



LOS LUGARES GEOMÉTRICOS MEDIANTE EL CABRI

José Martel Moreno
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este trabajo se indica la manera de construir lugares geométricos (l. g.) mediante el *Cabri-Géomètre II*. Consta de 8 apartados. En el 1º se estudian las distintas formas de construir l. g. En el 2º y 3º se investigan las curvas *cicloidales* y las *evolventes* de la circunferencia. En los capítulos 4º, 5º y 6º se analizan, respectivamente, l. g. que generan *cónicas*, las inversas de las mismas y sus *podarias*. En el 7º se estudian algunas curvas clásicas relacionadas con los tres problemas clásicos. Finalmente, en el capítulo 8º se extraen algunas conclusiones.

Abstract

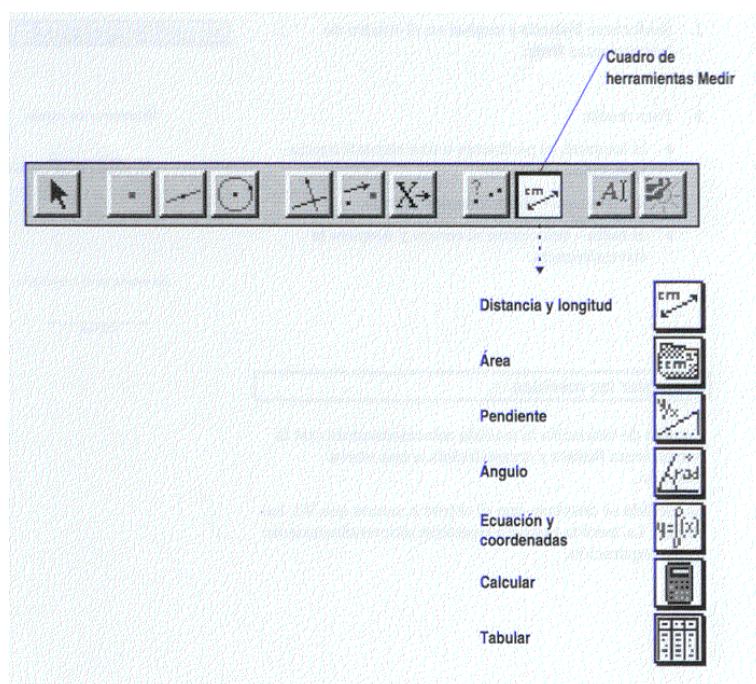
In this work the way is indicated of constructing geometric loci (g. l.) by means of the *Cabri-Géomètre II*. It consists of 8 sections. In the 1st the different forms are studied of constructing g. l. In 2nd, 3rd the *cycloidal* curves and the *evolvents* of the circumference are investigated. In the chapters 4th, 5th and 6th are analyzed, respectively, g. l. that generate *conics*, the inverse of the same ones and their *podaries*. In the 7th some classic curves related with the three classic problems are studied. Finally, in the chapter 8th some conclusions are extracted.

Introducción

Sabido es que un *lugar geométrico* es una figura cuyos puntos poseen una propiedad común y que sólo a ellos pertenece.

El *Cabri II* nos va a permitir la construcción de una serie de lugares geométricos, como veremos en los siguientes apartados, sin que esto quiera decir que se vayan a tratar de un modo exhaustivo, ya que sólo vamos a considerar algunos ejemplos que sean verdaderamente representativos.

Ni que decir tiene que para poder conseguir estos lugares es necesario conocer el significado y manejo de los distintos cuadros de la barra de herramientas que aparecen en el panel de entrada del Cabri y, de un modo especial, el cuadro de herramientas *construir*, que esquematizamos a continuación siguiendo el manual que para el Cabri ha diseñado *Texas Instruments*:

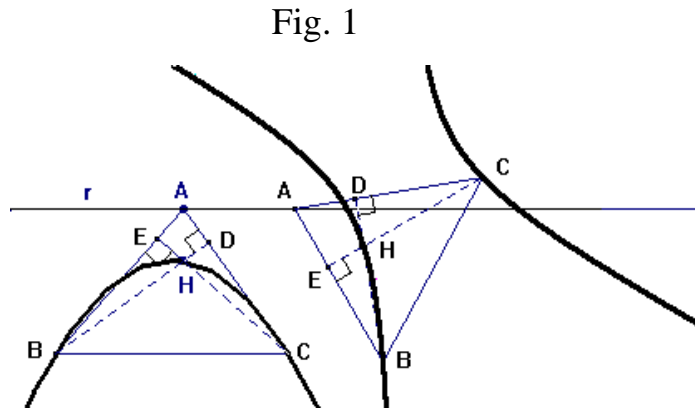


Diversas maneras de construir lugares geométricos

En la construcción de un lugar geométrico (l. g.) se pueden presentar algunos de estos tres casos.

4. Lugar engendrado por un punto cuando otro se mueve en una trayectoria rectilínea.

Ejemplo: l. g. generado por el ortocentro de un triángulo ABC cuando A se mueve a lo largo de una recta r paralela a BC:



Para construir este lugar se selecciona la herramienta l. g., se activa luego el punto H (picando con el ratón en dicho punto) y a continuación se pica, también con el ratón, en el punto A, aparecerá una parábola; pero si se mueve el lado BC de modo que no sea paralelo a la recta r, la parábola se convertirá en una hipérbola (fig. 1).

2. Lugar engendrado por un segmento, semirecta o recta cuando un punto se mueve en una trayectoria rectilínea.

Ejemplo: Lugar engendrado por un segmento de longitud constante cuando sus extremos se apoyan en los ejes coordenados:

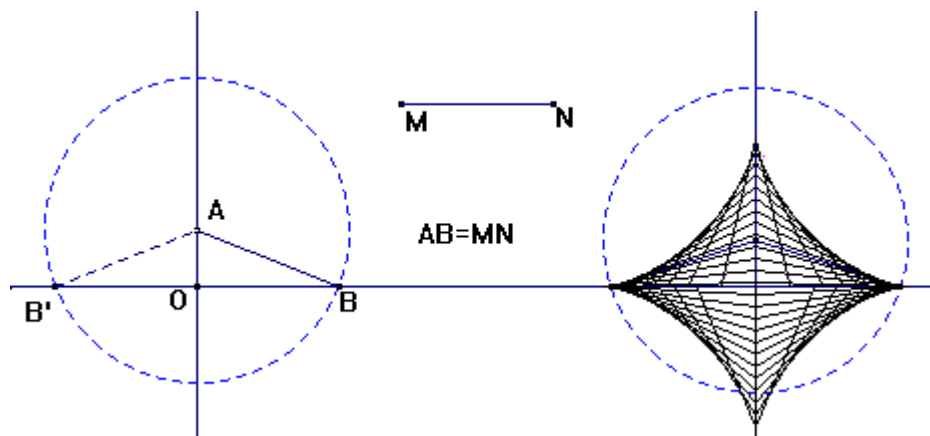


Fig. 2

Este lugar, envolvente de segmentos de igual longitud que se apoyan en los ejes coordenados, es un astroide (del griego: *αστηρ*, - *φορς* = astro; estrella, y *αιδος* = forma). Más adelante veremos otra manera de generarla.

Para su construcción es conveniente utilizar el compás (que se encuentra en las herramientas para construir). El segmento de longitud constante es MN. Se pone un punto sobre uno de los ejes (por ejemplo, el punto A sobre el eje OY), seguidamente se selecciona la herramienta compás, se activa el punto A y, a continuación, se pica sobre el segmento dado, creándose, entonces, una circunferencia de centro A y radio MN que cortará al eje OX en B. Se selecciona la herramienta l. g., se activa $AB = MN$, y se pica seguidamente en el punto A. Aparecerá la mitad del astroide, y, mediante una simetría (o haciendo lo mismo con el segmento AB'), se construirá la otra mitad. Moviendo (con el ratón) los puntos M o N, variará de tamaño.

3. Lugar obtenido como envolvente de circunferencias cuando un punto se mueve sobre una trayectoria rectilínea o circular.

Ejemplos:

a) Circunferencia cuyo centro O se mueve a lo largo de un segmento AB o de una circunferencia de centro C (figs. 3 y 4).

