ISBN: 84-931584-2-9

LOS CUADRADOS MÁGICOS COMO RECURSO DIDÁCTICO

Víctor Manuel Hernández Suárez
María Celia Ríos Villar

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este trabajo se analizan algunos aspectos didácticos relacionados con los cuadrados mágicos (CM). Se realiza una breve retrospectiva histórica de los mismos, al situarlos en otras culturas y mostrar sus vínculos con otras ramas del conocimiento. A través de este recorrido se podrá apreciar que el interés por los CM siempre estuvo presente en la historia desde la antigüedad, y que grandes matemáticos y célebres personajes históricos los han investigado con mucho interés.

Se exponen algunos métodos de construcción de CM, entre los que destacamos el Método del caballo de ajedrez y el Método de la Multiplicación, así como la generación de los mismos a través del programa informático Matlab 5.3. Especial atención es dedicada al CM de Alberto Durero, al resaltar la conexión entre el Arte y las Matemáticas.

Asimismo, se planifican algunas actividades didácticas para potenciar las destrezas y habilidades del estudiante y se fomenta el uso de Internet como fuente inagotable de recursos didácticos.

Abstract

In this work some didactic aspects related with the magic squares (MS) are analyzed. It is carried out a brief one historical retrospective of the same ones, when locating them in other cultures and to show their bonds with other branches of the knowledge. Along this journey one will be able to appreciate that the interest for the MS has been present in the history from the antiquity, and that big mathematical and historical characters have been interested in them.

Some methods of construction of MS are exposed, among those that highlight the Method of the chess horse and the Method of the Multiplication, as well as the generation of the same ones through the computer program Matlab 5.3. Special attention is dedicated to Albert Dürer's MS, when standing out the connection between the Art and the Mathematics.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA II
V. Hernández; Mª C. Ríos (2000*). Los cuadrados mágicos como recurso didáctico, pp. 129-148*

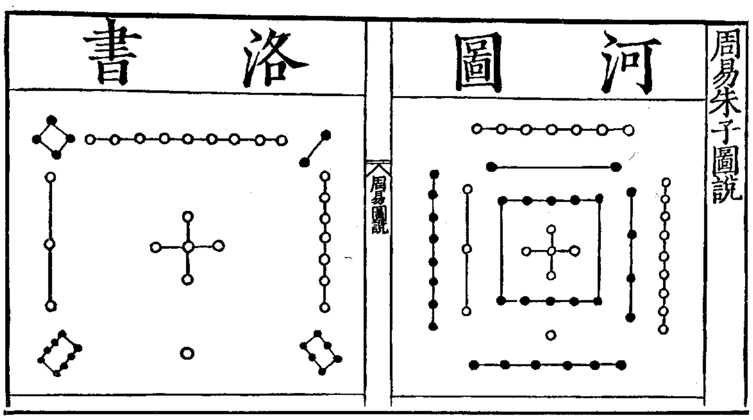
Also, some didactic activities are planned for projecting the skills and the student's abilities and it is fomented the use of Internet like inexhaustible source of didactic resources.

Consideraciones generales

Un cuadrado mágico (CM) es una ordenación de n^2 números naturales, dispuestos en n filas y n columnas, de forma que la suma de los números de cada fila, columna o diagonal sea siempre la misma. Este valor fijo se denomina "Constante mágica" del cuadrado. El número de casillas de una línea (fila, columna o diagonal) es el "Orden" o "Módulo" del cuadrado. El valor de la constante mágica viene dado por:

$$\boxed{C = n(n^2 + 1) / 2}$$

Los cuadrados mágicos han fascinado a la humanidad durante muchos siglos y son numerosos los matemáticos que los han investigado. Era muy natural que los antiguos observaran virtudes mágicas en las especiales características de estas figuras. Los matemáticos chinos, que vivieron hace 23 siglos, ya los conocían. Al parecer, ellos fueron los primeros en descubrirlos. En la introducción a la edición Chou del Yih King, se encuentran algunos diagramas aritméticos y entre ellos el Lo-Shu, el pergamino del río Lo, donde se refleja un cuadrado mágico de orden 3.



