a, b, c, ..., g, h, números menores que n.

El Sistema de Numeración Decimal puede ser reemplazado por otro cualquiera en la definición de número real, ya que éste es independiente del modo de representar los números.

Cualquiera de estas representaciones nos lleva a la definición de una relación de equivalencia de forma precisa y a la definición de unas operaciones fundamentales, de acuerdo con la definición de número adoptada, que verifiquen las leyes formales de las operaciones.

Si tomamos la representación decimal de los números racionales, situaciones como:

$$5,\ 2323232323\ ...\ +\ 1.3636363636\ ...,$$

no quedan determinadas en dicha representación decimal

Sin embargo, es fácil y útil aprovechar didácticamente, la idea esencial de las aproximaciones de números racionales o reales a números decimales, y generalizarla. Estos números racionales o reales quedan contenidos en una sucesión de intervalos encajados, cuyas amplitudes sucesivas se pueden hacer tan pequeñas como se quiera utilizando el 10 y sus submúltiplos. Este planteamiento, como hemos indicado, puede hacerse sin que para ello el 10 y sus submúltiplos tengan que desempeñar un papel especial. Dada la importancia de la notación decimal en el Sistema Educativo parece razonable atribuirle este papel en las enseñanzas no universitarias.

Sabemos que todo número racional m/n admite una expresión decimal mediante el algoritmo de la división (con resto) de m entre n. Después de un máximo de n-1 pasos debe repetirse por fuerza un resto, de manera que el desarrollo termina interrumpiéndose o haciéndose periódico.

El subconjunto de los números racionales m/n que puede ser expresados mediante un desarrollo decimal finito es el de las fracciones decimales.

En definitiva, queremos construir un conjunto, con $b = 10^n$, en el que la ecuación $10^n\ x = a$, con $n \in N$, y $a \in Z$ tenga siempre solución. Para ello definimos ZxN, donde: $(a_1, n_1)\underline{R}(a_2,n_2) \Leftrightarrow a_1 10^{n2} = a_2 10^{n1}$, y la clase del par (a,n) se escribe como $[a/10^n]$.

Si consideramos el análisis hecho hasta ahora, podemos afirmar que el objeto matemático “Número Decimal” tiene el estatus de sistema numérico al ser un concepto matemático regido por una sólida teoría matemática en la que se define con precisión y en la que tiene consistencia, además de existir un campo de problemas que responde a una variedad de fenómenos y cuestiones que pueden ser analizadas mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de esta estructura numérica.

El número decimal así caracterizado tiene hoy un significado amplio al estar asociado a un contexto rico de sentidos y poder ser expresado por representaciones semióticas autosuficientes; entre otras, la notación decimal o fracciones decimales.

Podemos considerar también el problema desde otro punto de vista. En *Z*, la división no es posible y nos proponemos construir un conjunto en el que la división decimal como reparto en varias fases, igualitario y exacto sea posible para todo par de números enteros (a,b), de forma que el cociente a/b tenga sentido como división decimal exacta. Esta situación la analizaremos en el apartado siguiente.

El objeto número y sus representaciones

La palabra decimal procede de la palabra diez y hace referencia a la base de la numeración decimal. Parece razonable pensar que por el hecho de escribir un número en el sistema de numeración decimal podemos llamarlo número decimal, de la misma manera, que al escribir un número en el sistema de numeración de base dos le llamaríamos número binario, o al escribir un número en el sistema de numeración de base sesenta le llamaríamos número sexagesimal.

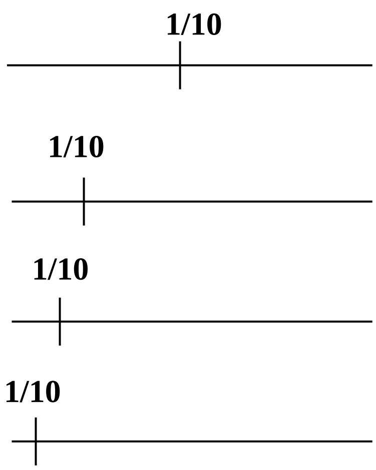
La denominación del objeto número exige un adjetivo; así tenemos: natural, entero, racional, irracional, algebraico, real y complejo, que se refiere a la naturaleza intrínseca del mismo, es decir, a sus propiedades, y que es independiente de la representación y del sistema de numeración que elijamos.