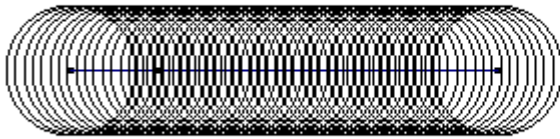


Fig. 3

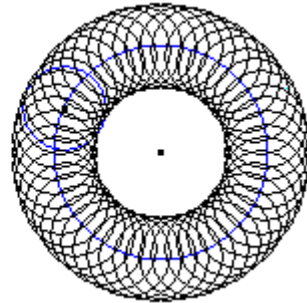


Fig. 4

b) Circunferencia cuyo centro O se mueve a lo largo de una circunferencia de centro C y que además pasa por un punto fijo A de esta última (fig. 5):

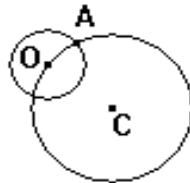


Fig. 5

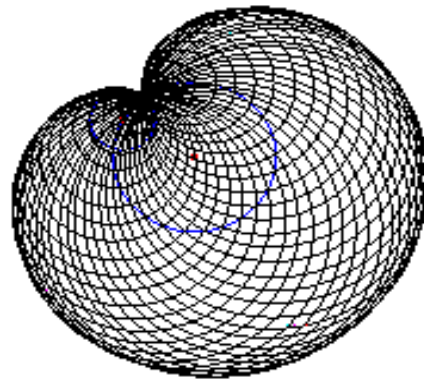


Fig. 6

El lugar (fig. 6) es un *cardioide* (del griego: $\kappaαρδία$ = corazón), que también obtendremos, por otro camino, más adelante.

c) Si en el caso anterior, el punto móvil es A , se obtiene la fig. 7.

Las figs. 7-8 se obtienen activando \overline{OA} (para lo cual el puntero ha de estar activado) y se hace que O recorra la circunferencia de centro C. En la fig. 8 se ha hecho, además, una traslación de la circunferencia de centro C según el vector \overline{OA} . Al mover el punto A se cambia la orientación de ambas figuras.

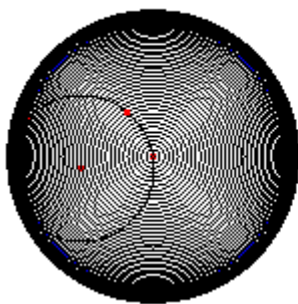


Fig. 7

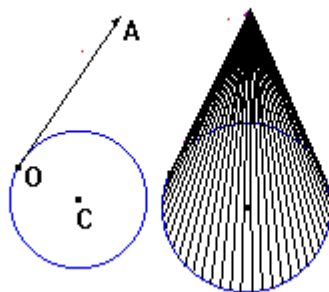


Fig. 8

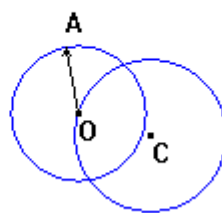


Fig. 9

Curvas cicloidales

Reciben este nombre las curvas descritas por un punto fijo de una circunferencia cuando rueda, sin deslizarse, sobre una curva fija del plano llamada curva base.

1. La curva base es una recta, semirrecta o segmento rectilíneo

La fig. 10 es una *cicloide*, que es la curva engendrada por el P cuando M se mueve, sin deslizarse, a lo largo del segmento AF.

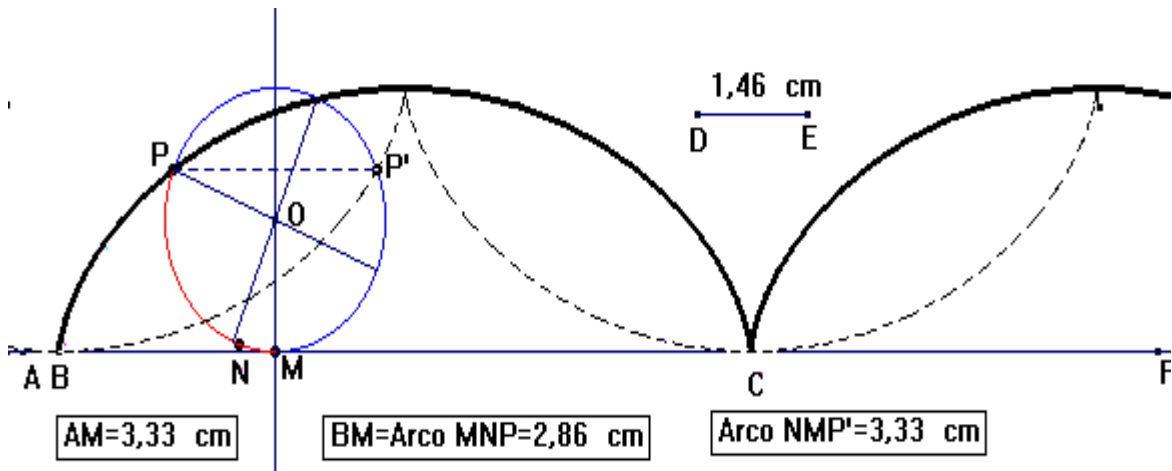


Fig. 10

Para su construcción seguiremos los siguientes pasos:

- Sobre una recta (en el dibujo la que pasa por A y F) marcamos un punto M y con la herramienta medir se mide el segmento AM que en el dibujo tiene 3,33 cm.
- Utilizando la herramienta compás dibujamos la circunferencia de radio $OM=DE$. De este modo podemos variar el radio de la misma con solo mover uno de los extremos del segmento DE.
- Si la circunferencia, sin deslizarse, ha recorrido el camino BM, el punto P, que estuvo en B, ha recorrido el arco MNP.
- Para determinar el punto P es conveniente utilizar la herramienta transferencia de medidas. Se activa dicha herramienta, seguidamente se selecciona (o activa), con el ratón, en este orden: la medida 3,33 cm, la circunferencia, y un segundo punto N, que, previamente, se ha puesto sobre M (o muy cercano a él en la circunferencia). Al picar este segundo punto aparece un nuevo punto, P', sobre

la circunferencia, del que hallamos su simétrico respecto al eje OM. Este otro nuevo punto es, precisamente, el punto P.

- Finalmente, se activa la herramienta l. g., y se pican, con el ratón, en este orden los puntos P y M. ¡Si se han seguido fielmente estos pasos la *cicloide* aparece en un instante! El punto P' produce otra cicloide, que aparece punteada en el dibujo.

El diámetro, trazado en la figura anterior, perpendicular a PO tiene por objeto conseguir que la rueda no resbale al tirar de M.

- ♦ La curva base sigue siendo una trayectoria rectilínea, pero el punto P va a estar dentro o fuera de la circunferencia

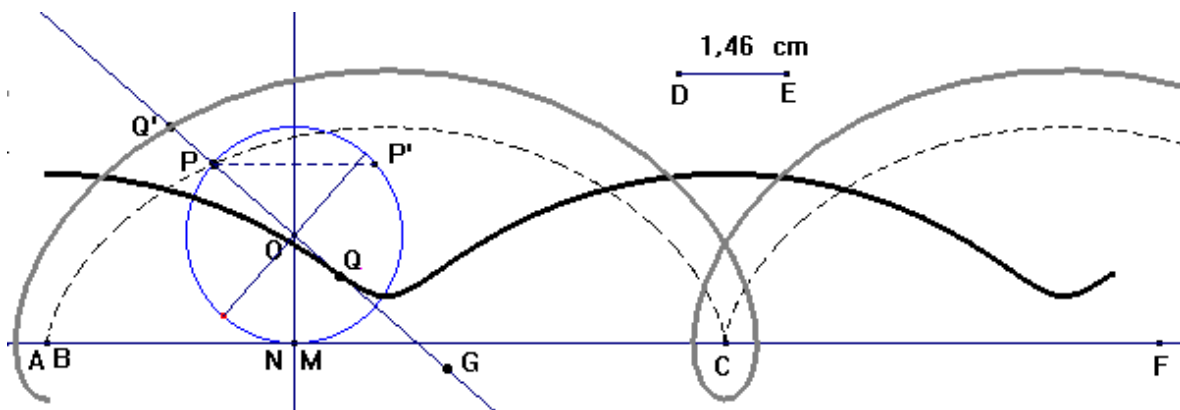


Fig. 11

El punto Q, interior a la circunferencia, engendra una *cicloide acortada* y el punto Q', exterior a la misma, engendra una *cicloide alargada*.

Nota importante: Si se considera un punto genérico G de la recta QQ', y se determina su l. g., entonces, tirando de este punto a lo largo de la recta, se van obteniendo las distintas cicloides.

Por otro lado, conviene observar que si hacemos coincidir el punto B con el A, el punto N coincidirá con el M (tal como se ha hecho en la fig. 11).

◆ La cicloide desde el punto de vista histórico

Según F. Cajori (p. 162 de su *History of Mathematics*), la invención de la misma se debe, al parecer, a un tal Charles Bouvelles, quien en una geometría publicada en Paris en 1501 hace referencia a esta curva en conexión con el problema de la cuadratura del círculo.

Pero el estudio de sus propiedades, junto con los distintos nombres recibidos, corresponde al siglo XVII. Así Roverbal (1602-1675) le dio el nombre de *trocoide* (del griego: τροχος = rueda y ειδος = forma), Pascal (1623-1662) y Descartes (1596-1650) la llamaron *roulette* (en francés: ruedecilla) y Galileo *cicloide* (del griego κυκλος = rueda, círculo; y ειδος = forma). Galileo (1564-1642), recortó en una chapa el círculo y la parte de superficie comprendida entre un arco de cicloide y el eje sobre el que se desliza, y descubrió que su área era aproximadamente igual a tres veces el área del círculo.