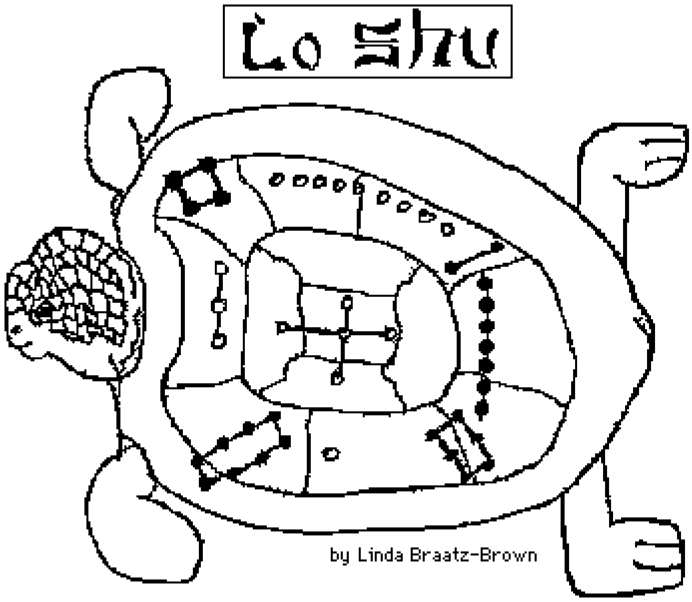
El pergamino de Lo *El mapa de Ho*

En este cuadrado, todos los números impares se expresan mediante puntos blancos, esto es los símbolos yang, el emblema del cielo; mientras que los números pares vienen representados por puntos negros, los símbolos yin, que reflejan el emblema de la tierra. El descubrimiento del pergamino se atribuye a Fuh-Hi (2858-2738 A.C.), el mítico fundador de la civilización china. En la figura anterior, al lado del pergamino, se puede observar el mapa de Ho. Este mapa contiene cinco grupos de figuras impares y pares, los números del cielo y la tierra respectivamente.

El modelo de este cuadrado mágico es:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La constante mágica vale 15. Este cuadrado mágico se sigue utilizando en China como protección contra los malos espíritus. Según la leyenda, este cuadrado apareció dibujado sobre la espalda de una tortuga en el río Lo.



En la India, se solían llevar los CM como amuletos. Los sabios árabes afirmaban que los CM servían para prevenir ciertas enfermedades. Un CM de plata, colgado al cuello, evitaba el contagio de la peste, según ciertas tribus. Los antiguos magos del Imperio Persa, practicantes de la medicina, pretendían curar las enfermedades aplicando a la parte enferma del cuerpo un CM.

El método del caballo de ajedrez

Un método para la construcción de cuadrados mágicos de orden impar n mayor que 3, consiste en aplicar las siguientes reglas de construcción:

1. Se inicia el proceso dibujando una cuadrícula con 49 celdas o casillas; cuando queramos construir un cuadrado de orden 7. El número 1 se coloca en cualquier casilla, en nuestro caso lo situaremos en la parte inferior del cuadrado, segunda casilla por la izquierda:

	1					

2. Los siguientes números los vamos colocando siguiendo los movimientos de un caballo de ajedrez. Seleccionamos de todos los posibles movimientos del caballo, el movimiento consistente en trasladarse dos casillas arriba y una casilla a la derecha.

		2				
	1					

3. Cuando uno de estos movimientos saca el número del cuadrado por la parte superior, se sitúa en el cuadrado en la misma columna que le correspondería en la parte inferior. Si el número sale del cuadrado por la zona derecha, se coloca a la izquierda en la misma fila. Si un movimiento hace que el número del cuadrado se salga por la esquina, se sitúa en el cuadrado como si estuviera en un cuadrado imaginario que se superpone al que deseamos construir.
4. Cuando la celda donde se debe colocar el número esté ocupada, éste se pone debajo del último número que se haya escrito.