Por ello la expresión “número decimal” es ambigua porque, por una parte, se puede interpretar como cualquier número escrito en el sistema de numeración decimal, y por otra, como un conjunto específico de números en el que la palabra decimal juega el papel de adjetivo del número y caracteriza la naturaleza intrínseca del mismo.

Podríamos pensar que la palabra “decimal”, no tiene un significado intrínseco referido a la naturaleza de este conjunto, sino que se refiere al sistema de numeración decimal que es utilizado para expresar el número. Nada más lejos de la realidad.

Por el hecho de expresar los números naturales, enteros, racionales o reales en la escritura decimal pensamos que éstos se pueden llamar números decimales, de la misma manera que si los escribiéramos en el sistema de numeración base dos los llamaríamos números binarios, etc. Y que con una definición semejante a la dada para los números decimales, podríamos caracterizar a los números binarios, como las fracciones binarias, es decir, las fracciones que tienen como denominador potencias de dos.

Así, por ejemplo, si tomamos la fracción 1/10, y la consideramos como un número racional escrito en base dos, siete, diez, o sesenta, respectivamente, obtendríamos como representación sobre la recta:



que representan, obviamente, números racionales diferentes.

Sin embargo, observamos que si consideramos un mismo número racional, por ejemplo, el representado por la fracción 1/7, sabemos que esta no es una fracción decimal, es decir no admite un desarrollo decimal finito; sin embargo, si consideramos este número racional escrito en base 7, sería de la forma 1/10 y sí representaría una fracción de la misma naturaleza que las fracciones decimales, aunque no pertenecerían al mismo conjunto.

Caracterizamos, ahora, las fracciones decimales (números decimales) desde otro punto de vista. Las fracciones decimales como un reparto igualitario y exacto en varias fases de determinados números enteros, que viene caracterizado por la siguiente ecuación de reparto:

$a/b = c\,[1/10] + (10a - bc){:}\ b[1/10]$, con $bc \leq 10\,a < b(c+1)$,

Por ejemplo, en el caso de reparto de dos cantidades entre tres elementos, la ecuación de reparto, para la primera acción de reparto, sería:

$2{:}3 = 6\,[1/10] + (10.2 - 3.6){:}3[1/10]$, con $3.6 \leq 10.\,2 < 3\,(6 + 1)$,

donde la expresión [1/10] representa el orden de unidades. En esta primera acción de reparto, el orden de unidades es la décima al tener que descomponer dos unidades en veinte décimas para repartir equitativamente.

Si consideramos la situación para el caso de un sistema de base n, la ecuación de reparto, para la primera acción de reparto quedaría:

$a/b = c\,[1/n] + (na - bc){:}\ b[1/n]$, con $bc \leq n\,a < b(c+1)$,

Si consideramos los subconjuntos de números racionales que vienen determinados al aplicar esta relación, un número finito de veces, para los diferentes valores de n, y los designamos, respectivamente, F_2, F_7, F_{10}, F_{60}, etc., encontramos que son conjuntos diferentes, por ejemplo el número racional representado por 1/7, pertenece a F_7 y no pertenece a F_2 y F_{10}, situación que no se da cuando expresamos *N, Z, Q* o *R*, en diferentes sistemas de numeración.

En este sentido, hablar de las fracciones decimales (números decimales) no es únicamente hablar de una representación determinada para un conjunto de números dados, sino que es hablar de un conjunto de números caracterizados, entre otras, por esa propiedad de reparto igualitario y exacto en varias fases mediante la descomposición en grupos de diez.

