ISBN: 84-600-9563-O

LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO A TRAVÉS DE LA HISTORIA

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen:

Con este trabajo trato de hacer un pequeño recorrido histórico para mostrar la manera ingeniosa que tenían algunas culturas para resolver la ecuación de segundo grado. Empezaré por la antigua Babilonia, y, sin pretender un estudio exhaustivo de las distintas aportaciones, terminaré con un representante francés del Renacimiento. Finalmente haré unas consideraciones generales con el fin de mostrar que mediante la formación de un cuadrado (geométrico o algebraico) se puede resolver, fácilmente, la ecuación cuadrática sin necesidad de recurrir a su fórmula general.

1. La antigua Babilonia

El descubrimiento de una gran cantidad de tablillas de arcilla con caracteres cuneiformes en la antigua Babilonia (1.800 al 1.600 a. C.) y la posterior interpretación de esta singular escritura (Neugebauer, 1929-30; Sachs, 1948) han permitido constatar que los antiguos babilonios sabían resolver ecuaciones de segundo grado del tipo siguiente:

$$x^2 + q = px; \quad p, q > 0,$$

utilizando la suma y el producto de sus raíces:

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Con estos datos determinaban la semidiferencia de las raíces:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2; \text{ de donde } \frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ , \ (\frac{p}{2})^2 \geq q,$$

para luego establecer un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas (precisamente el más simple de todos):

(1) $$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p}{2}$$

(2) $$\frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ ,$$

Sumando y restando (1) y (2), obtenían las dos soluciones; esto es,

(3) $$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Ejemplos:

$$x^2 + 7 = 8x;$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4, \frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{16 - 7} = 3$$

de donde, $x_{1,2} = 4 \pm 3$.

Observando (3) se puede ver con facilidad que sólo aparecen soluciones positivas.

Veamos otro ejemplo:

$3x^2 + 1 = 5x.$

Para reducir a la unidad el primer coeficiente, los antiguos babilonios, en lugar de dividir por 3, multiplicaban por 3. Así:

$(3x)^2 + 3 = 5(3x)$, y haciendo *3x=z*, se tiene $z^2 + 3 = 5z$, que da para z:

$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, con lo que

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}.$

Por otro lado, creo interesante incluir en este apartado un problema, tomado de una de las tablillas de arcilla mencionadas, que aparece en la pág. 27 del vol. I de la *Historia de la Matemática* de J. Rey Pastor y J. Babini. El enunciado es como sigue:

“Largo y ancho. He multiplicado largo y ancho y he obtenido el área. He agregado al área el exceso del largo sobre el ancho: 183; además, he sumado largo y ancho: 27. Se pide largo, ancho y área”.

Planteando el problema con simbolismo actual resulta:

$xy + x - y = 183$

$x + y = 27.$

Aunque sumar áreas con longitudes es, a todas luces, un absurdo, supondremos que se trata de un cálculo puramente numérico. En la tablilla aparece la suma de 183 y 27, o lo que es lo mismo:

$xy + 2x = x(y + 2) = 210$, y, además, se agrega 2 a la segunda ecuación; esto es,

$x + (y + 2) = 29,$

resultados que no son otra cosa que el producto y la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado, con los que se pasa, fácilmente, al sistema lineal:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{29}{2}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210} = \frac{1}{2},$$

y a las soluciones: $x_1 = x = \frac{30}{2} = 15, x_2 = y + 2 = \frac{28}{2} = 14 \Rightarrow y = 12$ y 180 como valor numérico del área.

Por simetría se puede determinar otra terna de soluciones: 14,13 y 182, que no aparece en la tablilla.

