



EL PAPEL DE LOS MATERIALES CONCRETOS CON FINES DIDÁCTICOS EN LA CLASE DE MATEMÁTICA

Martín M. Socas

Universidad de La Laguna

Resumen:

De las investigaciones que tratan del papel de los materiales concretos en la clase de matemática parece desprenderse que estos no son en sí mismos la panacea al problema didáctico, y para que su utilización resulte eficaz se precisa de un mayor conocimiento de los mismos y de una planificación que los articule de forma coherente en las situaciones de aprendizaje de un objeto matemático determinado.

En este trabajo, se reflexiona acerca del papel de los materiales concretos con fines didácticos en la clase de matemática, y se revisan diferentes problemáticas que les conciernen. Se aporta, además, sugerencias metodológicas para su utilización en la clase.

Abstract:

Of the investigations that are about the paper of the concrete materials in the class of mathematical he seems to come off that these they are not in itself the panacea to the didactic problem, and so that their use is effective he is necessary of a bigger knowledge of the same ones and of a planning that articulates them in a coherent way in the situations of learning o fa certain mathematical object.

In this work, it is meditated about the paper of the concrete materials with didactic ends in the class of mathematical, and they are revised different problematic that concern them. It is contributed, also, methodological suggestions for their use in the class.

Introducción

Actualmente, uno encuentra disponibles en el mercado una amplia variedad de materiales didácticos, y los centros de Formación de Profesores dedican asignaturas o temas específicos al tratamiento didáctico de estos materiales. Sin embargo, en la actualidad se sigue manteniendo la discusión sobre el papel de los materiales didácticos en la clase de matemática; por ejemplo, no tenemos investigaciones relevantes que nos informen si los objetos que se pueden encontrar en el entorno del alumno son mejores, didácticamente hablando, para enseñar las matemáticas que los materiales didácticos contruidos especialmente para tal fin, y si, de hecho, los materiales didácticos son en realidad más perjudiciales que beneficiosos. Muchas son las preguntas sobre el papel de los materiales didácticos en clase de matemática que aún hoy no tienen respuesta. En este artículo centraremos la discusión en relación a tres cuestiones esenciales: ¿Son los objetos que se pueden encontrar comúnmente en la vida diaria, entendidos como utensilios comunes mejores, didácticamente hablando, para enseñar las matemáticas que los materiales didácticos contruidos especialmente para tal fin? ¿Son, en realidad, los materiales didácticos más perjudiciales que beneficiosos? y ¿Cómo debemos implementar los materiales didácticos en el sistema escolar para que su utilización resulte eficaz?

La organización para su presentación se realiza en torno a los siguientes apartados: breve recorrido histórico, una clasificación de los materiales concretos, la innovación educativa y los materiales concretos, mal uso de los materiales concretos: “el deslizamiento metacognitivo”, para terminar, finalmente, proponiendo otra manera de mirar los materiales concretos.

Breve recorrido histórico

La utilización de materiales concretos con fines didácticos en las clases de matemáticas es algo natural desde hace mucho tiempo, aunque no siempre se aceptan con agrado o se usan apropiadamente. Como señala Castelnuovo (1975), con Comenius (1592-1670) y Pestalozzi (1746-1827) se desarrollaron los fundamentos de una pedagogía moderna, basada en los principios de la escuela activa: intuición y construcción; y con ellos, junto con Montessori (1870-1952) y muchos otros autores de nuestro siglo, se inició el proceso de introducir los materiales concretos con fines didácticos en las clases de matemáticas como un proceso organizado y con bases científicas para su utilización.

Si analizamos, a grandes rasgos, cómo se ha presentado la matemática a lo largo de la historia en el sistema educativo, observamos cuatro tendencias claramente diferenciadas: cálculo, comprensión conceptual, resolución de problemas y lenguaje. Las tres primeras tendencias se analizan acertadamente en el texto de Resnick y Ford (1990). La cuarta es una presentación emergente en los últimos diez años como presentación sistémica, ya que la concepción de la matemática como una forma de expresión que utiliza signos, ha estado siempre presente en los otros planteamientos.

Los materiales didácticos concretos toman significado en el marco de la matemática como comprensión conceptual y dentro de ella, la corriente que enfatiza la enseñanza de las estructuras matemáticas. Autores que destacan en esta corriente son Bruner y Dienes, en los que han tenido gran influencia las ideas de Piaget.