En otro orden de cosas, todo “número decimal” puede tener una escritura con “coma” o con “punto” (“coma” decimal o “punto” decimal).

El uso del punto para separar la parte entera de la parte decimal de un número, precursor de nuestra coma decimal, se atribuye, indistintamente, a dos autores: Magin, en el año 1592, cartógrafo y amigo de Kepler, y Clavius, en el año 1593, jesuita y amigo también de Kepler. Sin embargo el punto decimal no se popularizó hasta que los utilizó Napier en los logaritmos, veinte años más tarde. Esta notación se utiliza en nuestros días en los países anglosajones, y en los ámbitos de las calculadoras y ordenadores. En lo que respecta a nuestra coma, fue ideada a principios del siglo XVII por el neerlandés Wilbord Snellius.

En el lenguaje habitual se acostumbra a confundir “número decimal” con escritura con “coma” o con “punto”. Forma parte de un uso inapropiado del lenguaje, que tiende a confundir, el objeto matemático con su nombre y con su representación. Sin embargo este abuso del lenguaje es necesario para simplificar el discurso matemático en el contexto escolar; eso sí, con la condición de que su uso sea consciente y conocido por profesores y alumnos.

Consideraciones didácticas

Señalamos en este apartado, a modo de consideraciones finales, algunas cuestiones que resaltan no sólo la legitimidad de considerar el conjunto D de los números decimales como un sistema numérico propio e independiente, sino también algunas cuestiones de interés didáctico.

Nos encontramos en primer lugar con dos tipos de fracciones en los números racionales, las fracciones decimales, que admiten una escritura decimal finita, y las fracciones no decimales, que admiten una escritura decimal infinita periódica pura o mixta. Vemos que lo que es pertinente aquí como la teoría de números y las series infinitas, difiere mucho de lo que sería pertinente para desarrollar didácticamente las fracciones como cociente de enteros y las fracciones decimales. Es cierto que, la representación de las fracciones no decimales mediante desarrollos decimales infinitos, se puede hacer de un modo más elemental, sin recurrir a las series infinitas y sin apelar a la teoría de números para aplicar la peridiocidad del desarrollo.

Emerge en este contexto el conjunto numérico *D* asociado a las fracciones decimales como una prolongación del sistema de numeración decimal, donde las transiciones que se dan son paralelas a las que se dan en el sistema métrico decimal lineal.

En segundo lugar, debemos indicar que con los números reales se resuelve teóricamente el problema de medir cualquier longitud, pero con los números decimales se resuelve prácticamente el problema de medir cualquier longitud.

La pregunta que surge inmediatamente es: ¿hemos de mezclar necesariamente los problemas teórico y práctico de medir cualquier longitud, confundiendo probablemente al alumno y generando ambigüedades en los sistemas numéricos? La respuesta, desde nuestro punto de vista, es no. Proponemos en el cuadro siguiente una posible organización de los sistemas numéricos en el ámbito escolar en la que el conjunto D es considerado como un sistema numérico que permite enlazar y dar sentido a las diferentes representaciones numéricas.

PROPUESTA DE ORGANIZACIÓN CURRICULAR DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Se caracteriza conceptualmente como sistema numérico al conjunto D, y se le asigna un papel relevante en el desarrollo de los números en el ámbito educativo. (Escritura decimal = Desarrollo decimal o Expresión decimal).