E. Torricelli (1608-1647) consiguió la cuadratura de la cicloide mediante dos caminos diferentes: por el método de los indivisibles de Cavalieri y por el método de exhaustión de Eudoxo de Cnido (s. IV a. C.), descubriendo, además, un método para trazarle una tangente. Publicó estos resultados en 1644 en un libro titulado *De parbole*. Según parece Roverbal había obtenido estos resultados años antes, y como no le citó en la obra aludida le acusó de plagio. Christopher Wren (1632-1723), más conocido como arquitecto (después del incendio de Londres en 1666, por la cantidad de obras que tuvo que proyectar, entre ellas, la catedral de San Pablo) que como matemático, rectificó un arco de la misma, que resultó ser igual a $8r$, donde r es el radio del círculo que rueda, y determinó, además, su centro de gravedad. Christiaan Huygens (1629-1695) descubrió el péndulo cicloidal. Finalmente, Jacques Bernoulli (1654-1705)

estudió la curva que describiría un punto pesado para trasladarse de un punto P a otro Q (no situados en la misma vertical y a distinta altura) en el menor tiempo posible, llamada también la curva del descenso rápido o braquistocrona (del griego *βραχιστος* = lo más corto, y *χρονος* = tiempo, duración), y que resultó ser una cicloide.

Por otro lado, con el Cabri se puede descubrir, sin necesidad del cálculo integral, la longitud de un arco de cicloide, así como el área que encierra. Efectivamente,

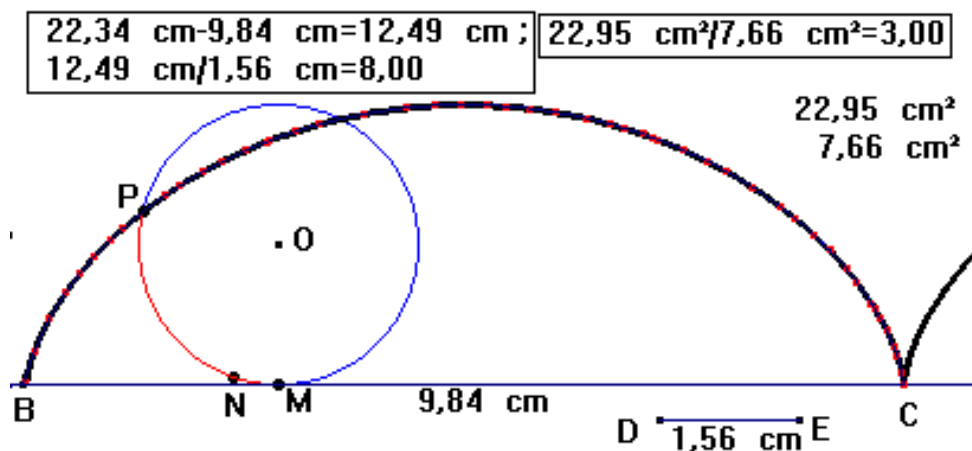


Fig. 12

El Cabri tiene la herramienta medir con la que se pueden calcular longitudes y áreas de polígonos y figuras circulares. En la figura se ha inscrito el polígono BPCB cuyo perímetro es de 22,34 cm, midiendo 9,84 cm el segmento BC. La diferencia entre ambos será, con cierto grado de aproximación, la medida de la longitud del arco de cicloide entre B y C; al compararla con el radio del círculo generador, resultó 8 veces dicho radio.

El cociente entre el área del polígono y el área del círculo dio 3.

Si se hace variar el radio $OM=DE$, los números 8 y 3 se conservaron sensiblemente. Por tanto, podemos concluir que la longitud del arco de cicloide es $8r$ y el área $3\pi r^2$.

La curva base es una trayectoria circular

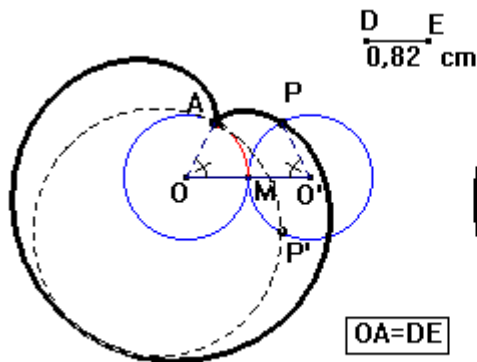


Fig. 13

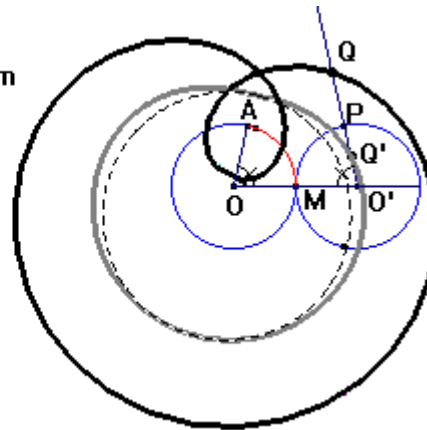


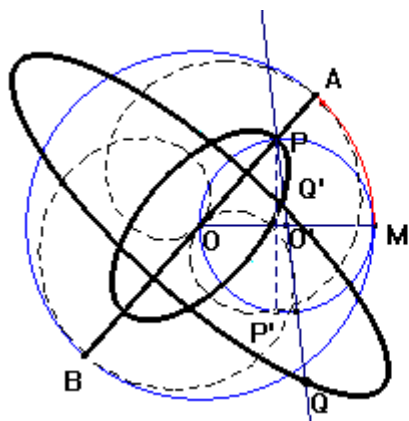
Fig. 14

- ◆ Ambas circunferencias tienen el mismo radio:

La circunferencia exterior rueda sobre la interior que permanece fija. Los lugares obtenidos son *epicicloides*. El arco $MA = \text{arco } MP$. El punto P (fig. 14) engendra un cardioide (epicicloide natural u ordinaria); P', simétrico de P respecto OO' , engendra una circunferencia (punteada en el dibujo); sin embargo, el simétrico de P respecto de O' engendra otro cardioide (no figura en el dibujo). Los puntos Q y Q' engendran, respectivamente, una epicicloide alargada y otra acortada. Los simétricos de Q y Q' respecto de O' , también engendran epicicloides alargadas y acortadas (no figuran en el dibujo).

Todas estas epicicloides reciben también el nombre de caracol (limaçon) de Pascal. Existen otros procedimientos para su obtención, independientemente de las epicicloides (de hecho, se ha logrado ya un cardioide en el ejemplo 3.b).

- El radio r de la circunferencia móvil es la mitad de la fija



ig. 15

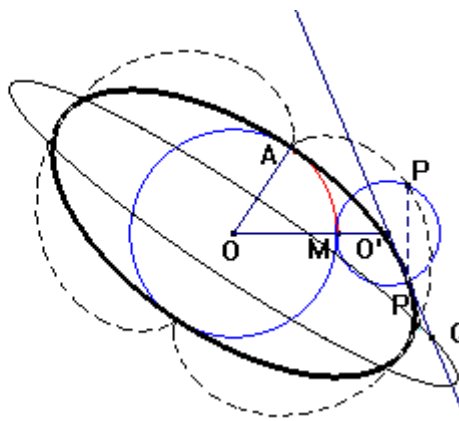


Fig. 16

La circunferencia móvil es interior a la circunferencia fija. Las curvas engendradas son *hipocicloides* (fig. 15). El punto P engendra el diámetro AB cuando se pica en M (previamente hay que activar, en este orden, l. g. y los puntos P y M); P', simétrico de P respecto de OM, genera otra hipocicloide que coincide con una rosácea de ecuación $\rho = R \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, donde R es el radio de la circunferencia fija y φ el ángulo MOA. Un punto genérico Q de la recta PO' genera elipses cuando es arrastrado a lo largo de la misma. Si el punto Q es exterior a la circunferencia de centro O', se forman hipocicloides alargadas; pero si es interior, las hipocicloides son acortadas. La epicloide, generada por P, fig. 16, recibe el nombre de *nefroide* (del griego: *νεφρος* = riñón).