La enseñanza de la matemática en las teorías de Bruner/Dienes constituye dos buenos ejemplos de relación entre teorías psicológicas del funcionamiento cognitivo y la enseñanza de las matemáticas asociada al uso

de materiales didácticos y se ubica en las reformas curriculares de los años sesenta.

Jerome Bruner combinó trabajos de psicología experimental con estudios sobre trabajos de aula relacionados con el aprendizaje de las matemáticas y fue defensor de la idea de desarrollar trabajos multidisciplinares entre psicólogos, educadores y matemáticos, colaborando en experimentos de aula con el profesor de matemáticas Zoltan P. Dienes (Resnick y Ford, 1990).

De sus trabajos destacan especialmente sus estudios sobre los diferentes modos de representación y su repercusión en el diseño de materiales y estrategias para la enseñanza de las matemáticas. Bruner (1966) describe tres modos de representación: enactiva, icónica y simbólica. La representación enactiva es un modo de representación de sucesos pasados mediante una respuesta motriz adecuada, y nos sitúa en lo concreto y en lo físico. La representación icónica entra en el campo de las imágenes mentales y nos separa de lo concreto y de lo físico, para situarnos en la mente no sólo como forma de recordar la acción sino como forma de recrearla mentalmente cuando sea necesaria. La representación simbólica, es la tercera forma de recuperar las experiencias en la memoria y es posible por el uso, especialmente, de la competencia lingüística y de los símbolos compartidos en la cultura. Para Bruner estos tres modos de representación se relacionan entre sí evolutivamente y en ese orden, de manera que cada uno depende del anterior y equivale a una teoría del desarrollo de las etapas de la inteligencia. Concluye que, si la inteligencia se desarrolla en este orden enactivo/icónico/simbólico, entonces lo lógico es enseñar los conceptos también en este orden y lo aplica a las matemáticas. La clave para enseñar

las matemáticas es entonces presentar los objetos matemáticos mediante los tres modos de representación, que en la práctica se concreta con acciones con objetos físicos o materiales concretos, con imágenes gráficas o visuales y con símbolos.

Zoltan P. Dienes también aborda el problema de diseñar una enseñanza de las matemáticas que tenga en cuenta tanto la estructura de la matemática como las capacidades cognitivas del estudiante. Dienes cree en la naturaleza constructivista de los alumnos y propone un desarrollo cíclico de los conceptos matemáticos, cada uno de los cuales supone una secuencia de aprendizaje que va de lo concreto a lo simbólico. Este proceso depende de una exploración activa con objetos del mundo, dado que las relaciones y regularidades matemáticas no son evidentes en el entorno diario de los niños, y propone que se creen materiales concretos de enseñanza que encarnen (“embodiment”) estas estructuras y las acerquen al campo de la experiencia concreta.

Dienes a partir de los cuatro principios siguientes: dinámico (concibe los procesos de enseñanza/aprendizaje organizados en etapas), de construcción (los alumnos construyen reglas, realizan abstracciones y diseñan varias representaciones de las estructuras), de variabilidad perceptiva (los conceptos deben presentarse en “embodiment” múltiples que deben diferenciarse entre sí), y de variabilidad matemática (manipular toda la gama de variables matemáticas asociadas a un concepto), establece una propuesta de aprendizaje de las matemáticas en seis etapas (Dienes, 1970).

Analicemos con más detalle los principios de variabilidad perceptiva y variabilidad matemática.

El principio de variabilidad perceptiva propone que, para que los conceptos matemáticos se puedan abstraer éstos se deben presentar en encarnaciones múltiples, es decir, los alumnos deben trabajar con materiales concretos de tipos diferentes, cada uno de los cuales encarna el concepto en cuestión; formula diferentes hipótesis:

- Las encarnaciones múltiples facilitan el proceso de ordenación y de clasificación que es la abstracción de un concepto.

- Las diversas encarnaciones deben diferenciarse entre sí todo lo que sea posible de manera que los alumnos sean capaces de “ver” la estructura conceptual desde varias perspectivas diferentes, y por tanto, de construir un rico almacén de imágenes mentales que rodeen a cada concepto.

- La variabilidad perceptiva de las encarnaciones permite que el concepto se desarrolle independientemente de las formas específicas de los materiales concretos.

El principio de variabilidad matemática, señala que, las encarnaciones múltiples deben permitir también la manipulación de toda la gama de variables matemáticas que se asocian a un concepto, es decir, la variabilidad matemática clarifica hasta que punto se puede generalizar un concepto a otros contextos. Por ejemplo, el aprendizaje de la notación posicional no se debe limitar al uso exclusivo de materiales concretos en base 10, sino que es necesario también el uso de otros materiales concretos, como por ejemplo, los bloques multibases que permiten también trabajar en otras bases.