- **REALES (R) (Admiten una escritura decimal finita o infinita, no única, 1,3999...= 1,4, salvo que impongamos la condición del 9, al final no periódico)**
  - **RACIONALES (Q)**
    - **Decimales (D) (Fracciones decimales) (Admiten escritura decimal finita)**
      - **Enteros (Z) (Decimales enteros)**
        - **Naturales (N) (Positivos)**
        - **N^{C}_{Z} (Negativos)**
      - **Z^{C}_{D} (Decimales no enteros)**
    - **No Decimales (D^{C}_{Q}) (Fracciones no decimales) (Admiten una escritura decimal infinita periódica)**
      - **Fracciones generatrices periódicas puras**
      - **Fracciones generatrices periódicas mixtas**
  - **NO RACIONALES (Q^{C}_{R}) (Irracionales) (Admiten una escritura decimal infinita no periódica)**
    - **Algebraicos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $(1+\sqrt{5})/2= \Phi$, ... (raíces de un polinomio, $p(x)\in Q$)**
    - **Trascendentes (No raíces de un polinomio) NO Algebraicos: Π, e, log 2, $2^{\sqrt{2}}$, $\sum(C_n/10^{n!})$, $n \geq 0$ y $C_n \in [0,9]$ (números de Liouville), 0,12345678910111213141516171819 2021... (número de Mahler)**

Finalmente, expresamos algunas razones que avalan esta organización, además de la estrictamente conceptual.

La expresión decimal de todos los números, racionales e irracionales, ofrece la ventaja de uniformar el cálculo, pues todas las operaciones se realizan como si los datos fuesen enteros, pero en cambio tiene el grave inconveniente de presentar infinitas cifras, no sólo para representar a los irracionales, sino también a los racionales cuyos denominadores tienen factores distintos de 2 y 5, lo que impide considerar las operaciones como operaciones internas. Es forzoso para operar con tales números, en este contexto decimal, prescindir de las infinitas cifras desde una de ellas en adelante, con lo cual el número representado deja de ser exacto y está representado por otro número (número decimal). Por otro lado debemos considerar que los datos experimentales, resultados de medidas, están siempre afectados por errores, de los que sólo se conoce un número decimal, al cual se mantienen inferiores en valor absoluto. Estos aspectos refuerzan la necesidad de resaltar la importancia de los Números Decimales como un sistema numérico de referencia, en el que los demás números racionales o irracionales en su escritura decimal pueden ser utilizados como números aproximados a un número decimal.

Los números decimales (fracciones decimales) se presentan como un sistema numérico "controlable" tanto en el orden de magnitud como en sus diferentes representaciones semióticas, entre la que sobresale la recta decimal, y constituye el puente de enlace entre la representación decimal (cantidades numéricas o de magnitud) y las otras representaciones semióticas de los sistemas numéricos Q y R.

En aras a evitar la ambigüedad, parece aconsejable unificar la terminología y mantener el término número decimal como un elemento del conjunto D, y fracción decimal como una representación de un elemento del conjunto D, de igual manera que distinguimos a la fracción como una representación de un número racional. En este sentido designaríamos a las fracciones como decimales y no decimales, y estas últimas serían las que permitirían un desarrollo decimal infinito, evitando la ambigüedad, “fracciones decimales infinitas” y “números decimales infinitos”. De igual manera nos referiríamos a los desarrollos decimales infinitos no periódicos como representaciones de los números irracionales.

Referencias bibliográficas

BECERRA, M. V. y otros (1996). *Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria*. McGraw-Hill. Madrid.

BOC (1995): resolución del 23 de junio de 1995 de la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa por el que se establecen orientaciones para la elaboración de la secuencia de contenidos y criterios de evaluación para los dos ciclos de la ESO. Área de Matemáticas. n. 96, pp. 7571-7614.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la Matemática.* Alianza: Madrid.

BROUSSEAU, G. (1981): Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), pp.37-127.

BROUSSEAU, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), pp.33-115.

CENTENO, J. (1988): *Números decimales*. Síntesis: Madrid.

CORIAT, M. y otros (1994). *Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria.* Algaida: Proyecto 2000. Sevilla.

COURANT, R.; ROBBINS, H. (1971): *¿Qué es la Matemática?* Aguilar: Madrid.

FISCHBEIN, E. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceeding of the XVIII PME*, Lisbon, v.2, pp.352-359.

GRUP ZERO (1978): *La medida y el número.* ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona.

ROBINET, J. (1986): Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Cahier de Didactique des Mathematiques*, 21. IREM: París 7.