- ◆ El radio R de la circunferencia fija es triple de la móvil: $R=3r$

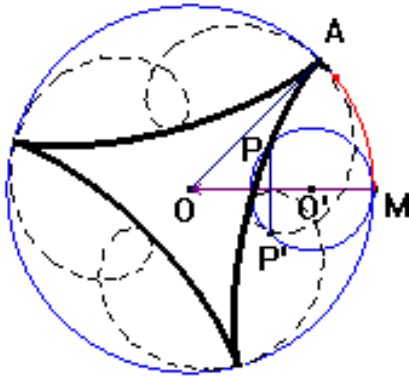


Fig. 17

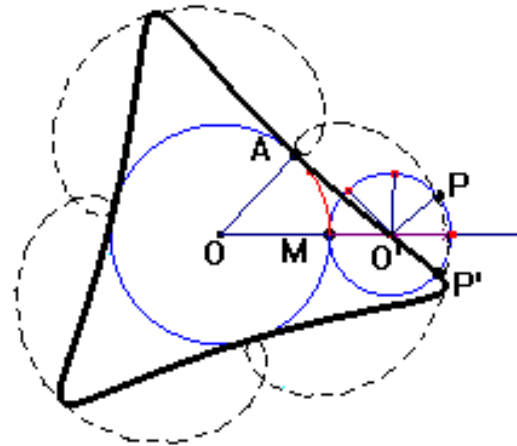


Fig. 18

Las hipocicloides normales, producidas por puntos pertenecientes a la circunferencia móvil (fig. 17); la generada por el punto P se denomina hipocicloide natural de Steiner, *deltoide(s)*, o hipocicloide de tres retrocesos. Lo mismo sucede con las epicicloides (fig. 18). Si se desea determinar las alargadas o las acortadas, basta con situar puntos en la recta PO' o $P'O'$, para las primeras fuera de la circunferencia de centro O' y para las segundas dentro de la misma.

◆ El radio de la circunferencia fija es el cuádruple de la móvil: $R=4r$

Fig. 19

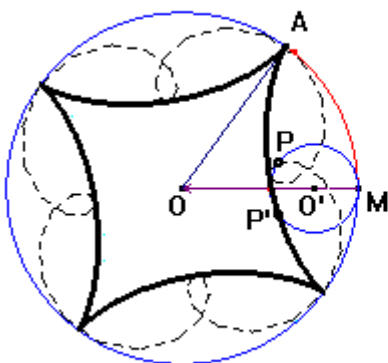
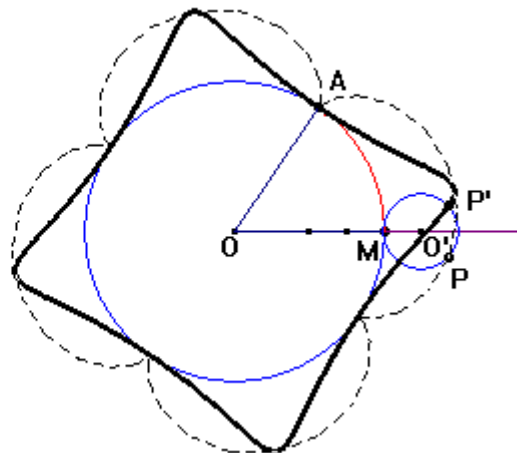


Fig. 20



En la fig. 19 aparecen dos hipocicloides. La generada por P' es un astroide. En la fig. 20 se presentan las epicicloides engendradas por P y P' . Para obtener estos lugares se sigue el mismo proceso que en los casos anteriores: arco MA se lleva MP por transferencia de medidas. Se activan, en este orden, l. g., punto P (o P') y, finalmente, M .

◆ Caso general

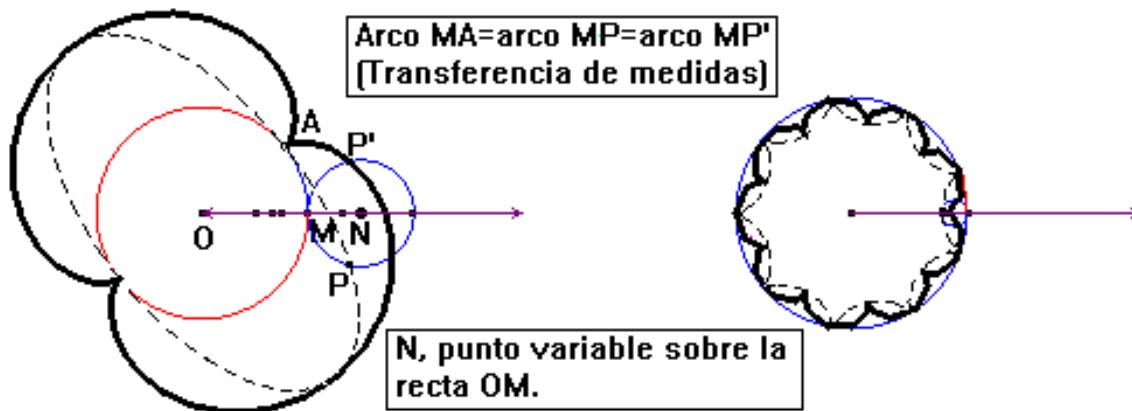


Fig. 21

Fig. 22

Todas las curvas correspondientes al apartado 2 de las curvas cicloides, se pueden generar eligiendo un punto genérico N sobre la recta OM . Se toma como centro de la circunferencia móvil, se calcula P (o P') por el procedimiento ya descrito, se elige un punto cualquiera de la recta PN (o $P'N$), determina su l. g. y se arrastra el punto N de manera que sea exterior (fig. 21) o interior (fig. 22) a la circunferencia fija.

Para que la figura resultante sea regular; esto es, que esté formada por arcos iguales, se requiere que n sea entero en $\frac{r}{R} = \frac{1}{n}$. Es, además, fácil de demostrar,

que sí $\frac{r}{R} = \frac{p}{q}$, p y q enteros, la curva que se obtiene es algebraica; pero que, si el cociente fuera irracional se trataría entonces de una curva trascendente.

Evolventes de la circunferencia

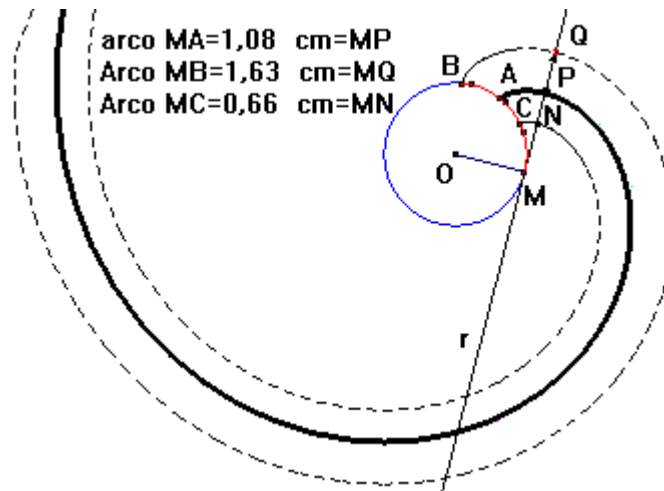


Fig. 23

Como se puede observar en la fig. 23, la recta r es móvil, permaneciendo tangente a la circunferencia fija de centro O . Es el problema inverso al ya tratado para generar la cicloide. El arco MA se lleva, por transferencia de medidas, sobre r a partir de M originándose el punto P . El l. g. de P cuando M recorre la circunferencia es la *desarrollante* de la misma. También se le denomina *evolvente* o *involuta* de la circunferencia; ésta, a su vez, es la *evoluta* del lugar hallado por ser la envolvente de sus normales. Los puntos N y Q engendran otras tantas evolventes de la circunferencia.

Nota: Curiosamente, en la *Geometría Analítica* de Rey Pastor, Santaló y Balanzat, pág. 214, se da como dibujo del cardioide un conjunto de dos

evolventes de la circunferencia, que son simétricas y que parten de un mismo punto. ¡La verdad es que dicho conjunto se parece más a un corazón que la propio cardioide!

Las cónicas como lugares geométricos

Ya hemos visto, anteriormente, l. g. que generan cónicas. Veamos algunos más:

1. Caso en que sólo se generan elipses:

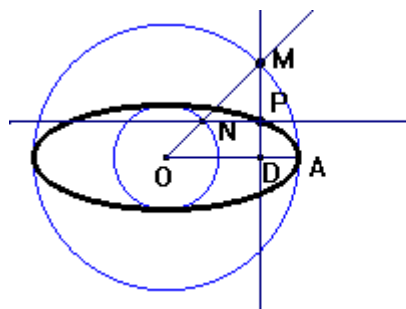


Fig. 24

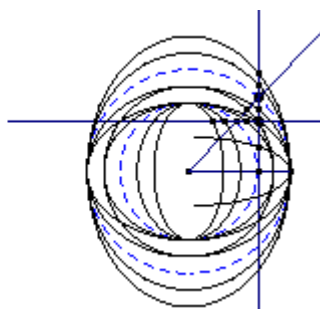
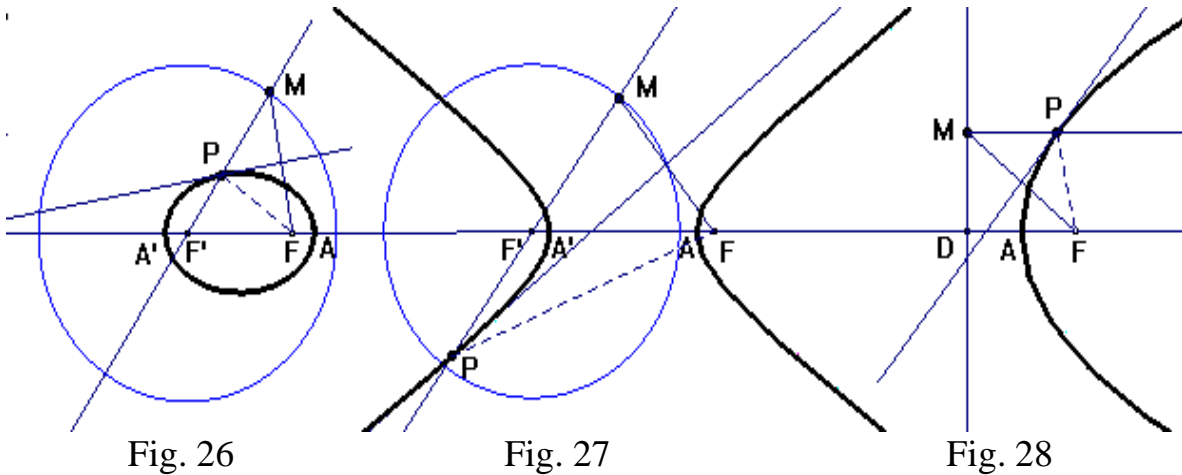