2 La ecuación de segundo grado en el antiguo Egipto

En el papiro Rhind o papiro de Ahmes, escriba que lo copió hacia el 1.650 a. C., no existe ningún problema que dé lugar a una ecuación de segundo grado; sin embargo, en los papiros de Kahun y de Berlín, pertenecientes a la XII Dinastía (ca.1991-1778 a. C.), sí que aparecen. Uno de ellos, que se encuentra en ambos papiros, es el siguiente:

"Una superficie, de 100 unidades cuadradas, puede ser representada como suma de dos cuadrados, cuyos lados están en la relación *1:3/4*. Determinar los lados de dichos cuadrados". Con los símbolos actuales el problema se plantearía del siguiente modo

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

A simple vista se advierte que los valores 1 y ¾ no satisfacen a la primera ecuación; por tanto, habrá que sustituirlos por valores proporcionales a los mismos; esto es, *k* y *3k/4*, resultando

$$\frac{25}{16}k^2 = 100$$

que da para *k* el valor 8, y, por tanto, *x* = 8 unidades e *y* = 6 unidades.

3. "El arte matemático en nueve capítulos"

El arte matemático en nueve capítulos o *Jiuzhang suanshu* es una compilación de problemas matemáticos de la antigua China de autor desconocido. No contiene demostraciones y se le considera como el equivalente a los *Elementos* de Euclides. Los historiadores no se ponen de acuerdo sobre la fecha en que fue escrito, ya que algunos comentaristas, de distintas épocas, le incorporaban nuevos problemas; sin embargo, la mayoría lo sitúa entre el s. II a. C. y el s. III d. C.

El problema 11 del capítulo 9 trata sobre el cálculo de las dimensiones de una puerta conocida la diagonal y la diferencia entre el largo y el ancho. Con nomenclatura actual se puede plantear del siguiente modo:

$$x^2 + y^2 = d^2, y - x = k.$$

Sólo aparece para su resolución la siguiente fórmula:

$$(1) \qquad x_{1,2} = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}} \pm \frac{k}{2}$$

¿Cómo fue obtenida? — Probablemente, siguiendo el mismo camino de las antiguas civilizaciones babilónicas para resolver una ecuación cuadrática; esto es,

$$(y+x)^2 = d^2 + 2yx; (y-x)^2 = k^2 = d^2 - 2yx \Rightarrow 2yx = d^2 - k^2$$

de donde resulta el siguiente sistema lineal:

$$(2) \qquad \frac{y+x}{2} = \frac{\sqrt{2d^2 - k^2}}{2} = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}$$

$$3) \qquad \frac{y-x}{2} = \frac{k}{2},$$

que da lugar a la expresión (1) sumando y restando (2) y (3).

4. Diofanto de Alejandría (s. III)

Diofanto fue un famoso algebrista griego: su obra más importante: *Arithmetica.*

Con él se pasa del álgebra retórica a la sincopada.

Prescindiendo de los tres casos triviales de la ecuación de 2º grado, Diofanto halló la solución general de cada uno de estos tres tipos:

I) $ax^2 + bx = c$

II) $ax^2 = bx + c$

III) $ax^2 + c = bx$, siendo $a, b, c > 0$.

Tampoco admitía soluciones negativas, teniendo cada uno de estos casos su propio método de resolución. Así,

$$I) \qquad x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}}{2}$$

$$II) \qquad x = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + ac} + \frac{b}{2}}{2}$$

$$III) \qquad x = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}}{2} \quad \text{para} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq ac.$$

5. Los Hindúes

Con Brahmagupta (ca. 598-ca. 670), se redujeron los distintos casos de Diofanto a uno sólo. Los hindúes fueron los primeros en dar las raíces por parejas, y admitieron, ocasionalmente, las raíces negativas como soluciones de la ecuación.

Bhaskara (s. XII) estableció la condición para que los radicales dobles se pudieran

convertir en sencillos; esto es, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}}}{2} \pm \frac{\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b}}}{2}$; y, por tanto, $a^2 - b$, ha de ser un cuadrado perfecto.