	9			4	21	
7	17			12		
8			3	20		
16			11			6
		2	19			14
		10			5	15
	1	18			13	

Se finaliza el proceso y se comprueba que el cuadrado obtenido es mágico. La constante mágica C es 175.

48	9	26	36	4	21	31
7	17	34	44	12	22	39
8	25	42	3	20	30	47
16	33	43	11	28	38	6
24	41	2	19	29	46	14
32	49	10	27	37	5	15
40	1	18	35	45	13	23

Como aplicación de este método se propone la actividad didáctica denominada "**PUZZLE MÁGICO**":

Aquí tienes un reto muy divertido. Completa el CM de orden 5, situado debajo, con los restantes números naturales del 1 al 25. La suma de los elementos de cada línea es 65. Un número se puede usar solamente una vez. Emplea el método del caballo de ajedrez.

			19	
			25	
22	10	18	1	14
			7	
			13	

Producto de cuadrados mágicos

Otra forma de construir nuevos cuadrados mágicos es a partir del producto de dos cuadrados previamente dados. Se comienza este apartado planificando una actividad didáctica sobre la multiplicación de cuadrados mágicos.

Objetivos: [NCTM Grados 5-8 Stándares 2, 3, 4, 5, 7 y 8]

1. Trabajar con series de números.
2. Calcular y comparar sumas de números en el contexto de los cuadrados mágicos.
3. Aprender métodos para multiplicar cuadrados mágicos.

Materiales:

1. Retroproyector.
2. Ordenador.
3. Folios en blanco.
4. Transparencias.
5. Reglas.
6. Calculadoras.

El paso siguiente consiste en seleccionar arbitrariamente dos cuadrados mágicos, A y B. El primero, A, de orden 3 y el segundo, B, de orden 4, con 9 y 16 celdas respectivamente.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

B

El producto, A*B, será un cuadrado mágico de orden 12. La demostración de la existencia de cuadrados mágicos, para un orden arbitrariamente grande, es debida a A. Makowski en 1962. Si se tienen dos cuadrados mágicos C_n y C_m de órdenes n y m, respectivamente, se puede obtener un cuadrado mágico de orden n x m. Esto se puede hacer al sustituir el cuadrado C_n por cada número i del cuadrado C_m tal que el número,

$$n^2 (i-1)$$

se sume a cada número del cuadrado C_n . Es fácil ver que el cuadrado así obtenido es un cuadrado mágico de orden n x m.

La nueva constante mágica C es:

$$\boxed{(1/2)[\, mn(n^2+1) + n^3 m(m^2-1)\,]}$$

De esta forma, se obtiene:

$$\boxed{C_n * C_m = C_{nm}}$$

En nuestro caso, la constante mágica, C, del cuadrado de orden 12, vale 870.

Es más fácil visualizar el producto de los dos cuadrados mágicos si descomponemos el cuadrado de orden 12 en bloques de 3 x 3.

Se tienen 4 x 4 (el tamaño de B) bloques de 3 x 3 (el tamaño de A) cuadrados.

El plan básico es construir una gran cuadrícula vacía, de orden 4, y rellenar cada una de sus celdas vacías con cuadrados mágicos de orden 3.

Nos fijamos en el cuadrado B y observamos que el número 1 ocupa la casilla superior izquierda. El primer paso consiste en poner el cuadrado A , en la nueva cuadrícula, en la misma posición.

8 1 6 3 5 7 4 9 2			

El primer cuadrado A, contiene los números del 1 al 9, y lo podemos considerar como un modelo para situar los 9 primeros números.