Fig. 25

En la fig. 24 se han dibujado dos circunferencias concéntricas, se ha marcado un punto M en la mayor y seguidamente se ha trazado la semirrecta que une O con M . Por M se ha trazado la perpendicular a OA y desde N la perpendicular MD . El l. g del punto P cuando M recorre la circunferencia mayor es una elipse. Esta figura es la que se usa habitualmente para determinar las ecuaciones paramétricas de la elipse donde los radios de ambas circunferencias son los semiejes y el ángulo MOA el parámetro t .

En la fig. 25 se muestra, además, que los punto medios de los segmentos MP , PD y PN , generan elipses y los simétricos de esos puntos medios respecto de cada uno de los extremos de dichos segmentos y los puntos medios de los nuevos segmentos formados y así sucesivamente.

2. Método general desde el punto de vista métrico (basado en las definiciones elementales de cada una de las tres cónicas).



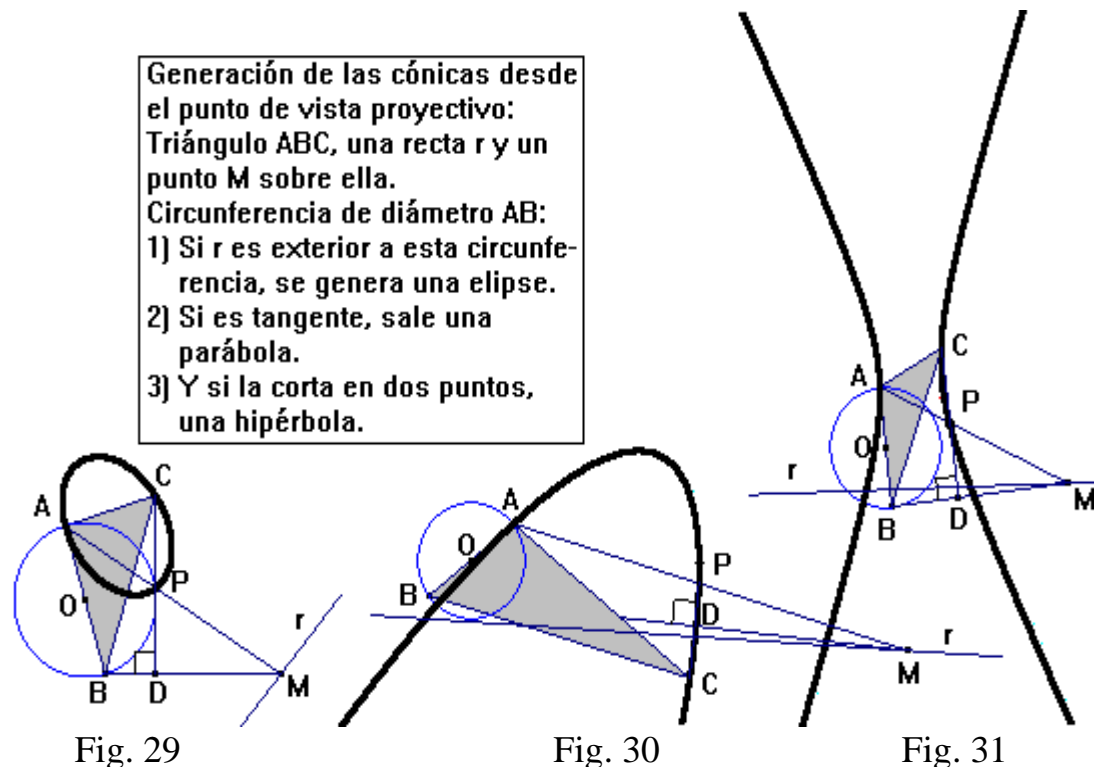
En la fig. 26 se ha trazado la circunferencia focal (la que tiene de radio $2a$) con centro en uno de los focos y se ha elegido un punto arbitrario M sobre la misma. Se ha unido el otro foco con M y se ha trazado la mediatriz del segmento FM . La intersección de la recta PM con dicha mediatriz da el punto P . El l. g. de P cuando M recorre la circunferencia focal es una elipse. En efecto, P es un punto del lugar, pues $PF' + PF = F'M + PM = 2a$, ya que por pertenecer P a la mediatriz equidistará de M y de F .

Al tirar de F con el ratón hacia la derecha (fig. 27) se genera la hipérbola, pues $PF - PF' = PM - PF' = F'M = 2a$.

En la fig. 28, se puede observar que la circunferencia focal es la directriz DM , que se puede considerar como una circunferencia de radio infinito (el otro foco F' se encuentra en el infinito en el caso de la parábola). La construcción es la misma en los tres casos: la recta MF' ha de ser paralela a DF . La mediatriz de FM cortará a MF' en un punto P perteneciente al lugar. El l. g. de P cuando M recorre la directriz es una parábola. Por otro lado, al pertenecer P a la mediatriz,

$PM = PF$, igualdad que coincide con la definición tradicional de parábola: “l. g. de los puntos del plano cuya distancia a una recta fija y a un punto fijo es la misma”.

3. Método general desde el punto de vista proyectivo



Para construir los tres lugares (figs. 29-30-31) basta con situar un punto M en una recta r y unir A y B con M. Seguidamente se traza a BM una perpendicular. La intersección de CD con AM es un punto del l. g. Luego, como siempre, se activa la herramienta l. g. y los puntos P y M. En cada uno de los tres casos aparecerá la cónica correspondiente, de acuerdo con la posición de r con respecto a la circunferencia de diámetro AB.

La herramienta inversión y las cónicas

1. Polo en el centro de la cónica

En este caso sólo se podrán considerar la elipse y la hipérbola. La circunferencia de inversión tiene su centro en O (polo) y está punteada. Para hallar las figuras inversas de cada una de ellas basta con hallar el inverso de P (activando, previamente, la herramienta inversión), respecto de su respectiva circunferencia de inversión (basta con tocarla con el ratón), apareciendo un punto que llamaremos P'. Finalmente, se determina el l. g. de P' cuando P recorre la cónica respectiva.

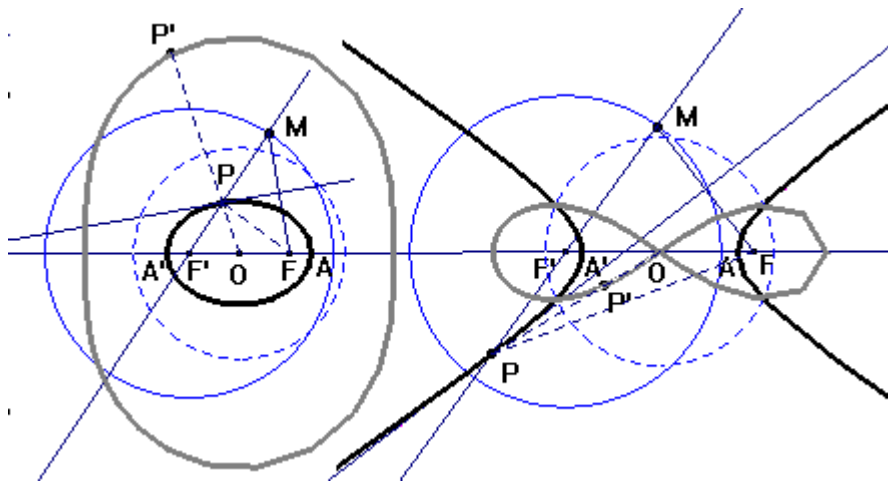


Fig. 32

Fig. 33

En ambos casos, las figuras inversas son *óvalos* de Cassini (fig. 32). En el caso particular de la hipérbola equilátera (fig. 33) la curva de Cassini es una *lemniscata* (del griego *λημνισκος* = lemnisco, cinta o lazo que llevaban las coronas de los atletas vencedores).

