

LA ADQUISICIÓN DEL LENGUAJE ALGEBRAICO. ELEMENTOS ORGANIZADORES DE UNA INVESTIGACIÓN

M.^a Mercedes Palarea
Martín M. Socas

Universidad de La Laguna

Resumen:

En este artículo se plantea como problema el estudio de las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual implicadas en los procesos de adquisición y uso del Lenguaje Algebraico y también del uso y comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados en dos tópicos concretos: expresiones algebraicas y ecuaciones lineales, con alumnos de 12-14 años.

El estudio central del trabajo indicado se realiza con la finalidad de tener elementos suficientes para elaborar una propuesta curricular para la enseñanza/aprendizaje del álgebra en el primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Planteado el problema de investigación y formulados los objetivos se establece un marco teórico local y un sistema categorial donde el problema es analizado, para finalizar aportando algunas consideraciones relativas a la adquisición del Lenguaje Algebraico en este ciclo educativo.

Abstract

In this work the operational and conceptual cognitive abilities of students aged 12-14 years given to questions concerning the acquisition and use of algebraic language, on one hand, and the use and understanding of registers or systems of representaton in the case of algebraic expressions and linear equations, on other hand, are analyzed.

The goal of this research is to get information enough to elaborate a curriculum for the teaching/learning of algebra in the first cycle of the Secondary School.

From this perspective we designed a local theoretical framework and a Categorical System.

Finally the paper will present some of the considerations relating to early stages concerning to the acquisition of algebraic language in this educative cycle.

La investigación en Lenguaje Algebraico

Las diferentes investigaciones en Lenguaje Algebraico siguen actualmente buscando respuestas a los interrogantes planteados por Kieran en 1992 en torno a la naturaleza del álgebra y a los procesos de pensamiento implicados, ya que las dificultades que la enseñanza/aprendizaje del álgebra escolar ha generado ha sido enorme, tanto desde la perspectiva del investigador como del profesor y los problemas que plantea no han sido resueltos y lo que debe ser enseñado y aprendido en Álgebra sigue aún por determinar.

El propósito general de esta investigación que presentamos es determinar las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), para comprender y trabajar con objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico, siendo uno de los objetivos finales elaborar, en el marco de los resultados obtenidos, una Propuesta Curricular para el lenguaje algebraico.

El problema en el que centramos la investigación tiene que ver, por tanto, con:

- La detección de dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos de la ESO para comprender y trabajar con objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico.
- El estudio de las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico.
- El estudio del uso y comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados en dos tópicos concretos: expresiones algebraicas y ecuaciones lineales.

En el estudio del lenguaje algebraico se aborda el problema desde una perspectiva global, donde el conocimiento algebraico puede ser representado bajo diferentes registros semióticos, aceptando que las

operaciones de cambio entre ellos constituye una operación cognitiva básica y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios semiótico, estructural y autónomo. Es en este desarrollo donde debemos entender la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del álgebra.

Las dificultades asociadas al aprendizaje del lenguaje algebraico de los alumnos de la ESO no ofrecen duda. Estas dificultades se traducen en errores y éstos se producen por causas muy diversas. Es útil, desde la perspectiva de la investigación y de la enseñanza-aprendizaje, tener elementos de análisis de estos errores, para determinar la naturaleza de los mismos, entender al alumno, descubrir sus conocimientos subyacentes y diseñar tareas que apoyen la construcción del pensamiento algebraico.

Centrándonos en la búsqueda de las causas que originan las dificultades en el inicio del aprendizaje del álgebra, se estudian, por una parte, las operaciones, procesos y estrategias que realiza el sujeto cuando aprende o sea cuando adquiere, organiza, elabora y recupera conocimientos del lenguaje algebraico, y por otra, el potenciar el control y la toma de conciencia de los procesos cognitivos del alumno en el aprendizaje de dicho lenguaje. De ahí que consideremos que la falta de habilidad de los estudiantes en la adquisición del lenguaje algebraico puede estar relacionada con múltiples factores.

Se plantea como problema concreto el estudio de las habilidades cognitivas en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y también del uso y comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados en dos tópicos concretos: expresiones algebraicas y ecuaciones lineales.

Es necesario conectar los dos caminos esenciales del objeto algebraico, las habilidades cognitivas de carácter operacional y las habilidades cognitivas de carácter conceptual, y se investiga en el ámbito escolar habitual de alumnos de 12-14 años, "explorando" el acercamiento al lenguaje algebraico, subrayando las posibilidades que aparecen al introducir nuevos recursos de enseñanza e instrumentos de observación.

Por tanto, la investigación de estos tópicos, expresiones algebraicas y ecuaciones lineales, tiene que considerar el aprendizaje de los conceptos como el resultado de las relaciones entre el contenido, el alumno y el profesor, y todo ello dentro de un contexto social pues no se puede olvidar su influencia.

Para dar respuesta a un estudio de esta naturaleza la investigación se plantea tres objetivos principales:

- ◆ Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (HCCO) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (HCCC) más relevantes), del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años.
- ◆ Estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico.
- ◆ Elaborar una propuesta curricular "global" del álgebra que facilite el inicio del aprendizaje del álgebra.

Marco conceptual

El problema y los objetivos de la investigación se desarrollan en un marco conceptual, que en este caso se realiza considerando los signos con significado algebraico, la noción de comprensión y los sistemas de representación y las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra.