El paso 2 consiste en situar los 9 próximos números (del 10 al 18) de la misma forma que en el cuadrado A, y se obtiene el siguiente cuadrado:

17	10	15
12	14	16
13	18	11

Este nuevo cuadrado, de orden 3, también es mágico y lo situaremos en la parte inferior, tercera casilla de izquierda a derecha, o sea en la misma posición que está situado el número 2 en el cuadrado B. De esta manera, se obtiene el supercuadrado:

8	1	6									
3	5	7									
4	9	2									
						17	10	15			
						12	14	16			
						13	18	11			

Si se reitera el proceso, se obtendrá el siguiente supercuadrado de orden 12, dividido en bloques de cuadrados de orden 3:

8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79
103	108	101	49	54	47	58	63	56	76	81	74
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137

Y, de esta forma, se obtiene como producto de los cuadrados A y B el cuadrado de orden 12 siguiente:

8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79
103	108	101	49	54	47	58	63	56	76	81	74
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137

Generación de cuadrados mágicos con MATLAB

El programa informático Matlab 5.3 (Math Works Inc.) incluye una función llamada "magic", tal que magic(n) nos proporciona un cuadrado mágico de orden n. Tres algoritmos diferentes son usados: uno para n impar, otro para n = 4m y finalmente otro para n = 4m+2. Así, se han obtenido los siguientes cuadrados mágicos de órdenes 3 hasta 11:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

16	5	9	4
2	11	7	14
3	10	6	15
13	8	12	1

17	23	4	10	11
24	5	6	12	18
1	7	13	19	25
8	14	20	21	2
15	16	22	3	9

35	3	31	8	30	4
1	32	9	28	5	36
6	7	2	33	34	29
26	21	22	17	12	13
19	23	27	10	14	18
24	25	20	15	16	11

30	38	46	5	13	21	22
39	47	6	14	15	23	31
48	7	8	16	24	32	40
1	9	17	25	33	41	49
10	18	26	34	42	43	2
19	27	35	36	44	3	11
28	29	37	45	4	12	20

64	9	17	40	32	41	49	8
2	55	47	26	34	23	15	58
3	54	46	27	35	22	14	59
61	12	20	37	29	44	52	5
60	13	21	36	28	45	53	4
6	51	43	30	38	19	11	62
7	50	42	31	39	18	10	63
57	16	24	33	25	48	56	1

47	57	67	77	6	16	26	36	37
58	68	78	7	17	27	28	38	48
69	79	8	18	19	29	39	49	59
80	9	10	20	30	40	50	60	70
1	11	21	31	41	51	61	71	81
12	22	32	42	52	62	72	73	2
23	33	43	53	63	64	74	3	13
34	44	54	55	65	75	4	14	24
45	46	56	66	76	5	15	25	35

92	98	4	85	86	17	23	79	10	11
99	80	81	87	93	24	5	6	12	18
1	7	88	19	25	76	82	13	94	100
8	14	20	21	2	83	89	95	96	77
15	16	22	3	9	90	91	97	78	84
67	73	54	60	61	42	48	29	35	36
74	55	56	62	68	49	30	31	37	43
51	57	63	69	75	26	32	38	44	50
58	64	70	71	52	33	39	45	46	27
40	41	47	28	34	65	66	72	53	59

68	80	92	104	116	7	19	31	43	55	56
81	93	105	117	8	20	32	44	45	57	69
94	106	118	9	21	33	34	46	58	70	82
107	119	10	22	23	35	47	59	71	83	95
120	11	12	24	36	48	60	72	84	96	108
1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121
14	26	38	50	62	74	86	98	110	111	2
27	39	51	63	75	87	99	100	112	3	15
40	52	64	76	88	89	101	113	4	16	28
53	65	77	78	90	102	114	5	17	29	41
66	67	79	91	103	115	6	18	30	42	54

Cuadrado mágico de Alberto Durero

En 1514, el pintor alemán Alberto Durero (Nurenberg, 1471-1528), pintó un grabado, denominado “Melancolía”, que incluía un cuadrado mágico de orden 4, cuya constante mágica era 34. En la fila inferior del cuadrado situó los números “15” y “14” en casillas contiguas, para revelar, probablemente, la fecha de su grabado. Este cuadrado mágico tiene muchas propiedades interesantes que no son compartidas por los cuadrados mágicos en general. Entre estas podemos citar las siguientes:

1. Los cuatro números de las esquinas (16, 13, 4, 1) suman 34.
2. La suma de los cuatro números del centro (10, 11, 6, 7) es 34.
3. Los cuatro cuadrados de las esquinas [(9, 6, 4, 15), (7, 12, 14, 1), (16, 3, 5, 10), (2, 13, 11, 8)] suman 34.
4. El 3 y el 2 en la fila superior y sus simétricos en la fila inferior, 15 y 14, suman 34.