2. Cuando el polo coincide con un foco

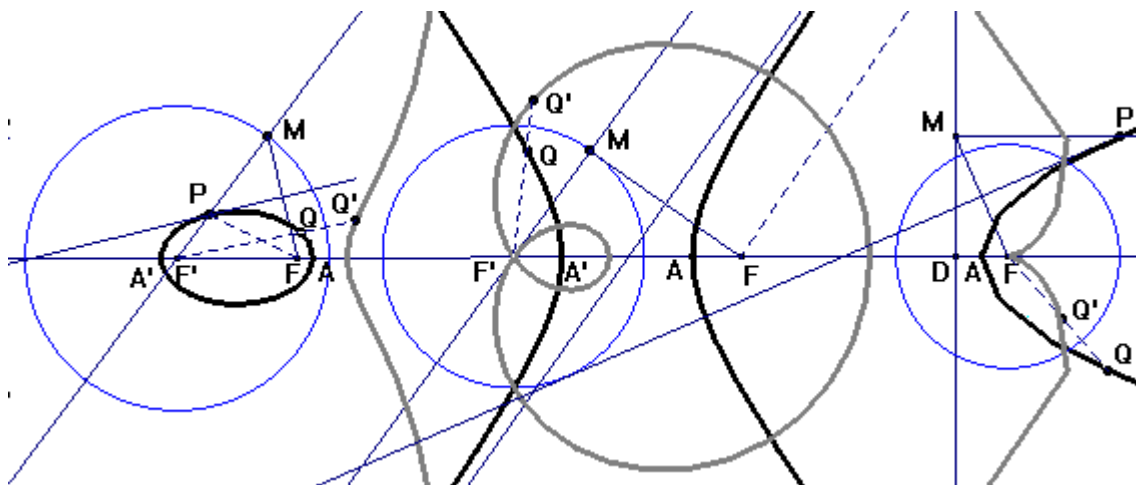


Fig. 34

Fig. 35

Fig. 36

En los tres casos se trata de un caracol de Pascal. En la elipse el caracol está iniciado (fig. 34); pero, en la hipérbola está completo (fig. 35). En el caso particular de la parábola el caracol es un cardioide (sólo iniciada, fig. 36). En las tres figuras, se ha determinado el inverso Q' de un punto cualquiera Q de cada cónica. Para que aparezca la figura inversa basta con hallar el l. g. de Q' cuando Q recorre la cónica respectiva.

3. El polo coincide con un vértice

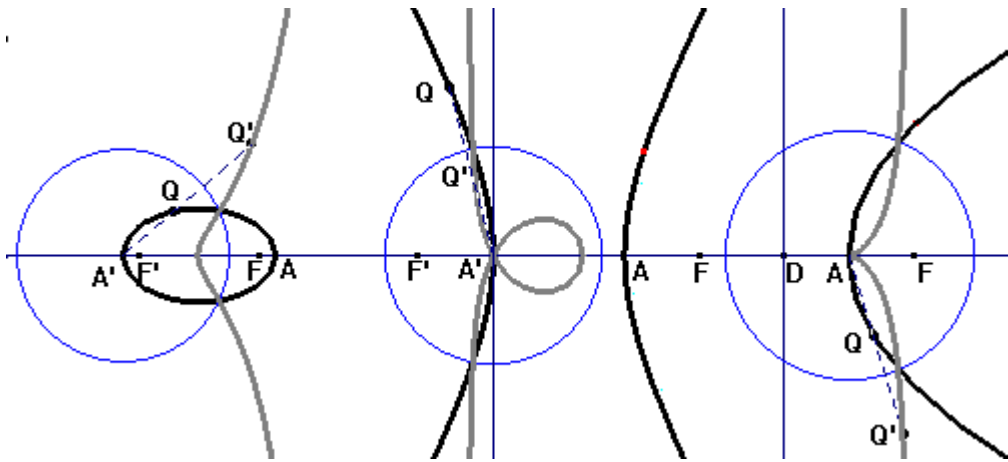


Fig. 37

Fig. 38

Fig. 39

Las inversas de las tres cónicas, representadas en las figs. 37-39, cuando el polo está en un vértice de las mismas, son tres curvas, que se parecen bastante a una de las ramas de las *concoides* de una recta; un estudio analítico demostrará la verdadera naturaleza de estas curvas. En la parábola se trata de una *cisoide*, que estudiaremos más tarde.

Podarias de las cónicas

Se denomina *podaria* de una curva a otra curva formada por los *pies* de las perpendiculares trazadas desde un punto fijo del plano a las tangentes de la primera. El Cabri, nos permite obtener, también, su dibujo, de un modo inmediato, utilizando la herramienta l. g. A modo de ejemplo, vamos a considerar, solamente, las podarias de las cónicas, y, como punto fijo, algunos puntos notables de las mismas.

1. El punto fijo es un punto cualquiera de la directriz (o las directrices)

En la fig. 40, se representa la podaria de la elipse, que es, para el punto Q, un caracol de Pascal oblicuo. En la 41, la de la hipérbola, que es un cuártica,

y, en la 42, la de la parábola, es una *estrofoide* (del griego $\sigma\tau\rho\omicron\phi\omicron\varsigma$ = cordón, lazo), también oblicua.

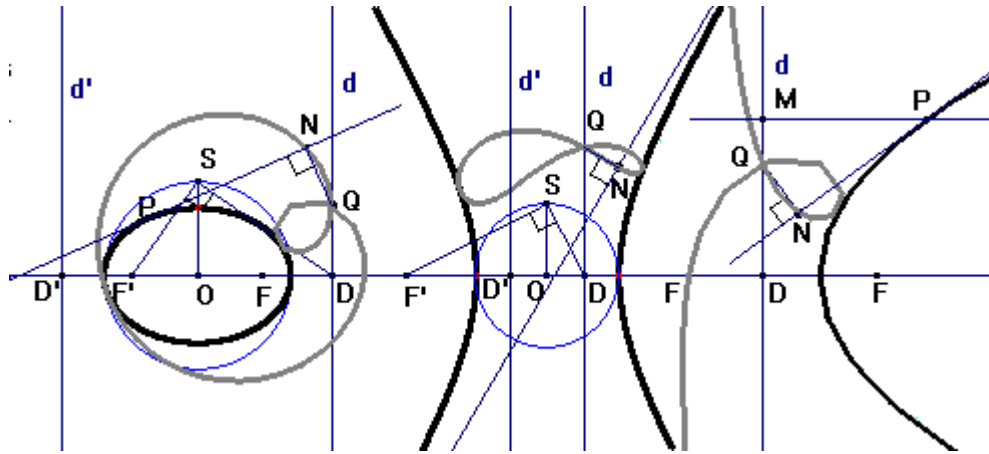


Fig. 40

Fig. 41

Fig. 42

◆ Que el punto Q coincida con D

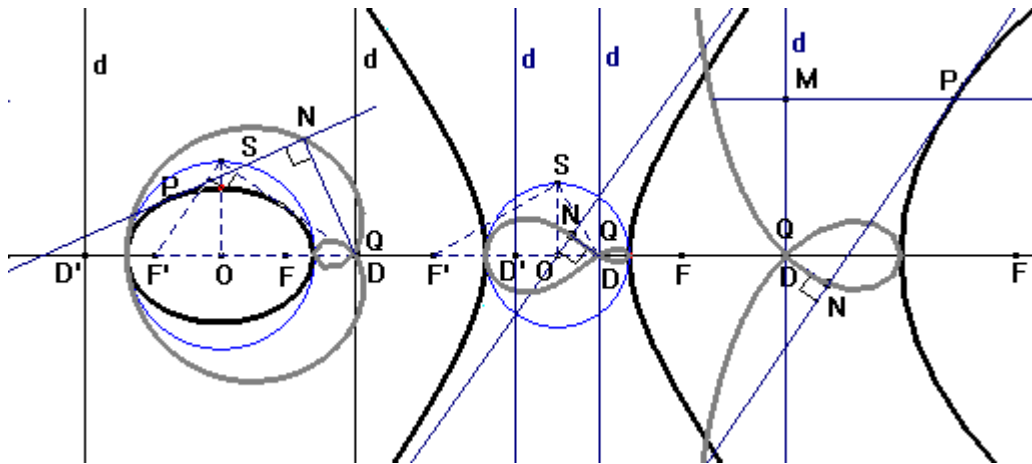


Fig. 43

Fig. 44

Fig. 45

En este caso en que $Q = D$, las tres curvas podarias ya no son oblicuas, sino normales.