Los signos con significado algebraico

Para que el método algebraico se pueda incorporar como algo natural, es necesario que, además de cambiar los símbolos, se produzca un cambio en su significado, es decir, que no se haga solamente una sustitución de los números por letras, sino que se realice el paso de números a variables y para ello hay que realizar un cambio, tanto de símbolos como de significado. A menudo, el cambio se produce únicamente en los símbolos y sólo se realiza el paso de números a letras.

Es evidente que la aplicación del álgebra a problemas es difícil para muchos alumnos y es preciso hallar formas para que los alumnos sean capaces de manifestar esas dificultades y éstas puedan ser discutidas.

Muchas de las dificultades son debidas a la significación que poseen las letras, siendo una de las mayores dificultades con que se encuentran los alumnos, la del uso y significado de las mismas, y de ahí que se piense que las dificultades del álgebra se deben a la naturaleza abstracta de los elementos utilizados (Collis, 1975).

El nivel de comprensión del Álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras. Küchemann (1981) señala que las consideraciones acerca de la comprensión del Álgebra de los números implican el desarrollo de las habilidades de interpretar y manipular letras y otros símbolos y hace una clasificación de las distintas interpretaciones dadas a las letras por los niños. Identifica seis categorías en el uso de las letras: 1) evaluada; 2) ignorada, no utilizada; 3) como objeto; 4) como incógnita específica; 5) como número generalizado y 6) como variable. Las categorías 4, 5 y 6 podrían representar diferentes usos teóricos de las letras en álgebra, mientras que las categorías 1, 2 y 3, podrían estar indicando maneras que tiene los niños de interpretar las letras, dificultando así la comprensión teórica formal implícita en el tópico.

Con referencia al signo igual ($=$), sabemos que hay muchas situaciones en las que las notaciones algebraicas y aritméticas tienen apariencia similar pero significados muy diferentes. Esto hace que sea muy difícil distinguir unas de otras. En el caso del signo igual las repercusiones didácticas tienen mucha importancia. En aritmética se entiende como una acción física. Es usado para conectar un problema con su resultado numérico; se utiliza casi siempre con carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado numérico.

Los alumnos trasladan a veces este significado del signo “ $=$ ” al álgebra y lo confunden con el “ $=$ ” de la ecuación.

En lo que se refiere a la maduración del concepto de igualdad, se presenta un cambio conceptual más crítico. A diferencia de la situación con otros valores simbólicos, este cambio claramente implica la extensión de un concepto existente más que la adquisición de uno completamente nuevo, especialmente porque las características de “ $=$ ” en aritmética y en ecuaciones algebraicas, comparten la misma notación.

La presencia en el álgebra del signo ($=$) como señal de acción no tiende a desaparecer. Sin embargo, el signo igual tiene en álgebra un carácter bidireccional, es decir, hay que verlo actuar tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Aparece así un cambio importante. Por tanto, para simbolizar en Álgebra es necesario haber realizado un verdadero cambio conceptual en el uso del signo igual, manteniendo al mismo tiempo el que tenía en aritmética, ya que la notación utilizada en ambos casos es la misma.

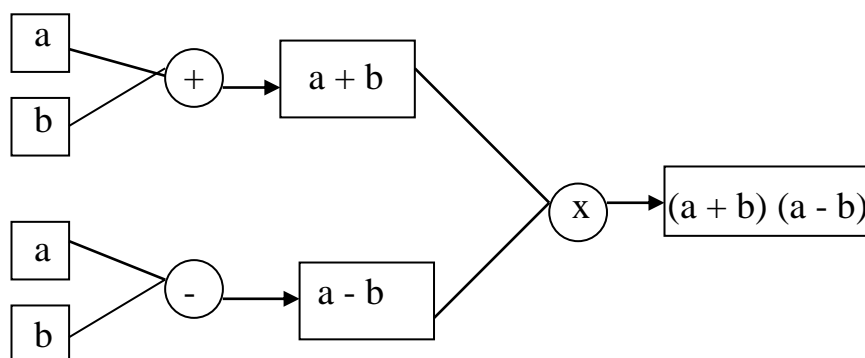
A nivel de secundaria, algunos experimentos (Herscovics y Kieran, 1980; Kieran, 1980), permiten afirmar que la interpretación que los niños dan al signo igual, está más evolucionada que en los niveles de Infantil y Primaria y tiende a ser más en términos de símbolo de relación que como una “señal para hacer algo”.

En los procesos de sustitución formal que conducen de “ $3 \times 5 = 5 \times 3$ ” a “ $a \cdot b = b \cdot a$ ”, o la verificación de que si $x^2 - 5x + 6 = 0$, es satisfecha por $x = 3$, sustituyendo x por 3, son procesos formales. La sustitución formal, sin embargo, se extiende más allá. De la identidad $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, al reemplazar “ a ” por “ $a + c$ ” y “ b ” por “ $b + d$ ”, se obtiene, “ $(a + c + b + d)(a + c - b - d) = (a + c)^2 - (b + d)^2$ ”, donde variables de una expresión son sustituidas por expresiones más complejas que son nuevamente variables.

Estas transformaciones algebraicas constituyen un poderoso instrumento de cálculo algebraico que está a mitad de camino entre lo puramente formal y un conocimiento explícito de su significado.

La sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural, y particularización.

El camino hacia la sustitución formal debe comenzar con pasos seguros en medio de un progreso deliberadamente lento. La organización de las instrucciones en esquemas semejantes a un pequeño ordenador puede facilitar la comprensión. Si queremos leer $(a + b)(a - b)$, como producto de la suma de a y b y de la diferencia de a y b , el uso de diagramas no lineales puede ser un estado intermedio que ayude en este sentido.



Con referencia a los **símbolos de las operaciones** consideramos expresar que los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones. Una de las teorías iniciales de los estudiantes será el reconocimiento de la naturaleza y significado de los símbolos para poder comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados. Este conocimiento les permitirá la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra, aceptando las diferencias entre ambos. En Aritmética los signos de operación indican una acción que se va a realizar con números, y que da como resultado otro número, por tanto, dar un significado a estos signos, es dar un procedimiento que permita llegar a la respuesta. En Álgebra tienen un carácter de “representación”, ya que indican operaciones que no siempre tienen por qué realizarse y pueden quedar indicadas como operaciones “en potencia”.

En orden a trabajar con valores simbólicos, el estudiante necesita ampliar el concepto de notación usado para las operaciones aritméticas. En Aritmética, la concatenación es usada en la notación “cada lugar”, un valor. Esto conduce al error típico en Álgebra de la concatenación.

La noción de comprensión y los sistemas de representación

Desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas hay dos preguntas básicas que se plantean cada vez de forma más acuciante: ¿Qué procedimientos espontáneos utilizamos para matematizar? ¿Cómo hacer Matemáticas de forma que sea un lenguaje semántico o sea que digan algo, que nos den información sobre el mundo que nos rodea?

Resnick y Ford (1981) dedican una gran parte de su libro a justificar la importancia de desarrollar las Matemáticas como comprensión conceptual frente a las ideas asociacionistas que desarrollaban una Matemática como cálculo.

La comprensión es asimismo un tema intensamente tratado por los

psicólogos y relacionado con la competencia intelectual (Nickerson, Perkins y Smith, 1987) y, a su vez, con las representaciones.

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1984).

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra representación en relación al aprendizaje, a la enseñanza y al desarrollo de las Matemáticas.

Destacamos la importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos; en este sentido diversos investigadores, Janvier (1987), Hiebert (1988), Kaput (1987, 1991), Duval (1993, 1995), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

Indicamos aquí fundamentalmente las investigaciones de Kaput y Duval.

Kaput (1987, 1991) desarrolla un acercamiento teórico para explicar el uso de los símbolos matemáticos.

Kaput (1987) señala que cualquier sistema de representación semiótico (SRS) se ocupa al menos de cuatro fuentes de significado:

1. Las traslaciones entre SRS formales, *por ejemplo, las traslaciones entre los sistemas de representación formal aritmético y formal algebraico.*
2. Las traslaciones entre SRS no formales y formales, *por ejemplo, las traslaciones entre representaciones mediante el lenguaje natural, las representaciones físicas, las representaciones geométricas, los diagramas,*

etc. y la representación formal algebraica.

3. Las transformaciones y operaciones dentro de un mismo SRS, sin referencia a ningún otro SRS; *por ejemplo, las transformaciones y operaciones dentro del sistema de representación formal algebraico, sin otro significado referencial que sí mismo.*

4. La consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que se dan en los SRS intermedios, creados durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza. *Estos SRS intermedios se integran en SRS más abstractos y sirven de base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel de generalización mayor (a veces denominado: “abstracción reflexiva”, “encapsulación”, “reificación”, “generalización”, etc.).*

Duval (1993, 1995) afirma que la actividad de conversión de un registro a otro, va a provocar el conocimiento. Este autor realiza un trabajo teórico, coherente y unificador de los diferentes acercamientos teóricos, a las representaciones.

Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

- 1) La presencia de una representación identificable...
- 2) la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...
- 3) La conversión de una representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...

Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del Álgebra

El aprendizaje del álgebra escolar genera muchas dificultades a los alumnos y estas dificultades son de naturaleza diferente, y tienen que ver

con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Estas dificultades de procedencia distinta se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos, mediante errores.

Dificultades

Pueden abordarse desde varias perspectivas.

Asociadas a la complejidad de los objetos del álgebra, observamos cómo éstos operan a dos niveles, el nivel semántico - los signos son dados con un significado claro y preciso -, y el nivel sintáctico - los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado -. Son estos dos aspectos los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

Asociadas a los procesos de pensamiento en álgebra también se observa que se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica del álgebra y en las rupturas que se dan necesariamente en relación a los modos de pensamiento algebraico.

Asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje del álgebra tienen que ver con la institución escolar, con el currículo y con los métodos de enseñanza de la misma.

Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos tienen que ver con los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de álgebra que los alumnos son capaces de hacer.

Asociadas a actitudes afectivas y emocionales sabemos de las dificultades de muchos estudiantes hacia el álgebra. Por ejemplo, muchos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia el álgebra.