A continuación se muestran el cuadrado mágico de orden 4*4 y el grabado de Durero.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En la parte superior derecha del grabado podemos observar el cuadrado mágico de orden 4. “Melancolía”, realizada por Durero en el año de la muerte de su madre, representa un “autorretrato espiritual” del artista,

cuya genialidad les lanza a las simas de la melancolía. Este cuadrado mágico puede considerarse como el primero aparecido en Occidente.

Actividad didáctica en Internet

Objetivos: [NCTM Grados 5-8 Stándares 4 y 8]

1. Aprender la definición de cuadrado mágico.
2. Conocer la evolución histórica de los cuadrados mágicos.
3. Experimentar los aspectos artísticos de los cuadrados mágicos.

Materiales:

Método 1: Si los estudiantes tienen acceso a Internet, la actividad puede ser estructurada visualizando los links (enlaces) que aparecen en la página Web de Suzanne Alejandre:
http://www.forum.swarthmore.edu/alejandre/magic.square.html

Método 2: Preparar el retroproyector para usar transparencias y/o fotocopias antes de presentar la actividad, donde se incluyan todos los links relacionados con el cuadrado mágico de Durero, los antecedentes históricos, las cuadrículas de orden 4 x 4 y el grabado.

Para ambos Métodos, 1 y 2, se necesita:

1. Papel en blanco
2. Transparencias en blanco y rotuladores
3. Reglas

Procedimientos:

Al visualizar el cuadrado mágico de Durero, se pueden efectuar las siguientes cuestiones.

Cuestiones Históricas:

1. ¿En qué año pintó Alberto Durero el grabado "Melancolía"?
2. Después de leer en la Web el perfil histórico de Durero, ¿por qué piensas que incluyó un cuadrado mágico en su grabado?
3. Si fueras a construir un cuadrado mágico que incluyera el año 1998, ¿qué tamaño debería tener la cuadrícula?

Cuestiones Numéricas:

1. ¿Qué magia ves en la ordenación de los números en un cuadrado de orden 4?
2. ¿Cuál fue el primer número que usó Durero?
3. ¿Cuál fue el último?
4. ¿Cuántos números tiene el cuadrado?

5. ¿Hay algún número repetido?
6. ¿Cuál es la suma de los números en la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª filas?
7. ¿Cuál es la suma de los números en la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª columnas?
8. ¿Cuál es la suma de los números en cada una de las diagonales?

Conexiones curriculares con la ESO

En este trabajo se han tratado los objetivos generales del área de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) siguientes, recogidos en el Decreto 310 / 1993 de diciembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (BOC de 28 de enero de 1994):

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
3. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.
7. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.

8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.
9. Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
10. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las Matemáticas.

Referencias bibliográficas

ALEJANDRE, S. (1996). *Magic Squares*, http:// www. forum.swarthmore.edu/alejandre/magic.square.html

ANDREWS, W.S. (1960). *Magic Squares and cubes*. Dover. New York.

CARLAVILLA, J.L. y FERNÁNDEZ, M. (2000). *Construcciones y Aplicaciones didácticas de los cuadrados mágicos I, II*. Proyecto Sur. Granada.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES DEL GOBIERNO DE CANARIAS (1996). *Currículo de la ESO*.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). USA: http://www.nctm.org/standards

SIERPINSKI, W. (1988). *Elementary Theory of Numbers*. North-Holland Mathematical Library, Vol. 31. Amsterdam.

TAHAN, M. (1981). *El hombre que calculaba*. Verón. Barcelona.