2. El polo está en un foco o un vértice

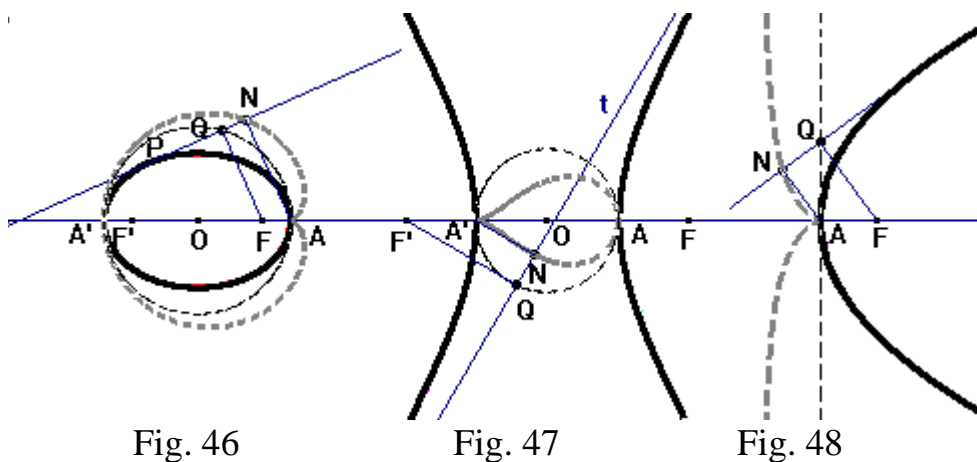


Fig. 46

Fig. 47

Fig. 48

Las podarias de un vértice son, en la elipse (fig. 46), un *cardioide*; en la hipérbola (fig. 47), un óvalo, y, en la parábola (fig. 48) una *cisoide* (del griego: $\kappaισσοειδης$ = hiedra, aludiendo a la forma lobulada de sus hojas). Las podarias de un foco son: la circunferencia principal, en la elipse y en la hipérbola, y, la tangente en el vértice, en la parábola.

Algunas curvas utilizadas en la Antigüedad para resolver los tres famosos problemas clásicos

A partir del siglo V a. C., los matemáticos griegos se preocuparon por resolver, entre otras cuestiones, *la cuadratura del círculo*, *la trisección del ángulo* y *la duplicación del cubo*, usando solamente la regla y el compás. Al fracasar en sus intentos de lograr una solución exacta con dichos instrumentos, ensayaron otras vías, descubriendo así unas curvas que les permitieron resolver con toda exactitud, al menos desde el punto de vista teórico, los tres problemas

ya mencionados. Hablaremos aquí de algunas de estas curvas, que se puedan construir con el Cabrí como lugares geométricos.

1. Trisectriz de Hippias de Elis o cuadratriz de Dinostrato

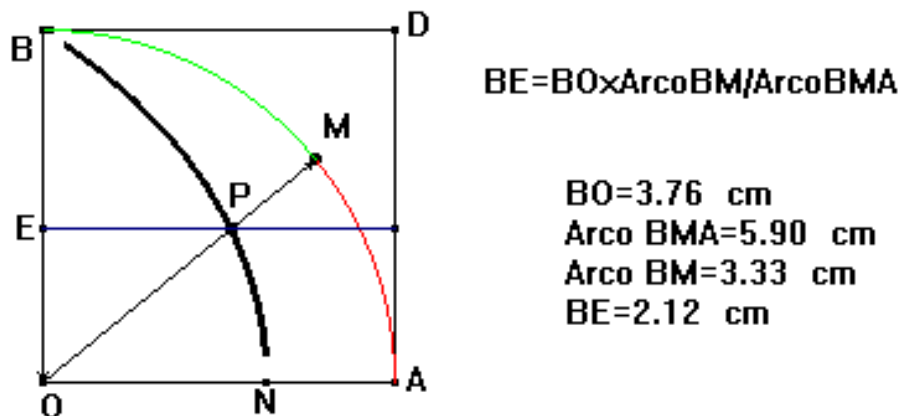
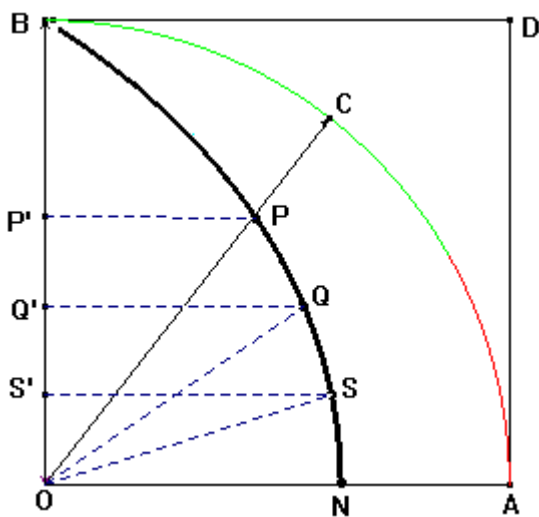


Fig. 49

Hallado el punto P, tal como se indica en fig. 49, basta con aplicar la herramienta l. g. a dicho punto cuando M recorre el arco BMA para obtener la *cuadratriz*. Se define como la curva generada por la composición de dos movimientos uniformes: el del radio OM que gira de OB a OA y el del segmento BD que baja hasta la posición OA. Esta curva fue utilizada por el sofista Hippias de Elis (s. V a. C.) para la trisección del ángulo y por Dinostrato, un siglo más tarde, para la cuadratura del círculo, utilizando la siguiente proporción: arco BMA/r=r/ON, siendo r=OA=OB; hallado BMA=b, construyó un rectángulo de lados 2b y r y , finalmente, el cuadrado equivalente. Menecmo, hermano de Dinostrato, utilizó dos parábolas ($y^2=2ax$, $x^2=ay$), con el vértice común y con los ejes perpendiculares, para resolver el problema de la duplicación del cubo.

Veamos ahora como obtuvo Hippias la trisección de un ángulo:



En la fig. adjunta, AOC es el ángulo que se quiere trisecar. Se coloca tal como indica dicha figura: OC corta a la curva BN en el punto P. La perpendicular a BO determina el punto P'. El segmento P'O se divide en tres partes iguales. El resto de la construcción no necesita explicación. En el dibujo el ángulo $AOC=51.6^\circ$ y $QOP=17.2^\circ$, que se han calculado con la herramienta

Fig. 49 bis

2. Cisoide de Diocles

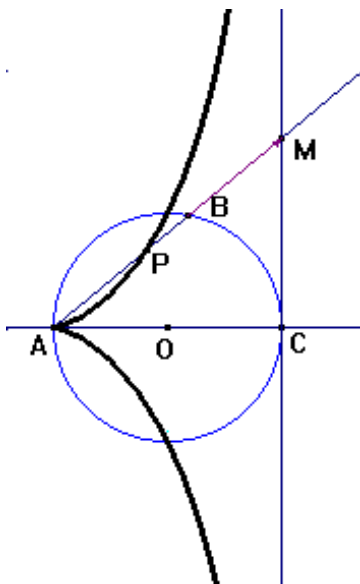


Fig. 50

Construcción:

Como se indica en la figura adjunta sobre la recta perpendicular a AO se traza un punto M arbitrario. Se une A con M, mediante una semirrecta, y se lleva sobre ella, a partir de A, un segmento $AP=BM$. El l.g. del punto P cuando M recorre la recta CM es la cisoide de Diocles (s. II-I a. C.). Este la utilizó para re resolver el problema de la duplicación del cubo.

En la figura siguiente (50 bis) se muestra un caso práctico, utilizando la calculadora que lleva incorporada el Cabri.

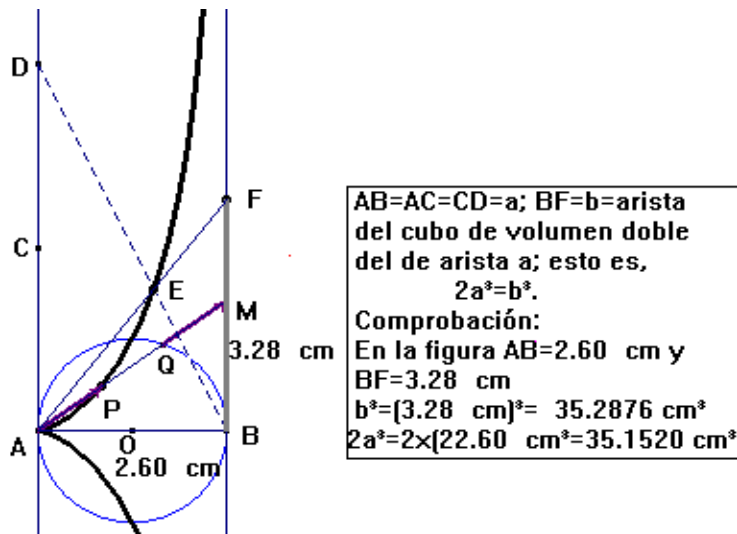


Fig. 50 bis

Esta construcción se justifica mediante la ecuación de la cisoide, que en polares tiene esta forma: $\rho = a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi$, siendo a el diámetro AB y φ el ángulo BAM .