Obstáculos

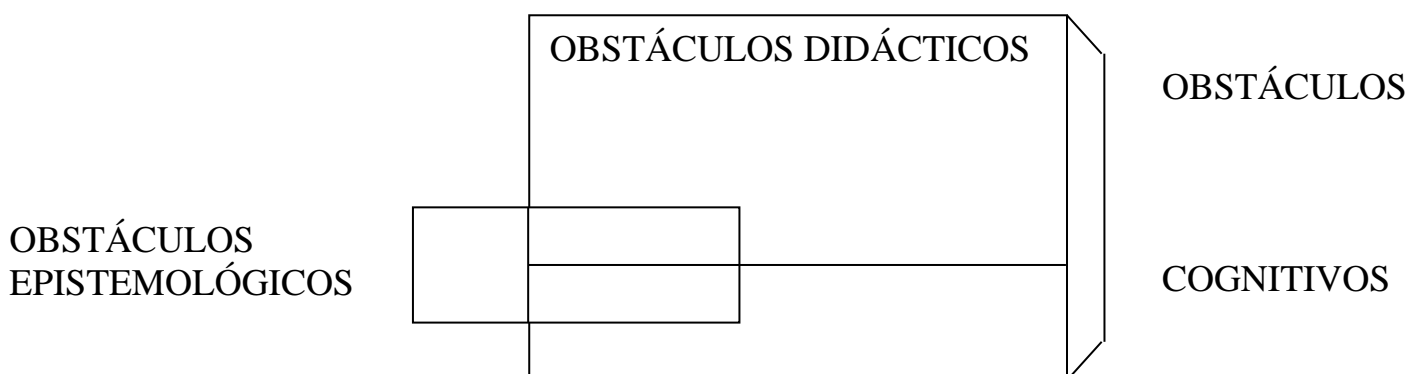
La consideración que se hace de obstáculo es la de un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, es algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento.

Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado.

Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso.

Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber. Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

La reflexión sobre las investigaciones relacionadas con este tema (Bachelard, 1938, Brousseau, 1983, Herscovics, 1989, Tall, 1989, entre otros), ha permitido hacer una propuesta de organización posible y útil de los obstáculos:



El desarrollo del pensamiento matemático está lleno de obstáculos caracterizados como **epistemológicos**. Sin embargo éstos no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; no obstante, aceptamos que tales organizaciones de las Matemáticas en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como **didácticos**. Ahora bien, la adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales está salpicado de obstáculos que podemos considerar **cognitivos**.

La presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial, por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar; el análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos.

Errores

Basándonos en la profundización de las investigaciones (Matz, 1980, Booth, 1984, entre otros) y de los resultados de nuestros estudios empíricos, se elaboró la siguiente organización de los errores:

1) Errores del álgebra que están en la aritmética:

- Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.
- Errores relativos al uso de recíprocos.
- Errores de cancelación.

2) Errores de Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

- el sentido del signo “=” en su paso de la aritmética al álgebra
- y
- la sustitución formal.

La investigación pretende profundizar más en el origen y causa de los errores y propone revisarlos desde dos puntos de vista: las dificultades inherentes al aprendizaje de las Matemáticas y los obstáculos en el sentido anteriormente caracterizado.

Diseño y metodología de la investigación

La investigación no se enmarca en un paradigma único, sino que se sitúa entre dos perspectivas: a) La interpretativa, *con la que se pretende conseguir una mayor comprensión de las situaciones y relaciones establecidas, a la vez que permite dar respuesta a los interrogantes de cómo los sujetos perciben, interpretan, modifican y construyen los objetos matemáticos considerados;* b) La analítica, *con el fin de reducir el fenómeno que se estudia a dimensiones objetivables, susceptibles de medición, análisis estadístico y control experimental,* y pretende una complementación entre ambos paradigmas. Por eso se conjuga el diseño de instrucción, con el diseño de un test de habilidades algebraicas, así como el diseño de protocolos no cerrados para entrevistas estructuradas con los alumnos seleccionados.

Se trata de una investigación aplicada en la que se intenta resolver un problema práctico, la búsqueda de causas que originan las dificultades en el inicio del aprendizaje del Álgebra desde tres ámbitos diferentes: cognitivo, curricular y de implementación didáctica, con el fin de transformar las condiciones de la acción didáctica y mejorar la calidad educativa.

Se propone establecer las dificultades que plantea y las posibilidades que tiene una propuesta inicial de enseñanza/aprendizaje del Álgebra, desde la perspectiva global, que incorpora diferentes registros yuxtapuestos, como el sistema de representación visual/geométrico (SRVG) donde las letras son consideradas como objetos geométricos, es decir, se propone el uso de diferentes fuentes de significados articulados, que faciliten la comprensión del lenguaje algebraico.

Al tener como uno de los problemas de estudio las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y del uso y comprensión de los sistemas de representación, utilizados en el marco de una situación de enseñanza, se necesita la elaboración de un Sistema de Categorías que permita analizar los contenidos desarrollados en el aula y valorar la comprensión de los alumnos con relación a los mismos.