6. Los árabes

Al-Khowarizmi (s. IX), en *Hisab Al-jabr wa'l muqabalah* o libro de la restauración y la reducción, consideraba, fundamentalmente, los tres tipos de ecuaciones de segundo grado que vamos a ver a continuación. Para la resolución de las mismas utilizaba un método puramente geométrico (formación de un cuadrado)

6.1 $x^2 + px = q; \quad p, q > 0$

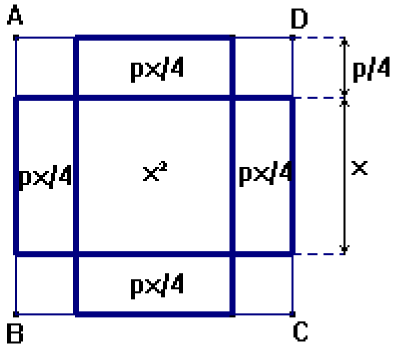

Fig. 1

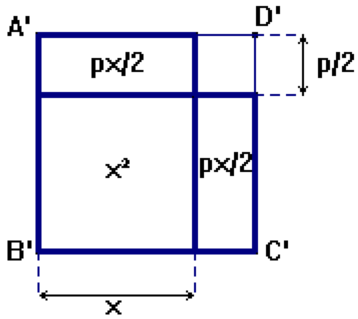

Fig. 2

Del cuadrado ABCD de la fig. 1 se desprende:

L=BC=$\frac{p}{4}+x+\frac{p}{4}=x+\frac{p}{2}$; de donde, $L^2=(x+\frac{p}{2})^2=x^2+4\times\frac{px}{4}+4\times(\frac{p}{4})^2$,

(la suma del cuadrado de lado x y los cuatro rectángulos, cada uno de los cuales es de área $\frac{px}{4}$, da lugar al primer miembro de la ecuación considerada; y si, además, sumamos a este resultado los cuatro cuadraditos de las esquinas tendremos el cuadrado de lado L); simplificando, resulta

$(x+\frac{p}{2})^2=q+(\frac{p}{2})^2 \Rightarrow x=\sqrt{q+(\frac{p}{2})^2}-\frac{p}{2}$, que como se ve siempre es positiva.

Los árabes tampoco consideraban las raíces negativas.

También utilizaban el cuadrado de la fig. 2 con el que se llega al mismo resultado anterior, pero de un modo más sencillo.

6.2 Segundo tipo: $x^2 = px + q$; $p, q > 0$

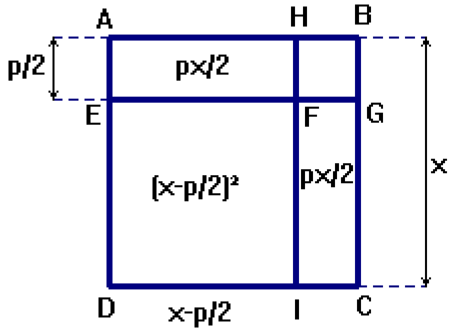

Fig. 3

AB=x, AE=IC=$p/2$.
Área (AG)=área (CH)= $px/2$.
Área (EI)=$(x-p/2)^2$.
DI=l=$x-p/2$.

Formaremos el cuadrado hacia adentro, tal como se indica en la fig. 3. Con la ayuda del
cuadro adjunto podremos escribir:

$$l^2 = (x - \frac{p}{2})^2 = x^2 - 2\frac{px}{2} + (\frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2,$$

de donde se deduce que

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$$ (que será siempre positivo).

6.3 Tercer tipo, $x^2 + q = px$; *p, q >0,*

Al-Khowarizmi utilizaba las dos figuras que siguen, las cuales son de marcada influencia griega (*Elementos* de Euclides, Libro II, proposiciones 5-6), para resolver este tercer tipo:

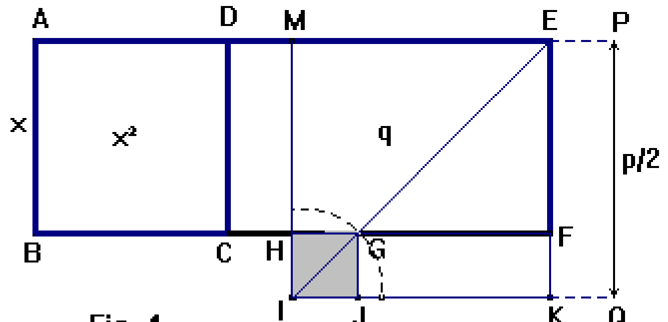

Fig. 4

Área Cuad(AC)=x^2.
Área Rect(DF)=q.
AM=ME=EK=p/2.
Área Rect(AF)=px.
Rect(DH)=Rect(GK).
Área Cuad(MK)=$(p/2)^2$.
Área Cuad(HJ)=$(p/2)^2$-q.
HI=IJ=p/2-x.

En el cuadro adjunto a la fig. 4 se aclara de forma esquemática todo el proceso. Siguiendo a los clásicos hemos determinado los rectángulos (y por consiguiente los cuadrados) mediante su diagonal. El arco que pasa por G, sirve para señalar lo que Euclides llamaba el *gnomon* (término conocido ya por los pitagóricos), que en este caso es la figura que hay que añadir al cuadrado sombreado para obtener el cuadrado de diagonal MK.

Veamos un ejemplo: $x^2+5 = 6x$.

El área del cuadrado sombreado nos resolverá el problema:

$$(3-x)^2 = 3^2 - 5 = 4 \Rightarrow x = 3 - 2 = 1.$$

Pero como este tipo de ecuación admite dos raíces positivas, para determinar la que falta

habrá que modificar la fig. 4. El punto medio M de AE que antes era exterior a AD, ahora es interior (fig.5).

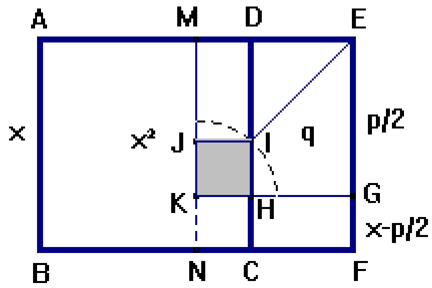

Fig. 5

Área Cuad(AC)=x^2.
Área Rect(DF)=q.
Área Rect(AF)=px.
M es el p. m. de AE.
AM=ME=EG=p/2.
AD-AM=MD=JI=x-p/2.
Área Cuad(JH)=$(p/2)^2$-q.

El área del cuadrado sombreado resolverá el problema:

$$(x-3)^2 = 3^2 - 5 = 4 \Rightarrow x = 2 + 3 = 5.$$

Cuando M se confunda con D las raíces coincidirán; o sea, $x = x_1 = x_2 = \frac{p}{2}$.

Para este tercer tipo, $x^2 + q = px$, Al-Khowarizmi utilizaba también la siguiente identidad:

$$(\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2} - x)^2 = (p-x)x = px - x^2 = q \Rightarrow (\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$$

de donde $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$, con $(\frac{p}{2})^2 \geq q$, y que, en realidad, no es otra cosa que la formación de un cuadrado algebraico:

$$(x-\frac{p}{2})^2-(\frac{p}{2})^2=-q\,.$$

7. François Viète (1540-1603)

Con François Viète, latinizado Vieta, los métodos analíticos sustituyen a los geométricos. Sin embargo, su álgebra, a la que él llama "ars analytica", no es del todo simbólica, ya que anda a caballo entre ésta y la sincopada. Así la ecuación, $x^2+px=q$,

la escribiría del siguiente modo: *A quad. + P in A, aequatur Q plano* (empleaba letras mayúsculas: vocales para las incógnitas y consonantes para las constantes, el cuadrado lo representaba por *quadratus*, abreviado *quad.*, el signo del producto por *in*, y el signo igual por *aequatur* (es igualado por); además, le daba una dimensión a cada constante para que la ecuación resultase homogénea).

Además, no tuvo en cuenta las raíces negativas ni las imaginarias.

Veamos, con otra nomenclatura, su manera de resolver una ecuación de segundo grado. Sea

(1) $x^2+px+q=0$

y hagamos $x = u + v$, que sustituida en (1) da

(3) $u^2+(2v+p)u+(v^2+pv+q)=0$.