3. Concoide de Nicomedes

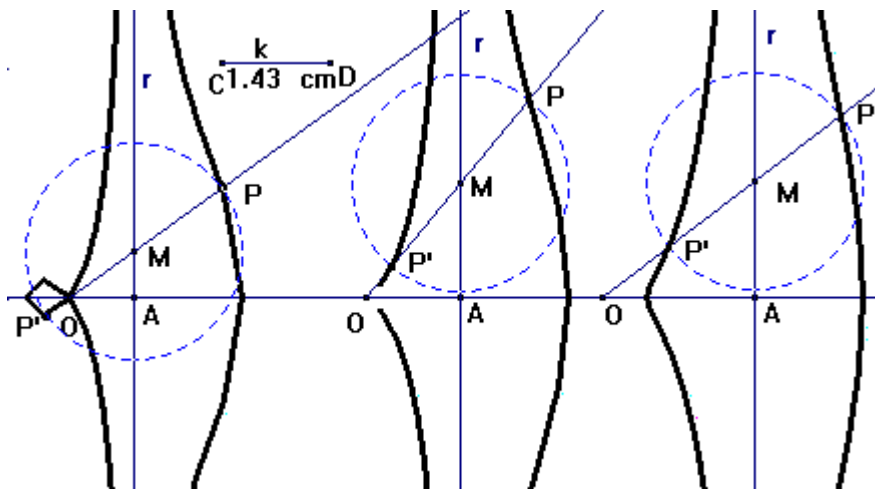


Fig. 51

Fig. 52

Fig. 53

Para la construcción de la concoide (del griego: *κοιχλος* = concha; parte central y abombada del escudo) de la recta o de Nicomedes, se procede del siguiente modo: Por A se traza una recta r perpendicular a OA . Se elige un punto arbitrario M en r . Se une O con M mediante una recta (o semirrecta). Mediante la herramienta compás se lleva a uno y otro lado de M y en la recta OM un segmento constante k , que determina dos puntos P y P' . El l. g. de cada uno de estos puntos cuando M se mueve sobre r dará las dos ramas de cada concoide. En la fig. 51, $OA < k$, en la 52, $OA = k$ y en la 53, $OA > k$.

Nicomedes (s. III-II a. C.), utilizó la concoide para la trisección del ángulo.

4. Espiral de Arquímedes

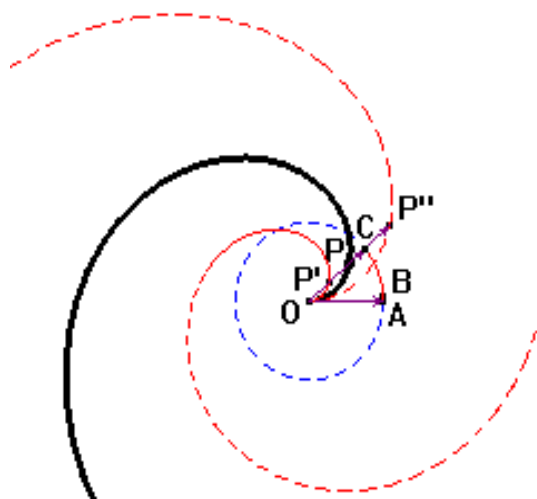


Fig. 54

Construcción:

Sabiendo que la ecuación de la espiral es $\rho = k\theta$, donde $\rho = OP$ y $AOC = \theta$, basta con medir el arco ABC y, por transferencia de medidas, llevar su valor (en la figura 0,78 cm) sobre OC, originando así el punto P.

La herramienta l. g. crea de inmediato la espiral (picando con el ratón en P y, a continuación, en el punto C).

Cada valor racional de k dará una nueva espiral. Los valores $k=1/2$, 1 y 2, originan, respectivamente, los puntos P', P y P''.

Arquímedes (s. III a. C.) utilizó la espiral (fig. 54) para la trisección del ángulo

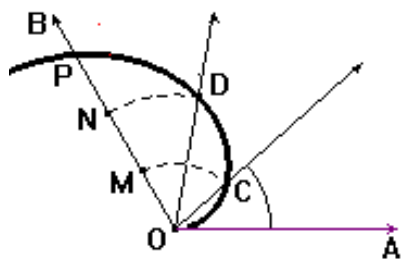


Fig. 55

El ángulo AOB que se quiere trisecar se coloca como indica la figura. Se divide OP en tres partes iguales. Los arcos MC y ND resuelven el problema. $AOB=119,9^\circ$ y $DON=40,0^\circ$

Pero, también, empleó otro método, que no era puramente geométrico, el que aparece en el *Libro de los Lemas*: una *neusis* (del griego $\nu\epsilon\upsilon\sigma\iota\varsigma$ = inclinación; acercamiento). En la fig. 56 se pueden observar los pasos a seguir que resumiremos a continuación: AOB es el ángulo que se quiere trisecar y sobre la recta que pasa por OA se elige un punto arbitrario M. La semirrecta que une M con B corta a la circunferencia de centro O en un punto C. A continuación, se mide el segmento MC. Si la medida de dicho segmento coincide con OA el problema está ya resuelto; pero si es otro valor, habrá que deslizar el punto M

sobre la recta hasta que coincidan los valores de las longitudes de ambos segmentos.

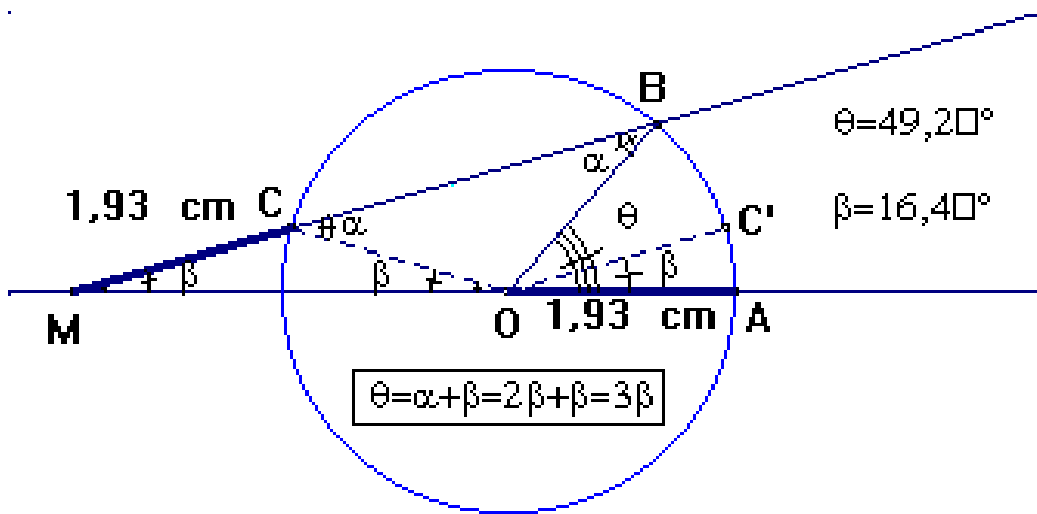


Fig. 56

Consideraciones finales

A lo largo de los párrafos anteriores podemos constatar la potencia del Cabri para determinar, con suma facilidad, todo tipo de lugares geométricos. No sólo se descubren propiedades geométricas, sino que aparecen curvas que jamás se habían sospechado. Claro está que, más tarde, el cálculo analítico se encargará de conseguir las ecuaciones de las mismas, así como confirmar algunas de las conjeturas que puedan establecerse.

Se puede decir, sin temor a equivocarse, que el número de lugares geométricos que se pueden conseguir con el Cabri es innumerable. Por otro lado, cuando tratamos de hallar un posible lugar geométrico, por simple probatura, la emoción que se siente, cuando se desvela el misterio, puede

compararse al placer que sentiría cualquier investigador al descubrir algo, realmente interesante, que no esperaba; pero, además, lo bueno de este método es que el lugar, de existir, aparecería automáticamente.

Queremos animar, a los que tienen olvidada la geometría métrica, a que utilicen el Cabri para, no sólo recuperar lo olvidado, sino, también, incrementar y afianzar aquellos conocimientos que estaban oscuros o que nunca se llegaron a entender.

Finalmente, podemos considerar que el Cabri (al igual que el Geometer's Sketchpad, que tiene, sobre todo, una gran resolución gráfica) es una potente modernización de *El Método* de Arquímedes con el que este famoso matemático descubría propiedades geométricas, que le eran de gran utilidad para sus demostraciones posteriores.

Referencias bibliográficas:

- BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, AUT, Madrid.
- CAJORI, F. (1985): *A History of Mathematics*, 4th edition, Chelsea P. C., USA.
- CÁMARA TECEDOR, S. (1945): *Elementos de Geometría Analítica*, Madrid.
- HEATH, Sir Thomas (1981): *A History of Greek Mathematics*, Vols. I-II, Dover Publications, Inc., New York.
- REY PASTOR, J.; SANTALÓ, L. A.; BALANZAT, M. (1957): *Geometría Analítica*, 2^a reimpresión, Editorial Kapelusz, BB. AA.
- TEXAS INSTRUMENTS: *Cabri-Géomètre II*, Manual.