Focos de la Investigación

Para conseguir los objetivos planteados la investigación se organiza en torno a dos **focos**:

FOCO I

Se centra en la búsqueda de las diferentes causas que originan las dificultades que los alumnos manifiestan en el uso del lenguaje algebraico, en general, y en el paso de la aritmética al álgebra para los alumnos de 12-13 años. Para ello se consideran diferentes aspectos de investigación y se analizan: Las propuestas curriculares oficiales y libros de texto; Las dificultades observadas en múltiples investigaciones; El tipo de habilidades operacionales y conceptuales que manifiestan los alumnos en el trabajo en el lenguaje algebraico (se utiliza como material sus textos y se elabora un primer cuestionario); Las dificultades operacionales y conceptuales que manifiestan los alumnos en el trabajo en el lenguaje algebraico; La

influencia de los métodos y procedimientos de estudio del lenguaje algebraico que practican los alumnos; Las posibilidades que tienen otras representaciones semióticas para el trabajo con el lenguaje algebraico.

Los procedimientos de recogida de información son en un principio la administración de cuestionarios a diferentes poblaciones, y luego, la elaboración de un pre-postest.

FOCO II

Se centra en el análisis de las potencialidades y dificultades que aportan los modelos DISEA (diseño de instrucción para las expresiones algebraicas) y DISEC (diseño de instrucción para el planteamiento y resolución de ecuaciones algebraicas).

El diseño de instrucción elaborado dentro del Marco Teórico indicado tiene un enfoque sintáctico - semántico apoyándose en los sistemas de representación visual/geométrico y el de la balanza, que actúan en yuxtaposición al sistema de representación formal algebraico y plantea la enseñanza/aprendizaje de Álgebra en términos de conversión de registros.

Por una parte se utilizará este diseño como elemento de instrucción y por otra, como elemento de investigación.

Los modelos DISEA y DISEC permiten situar al alumno en el uso de diferentes sistemas de representación (Duval) y diferentes fuentes de significado (Kaput), en un marco constructivista del aprendizaje del lenguaje algebraico, lo que nos facilitará la observación, análisis y valoración de las influencias del modelo, y las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos, en un proceso de enseñanza/aprendizaje del álgebra.

Población

La experimentación en la Isla de Tenerife se lleva a cabo en tres Centros (dos públicos y uno privado-concertado), situados en la Ciudades de La Laguna y Tejina, que proporcionaron 13 aulas para investigar. El número total de sujetos es de 455.

Técnicas de recogida de datos

Como se realiza un estudio cuantitativo y otro cualitativo las técnicas de recogidas de datos se agrupan en torno a estos estudios, resultando: a) para el cuantitativo, los cuestionarios y test y para el cualitativo: las audiograbaciones y las entrevistas individuales videograbadas, para analizar las habilidades conceptuales y operacionales de los alumnos durante la adquisición del lenguaje algebraico.

El Sistema Categorial.

El sistema categorial que se ha establecido está en torno a: Categorías de implementación didáctica (CID.) para analizar el aula; Categorías de contenido algebraico (CCA) para analizar los contenidos desarrollados y Categorías de Habilidades Algebraicas (CHA.) que permiten analizar y valorar la comprensión de los alumnos de los contenidos desarrollados.

Las categorías de implementación didáctica (C ID.) se organizan, de acuerdo con el modelo de enseñanza/aprendizaje, según la siguiente tabla:

Fases del proceso de enseñanza/aprendizaje	Categorías de Implementación Didáctica (C.I.D.)	
	Profesor	Alumno
Presentación/observación	Motivación. Exposición.	Cuestiones o preguntas de los alumnos. Respuestas de los alumnos.
Exploración/indagación.	Cuestiones	o Cuestiones o preguntas

	preguntas del Profesor. Respuestas del Profesor.	de los alumnos. Respuestas de los alumnos.
Representaciones semióticas. Representaciones mentales.	Actividades. Cuestiones o preguntas del Profesor. Respuestas del Profesor. Interacciones.	Respuestas de los alumnos. Cuestiones o preguntas de los alumnos. Interacciones.
Integración.	Síntesis. Reflexión.	Respuestas de los alumnos. Interacciones.

Con las **categorías de contenido algebraico** (C. C. A.), analizaremos y organizaremos la estructura específica de los conocimientos algebraicos a tratar y la secuencia de enseñanza que los desarrolla. Este nivel de categorías es útil tanto para la organización previa del trabajo del profesor como para la puesta en práctica del mismo, marcando distintos pasos en la articulación de los contenidos que permite por tanto una planificación inicial y, posteriormente, analizar el desarrollo del contenido en la clase, lo que hace posible no sólo comparar las fases de planificación y desarrollo sino sacar conclusiones para la organización curricular del tema tratado.

Los contenidos a tratar en esta investigación se organizan en torno a dos tópicos: expresiones algebraicas y planteo y resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, a los que se han asignado categorías y que son:

Categorías de contenido algebraico (CCA) Expresiones algebraicas	Categorías de contenido algebraico (CCA) Ecuaciones lineales
Contenido: Expresiones numéricas y algebraicas. Representaciones semióticas. Operaciones con expresiones numéricas y algebraicas. Propiedades: distributiva.	Contenido: - Plantear ecuaciones en diferentes registros. - Resolución de ecuaciones dadas en diferentes registros. - Plantear y resolver ecuaciones en