Seguidamente, se anula el coeficiente de u para transformar (3) en una ecuación de tipo trivial, que en este caso es un cuadrado algebraico:

$$v=-\frac{p}{2};\quad u^2=(\frac{p}{2})^2-q\quad\Rightarrow\quad u=\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}.$$

Sustituyendo en x los valores obtenidos para u y v, tendremos, finalmente,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Ejemplo:

$x^2 + 6x - 1 = 0$; sustituyendo x por $u+v$, se tiene:

$u^2 + (6+2v)u + v^2 + 6v - 1 = 0$; anulando el coeficiente del segundo término da

para v el valor -3, que sustituido en el término independiente da por resultado -10; por lo que,

$u^2 = 10 \Rightarrow u = x - v = \pm\sqrt{10} \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{10}$.

Para Vieta, sólo valdría la solución positiva, o sea, $\sqrt{10} - 3$.

He creído interesante consignar este cambio de variable, ya que también fue utilizado (y se sigue utilizando) para eliminar el segundo término en las ecuaciones de tercero y cuarto grados.

8. Consideraciones finales

8.1 Podremos utilizar el método de los antiguos babilonios (apartado 1) para resolver la ecuación general de segundo grado, dado que las propiedades de las raíces (suma, producto, semisuma y semidiferencia) se siguen cumpliendo independientemente del signo de sus coeficientes. Veamos un ejemplo:

$3x^2 - 5x - 6 = 0$, que podremos poner en la forma

$x^2 - 2 = \frac{5}{3}x$, y de aquí el sistema lineal:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{(\frac{5}{6})^2 - (-2)} = \frac{\sqrt{97}}{6}$$

de donde,

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{6}.$$

8.2 Del mismo modo, podríamos formar el cuadrado geométrico que utilizaban los árabes (apartado 4) para la resolución de la ecuación anterior. Esto es,

$x^2 - \frac{5}{3}x = 2$, (segundo tipo, fig. 3)

$(x - \frac{5}{6})^2 = 2 + (\frac{5}{6})^2 = \frac{72}{36}$, que da de un modo inmediato el valor (o valores) de x.

8.3 Finalmente, está el método utilizado normalmente en la actualidad, que consiste en la formación de un cuadrado algebraico.

Así, la ecuación $x^2 + px + q = 0$, (*p*, *q*, números reales o complejos), la transformaremos en otra equivalente tal como sigue,

$$(x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q \quad \Rightarrow$$
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Ejemplo:

$2x^2 + 6x - 5 = 0$, que puesta de esta forma, $x^2 + 3x = \frac{5}{2}$, facilitará la formación del cuadrado; esto es,

$$(x+\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2 = \frac{19}{4} \Rightarrow x+\frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Referencias bibliográficas:

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, AUT, Madrid.
CAJORI, F. (1985): *A History of Mathematics*, 4th edition, Chelsea Publishing Company, USA.
HEATH, T. (1956): *The Thirteen Books of EUCLID'S ELEMENTS,* 3 vols., Dover Publications, Inc., New York.
MARTZLOFF, J. C. (1987): *Histoire des Mathématiques Chinoises*, Masson editeur, Paris.
NEUGEBAUER, O. (1970): *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd edition (1957), 2nd printing (1970), Brown University Press, Rhode Island, USA.
POPP, W. (1975): *History of Mathematics. Topics for Schools*, The Open University Press, England. (Translated from de German by Maxim Bruckheimer)
REY PASTOR, J.; BABINI, J. (1985): *Historia de la Matemática*, 2 vols., Gedisa S.A., Barcelona.
RIBNIKOV, K. (1991): *Historia de las Matemáticas*, 1ª reimpresión de la 1ª edición en español (1974), editorial Mir, Moscú.
ROUSE BALL, W. W. (1960): *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York
SMITH, D. E. 1958): *History of Mathematics*, vol. II, Dover Publications, Inc., New York.