<p>- Sustitución formal con textos aditivos y multiplicativos Expresión mediante variables (letras) propiedades o relaciones. Valor numérico de expresiones algebraicas.</p> <p>Categorías</p> <ul style="list-style-type: none"> - Uso e interpretación de letras. - Uso e interpretación de signos. - Representaciones semióticas - Operatividad Básica. - Cálculos. 	<p>problemas de enunciado verbal.</p> <p>Categorías</p> <ul style="list-style-type: none"> - Uso e interpretación de los signos y las letras: Signo igual, signo negativo en los coeficientes de la ecuación. - Representaciones semióticas: Lenguaje Habitual, Sistema de Representación Visual Geométrico, Sistema de representación del equilibrio con la Balanza y Representación Formal. - Procedimientos de resolución de ecuaciones lineales con una incógnita: Procedimientos de resolución en: “$x + b = c$”, “$a x = b$” y “$a x + b = c x + d$”. - Reconocimiento e interpretación de estructuras: Reconocimiento e interpretación de expresiones equivalentes expresadas en el mismo y en distintos registros. Reconocimiento e interpretación de las soluciones (positivas y negativas).
--	---

Para analizar la comprensión de las expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones, establecemos las **categorías de habilidades algebraicas**.

Frente a las propuestas de enseñanza/aprendizaje del Álgebra basadas especialmente en procedimientos algorítmicos, nosotros proponemos una enseñanza/aprendizaje que conjugue tanto la representación conceptual como de procedimiento, en un marco de interpretación del Álgebra como lenguaje. Por ello las categorías de habilidades algebraicas, se organizan en torno a los dos núcleos: Expresiones Algebraicas y Ecuaciones Lineales. Las categorías se han concretado en sus descriptores que facilitan el análisis de las mismas, y que son: Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y Habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.) y que permiten estudiar la comprensión, tanto de los aspectos

conceptuales como de procedimiento, así como las interacciones entre ambos.

Las **Categorías de Habilidades para Expresiones Algebraicas** son:

EXPRESIONES ALGEBRAICAS	
H.C.C.O.	H.C.C.C.
<p>O₁ Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis.</p> <p>O₂ Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis</p> <p>O₃ Hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar.</p>	<p>C₁ Hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal.</p> <p>C₂ Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.</p> <p>C₃ Interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual.</p>

Las categorías han sido caracterizadas cada una de ellas por una serie de descriptores. A modo de ejemplo indicamos los descriptores de la categoría C₁ de H.C.C.C. para expresiones algebraicas y que son:

EXPRESIONES ALGEBRAICAS H.C.C.C. CATEGORÍA C₁ DESCRIPTORES	
<p>C₁ Hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Registros de representación:</u> • Modos de conversión entre los diferentes registros <ul style="list-style-type: none"> Traducción secuencial de acciones y relaciones dadas en un registro (verbal). Otros. • Utilización de registros personales o numéricos. • Concordancia o no con las transformaciones en un registro y sus conversiones en el otro registro. <p>* La visualización simplificada como un registro intermedio. Las representaciones en el S.R.V.G.</p>

Análogamente están determinadas las categorías relativas a las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual relativo a las ecuaciones.

ECUACIONES	
H.C.C.O.	H.C.C.C.
O₁ Uso de las reglas de transformación.	C₁ Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación Visual Geométrico.
O₂ Procedimientos de resolución en “ $x + b = c$ ”.	C₂ Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.
O₃ Procedimientos de resolución en “ $a x = b$ ”.	C₃ Conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.
O₄ Procedimientos de resolución en “ $ax + b = cx + d$ ”.	C₄ Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación Visual Geométrico.
O₅ Signos negativos en los coeficientes de la ecuación.	C₅ Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.
O₆ Comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas).	C₆ Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes.
	C₇ Interpretación y comprensión del signo “=”.

Una propuesta de enseñanza del álgebra

En este marco de referencia, la propuesta que se hace para la enseñanza del Álgebra parte de:

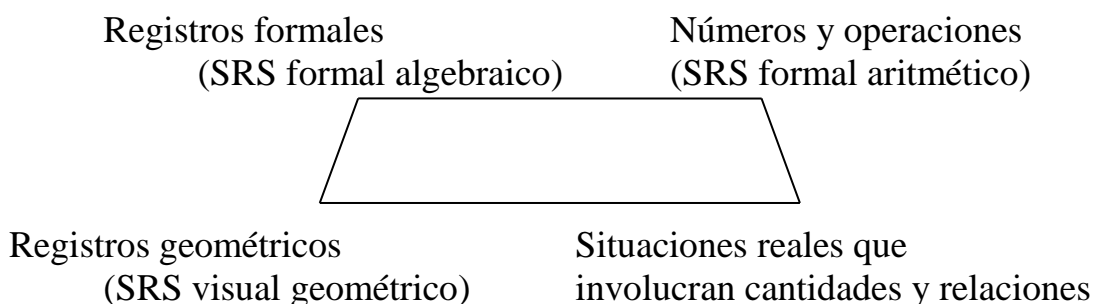
- dotar a estos sistemas de representación de diferentes fuentes de significado, en el sentido de Kaput (1987).

- la aceptación de la tesis de Duval (1993) en el sentido que un objeto algebraico difícilmente puede interiorizarse sin reunir diversas representaciones del mismo, y además se propone:

* Realizar la instrucción en términos de conversión entre los cuatro sistemas de representación: habitual, aritmético, algebraico y geométrico.

* Ampliar las fuentes de significados para el lenguaje algebraico a SRS de procedencia visual (registros geométricos) (Palarea y Socas, 1994). Además de la perspectiva numérica reflejada en los currículos de Matemáticas para Secundaria, aparece la necesidad de considerar las letras con sentido algebraico, como cantidad de una magnitud geométrica (Socas y Palarea, 1997), quedando determinada las fuentes de significado para el Álgebra de la siguiente forma:

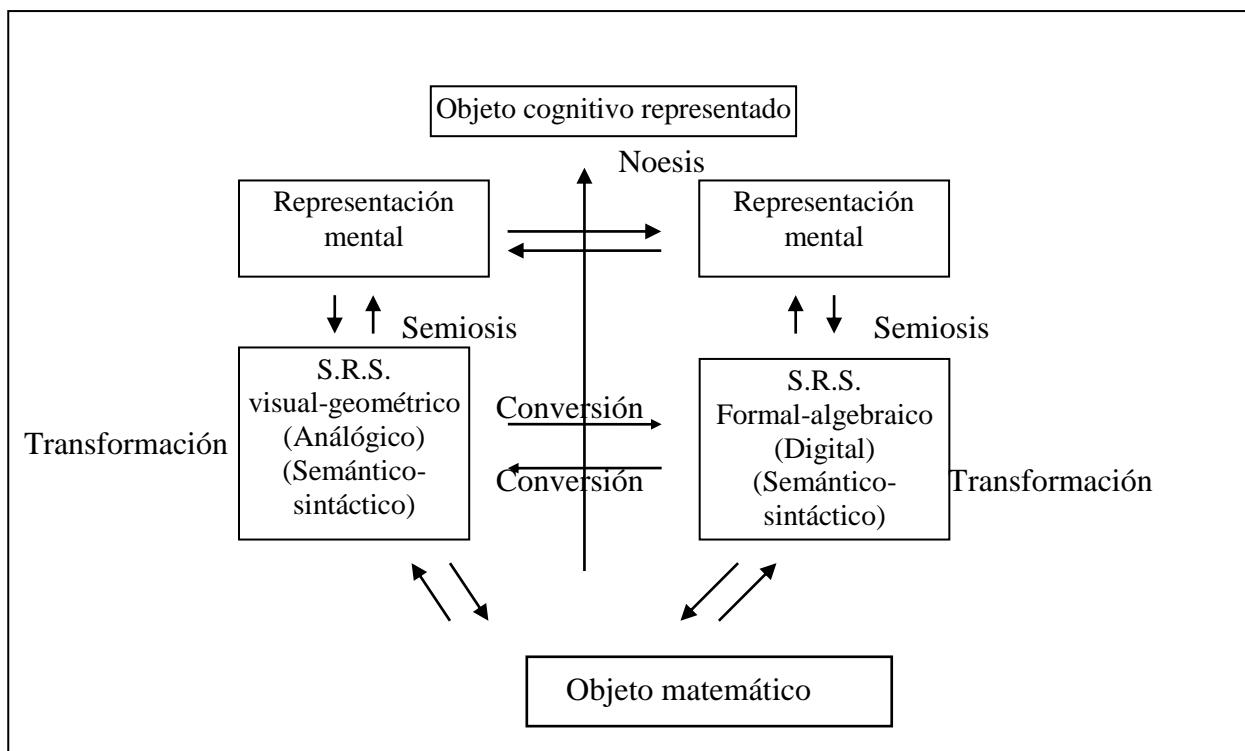
FUENTES DE SIGNIFICADO PARA EL ÁLGEBRA



(la base mayor del trapecio corresponde a sistemas de representación semióticos analógicos, con fuerte componente semántica, y la base menor del trapecio corresponde a sistemas de representación semióticos de carácter digital).

Lo que se investiga es la potencialidad que supone utilizar no sólo los números y operaciones sino el objeto geométrico como una representación semiótica.

Asimismo la **conexión entre los sistemas de representación semióticos utilizados** se presenta así, en términos de la tesis de Duval:



La Semiosis en términos de Duval es la aprehensión o producción de una representación semiótica, y la Noesis es la articulación de varias representaciones semióticas de los diferentes acercamientos teóricos, a las representaciones.

Consideraciones finales

La elaboración de un marco teórico local, de un triple sistema de categorías, de diseños de instrucción para expresiones algebraicas y ecuaciones (DISEA y DISEC), de los instrumentos de evaluación de carácter local, nos permite:

□ Configurar un instrumento de análisis y valoración para las relaciones que se producen en el sistema didáctico profesor-alumno-contenido, al trabajar las expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones.

◆ Elaborar un sistema de Categorías para la implementación didáctica mediante las que organizar, analizar y valorar el diseño y desarrollo de los DISEA y DISEC.

◆ Elaboración, desarrollo y evaluación de unos DISEA y DISEC que han mostrado su viabilidad didáctica y su potencial para investigar sobre la comprensión del lenguaje algebraico en términos de habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual y analizar las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del mismo.

Asimismo las técnicas de enseñanza y estrategias de intervención utilizadas nos permiten la observación de las interacciones que aportan, referidas a: 1) Habilidades *cognitivas de carácter operacional, 2) Habilidades cognitivas de carácter conceptual y 3) Habilidades metacognitivas.

La investigación parte necesariamente de diferentes supuestos observados en la literatura y en nuestros trabajos empíricos que a modo de síntesis concretamos en forma de **consideraciones finales**:

Los diferentes desarrollos del currículo del álgebra han ignorado el enorme interés que los S.R.S. tienen en la construcción del conocimiento algebraico y lo han considerado, en el mejor de los casos, como un añadido al proceso de conceptualización.

Los Sistemas de Representación Semióticos ocupan un lugar central en el aprendizaje del álgebra donde la habilidad para cambiar de registros constituye una capacidad matemática esencial.

La falta de coordinación de registros de las representaciones puede ser el origen de muchas de las dificultades que presentan nuestros alumnos en álgebra y que ponen de manifiesto en los errores que cometen, sobre todo los que tienen su origen en ausencia de significado y que están relacionados con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos algebraicos y a los procesos de pensamiento algebraico.

Una comprensión mejor de la aprehensión de los objetos matemáticos, es decir, la construcción de los conceptos y procedimientos matemáticos por parte de los alumnos, precisa de una teoría del conocimiento que no sólo organice y articule las redes conceptuales, sino que se apoye en una teoría de la representación (por ejemplo, Semiosis y Noesis), donde el conocimiento del objeto matemático aparece como el invariante de las diferentes representaciones semióticas.

Una propuesta de enseñanza-aprendizaje significativa del álgebra ha de ser presentada como un lenguaje que admite diferentes SRS que sirven de fuente de significado para la misma.

Abordar el aprendizaje del lenguaje algebraico desde el uso de diferentes SRS, permite analizar, desde una perspectiva cognitiva, las operaciones, procesos y estrategias que utiliza el alumno cuando construye este conocimiento, proporcionándole medios que le ayuden a reflexionar sobre sus propios procesos cognitivos, además de facilitar las interacciones entre el profesor, los estudiantes y el contenido.

Una propuesta curricular basada en los sistemas de representación favorecería el clima relacional de la clase, esto es, serían más positivas las relaciones profesor-alumno, las relaciones de los alumnos entre sí y mejoraría la disciplina en tanto que existiría un mayor grado de fluidez en el desarrollo de las tareas.

Referencias bibliográficas

- Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico* México Siglo Veintiuno
- Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. NFER-Nelson: Windsor.
- Brousseau G. (1983). "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198.
- Castro, E. (1994). "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años)", *Tesis Doctoral*. Universidad de Granada.
- Collis, K. F. (1975). *The Development of formal reasoning* Newcastle, Australia: University of Newcastle.
- Douady, R. (1986). "Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 5-31.
- Duval, R. (1993). "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN, México 1997).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang. Suisse.
- Herscovics, N. (1989). "Cognitive Obstacles Encounters in the Learning of Algebra". in Wagner y Kieran ed. *Research Agenda for mathematics Education. Research Issues*,. N.C.T.M.
- Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). "Constructing meaning for the concept of equation", *Mathematics Teacher*, 73, 572-580.
- Hiebert, J. (1988). "A theory of developing competence with written mathematical symbols", *Educational Studies in Mathematics*, 19 (3), 333-335.
- Hiebert, J. Y Lefevre, P. (1986). "Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis" in Hiebert, J., ed. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Janvier, C. (ed) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J. (1987). "Toward a theory of symbol use in mathematics" in Janvier, C., ed. *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J. (1991). "Notations and representations as mediators of Constructive Processes" in Von Glasersfeld E., ed. *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publisher.

- Kieran, C. (1980). "The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs an operator symbol" in Karplus, ed. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, California, 163-169.
- Kieran, C. (1992). "The Learning and Teaching of School Algebra" in Grows, D.A., ed. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York.
- Kilpatrick, J. (1987). "What constructivism might be in the mathematics education" in J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-27. Montréal, Canada: Université de Montréal.
- Krutetskii, V. A. (1963). "Some Characteristics of the Thinking of Pupils with Little Capacity for Mathematics. En Educational Psychology" in the U.R.S.S. Simon y Simon, ed. Routledge. London.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Küchemann, D. (1981). "Children's Understanding of Mathematics" in Hart, K. ed. *Algebra.*, Murray: London. 11-16.
- Matz, M. (1980). "Towards a computational Theory of Algebraic Competence", *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3 (1), 93-166.
- Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Paidós. Barcelona.
- Nickerson, R. S., Perkins, D. N. y Smith, E. E. (1987). *Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual*. Paidós. MEC. Barcelona.
- Paivio, A. (1978). "Mental Comparisons involving abstract attributes". *Memory and Cognition*, 6, 199-208.
- Palarea, M.M y Socas, M.M. (1994 b). "Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement- apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans)". Toulouse. France, *Actes de la 46^{ème} Rencontre de la CIEAEM II*, 111-119.
- Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Trillas.
- Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós-MEC.
- Sfard, A. (1991). "On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin", *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.
- Socas, M. M. y Palarea, M. M. (1997). "The three dimensions of error in the understanding of algebraic language" in *Proceeding of the PME-21*. Finland, v. 1, 264.
- Suwarsono, S. (1982). "Visual imagery in the mathematical thinking of seven grade students", *Tesis doctoral*. I.K.I.P. Sanata Darma, Teromolpos 29, Yogiakarta.

Tall, D. (1989). "Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm in *the Learning and Teaching for Algebra*" in Wagner y Kieran ed. *Research Agenda for mathematics Education. Research Issues*. N.C.T.M.

Vega, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva*. Alianza. Madrid.