Podemos señalar que hay un claro paralelismo entre la secuencia de enseñanza presentada por Dienes y los modos de representación de Bruner. En ambos se parte de una realidad artificial concreta (creada especialmente con materiales concretos) para llegar a una etapa final simbólica, pasando

antes por una etapa de representación gráfica o esquemática. Es claro que ambos autores toman, en general, la idea de formación de conceptos de los estadios de desarrollo del pensamiento de Piaget, es decir, adaptan los macro/niveles del desarrollo cognitivo de Piaget a los micro/estados del desarrollo del concepto. A pesar de los cuarenta años transcurridos y de nuevos resultados de las investigaciones hoy perviven en la concepción de la enseñanza de la matemáticas de ciertos currículos y en las propuestas de muchos profesores los tres modos de representación de Bruner como punto de partida para hacer una buena organización de la misma.

También podemos considerar la presencia de los materiales didácticos para matemáticas en las ponencias de algunos congresos internacionales como por ejemplo los de la CIEAEM «Comission Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathématiques», fundada en 1950, por el matemático francés G. Choquet, el psicólogo suizo J. Piaget y el pedagogo británico C. Gattegno, a los que se agruparon colegas ingleses, belgas, italianos, franceses, suizos y españoles, como F. Fletcher, G. Papy, E. Castelnuovo, W. Servais, J. L. Nicolet y P. Puig Adam, respectivamente. En concreto, de España cabe destacar la figura de Puig Adam (1900-1960), que organizó la XI Reunión Internacional de la CIEAEM, celebrada en Madrid en abril de 1957, y que trató de la presentación y exposición de material didáctico, bajo la denominación de cuarenta lecciones de carácter heurístico, con explicación de las experiencias didácticas correspondientes. Con relación a la Didáctica de las Matemáticas Puig Adam escribió obras como: *Decálogo de la Didáctica Matemática Media*, en 1955; *Didáctica Matemática Eurística*, en 1956; *El material didáctico matemático actual*, en 1958; y *La matemática y su enseñanza actual*, en 1960. En estas obras trató de plasmar sus ideas sobre la enseñanza de las matemáticas: la primacía del

acto de aprender sobre el de enseñar; la necesidad de la acción del niño en el proceso de enseñanza; la enseñanza no sólo activa sino heurística; la concepción de la matemática como una actividad pensante en eterna producción...

Debemos señalar, por último, en relación a los materiales concretos y, en particular, a las propuestas de Dienes que no es el único educador que haya sugerido materiales concretos, ni la investigación ha demostrado que sus materiales generen un mejor aprendizaje que otros disponibles. Lo que queremos indicar es que los materiales concretos y los principios instruccionales orientados hacia la estructura (matemática como comprensión conceptual), no se han validado adecuadamente por medio de la investigación.

Una clasificación de los materiales concretos

Szendrei (1996), tras revisar el uso de los materiales *concretos* con fines didácticos en clase de matemática, observa dos tendencias diferenciadas, por una parte, el uso en clase de objetos de la vida real, y, por otra, herramientas especialmente construidas con fines educativos; es decir, diferencia los utensilios y aparatos que no se usan propiamente en lo que es la vida del colegio y les llama *utensilios comunes*, y los materiales artificiales creados con propósitos de tipo pedagógico y les llama *materiales educativos*. Sin embargo, señala que hay que añadir otro elemento más, que surge directamente de la realidad de las aulas: los juegos en las clases de matemáticas.

En resumen Szendrei (1996), distingue:

- Utensilios comunes, como utensilios y aparatos que no se usan propiamente en lo que es la vida del colegio.

- Materiales educativos, como materiales artificiales creados con propósitos de tipo pedagógico.

- Los juegos en las clases de matemáticas, como una actividad esencial para el desarrollo matemático de los alumnos.

Propone la siguiente denominación de “*materiales concretos*” para aquellos materiales que son usados con fines didácticos, y están formados, por una parte, por objetos de la vida real empleados en la clase, y, por otra, por herramientas especialmente construidas con fines educativos. Identificando el término “*materiales manipulativos*” como las diferentes propuestas que sobre materiales nos hacen las compañías de todo el mundo con propósitos educativos, y que son los utensilios comunes, los materiales educativos y los juegos. No es fácil, dice, elegir entre la gran variedad de esos denominados materiales manipulativos...

Comenta Szendrei (1996): *“uno podría pensar que estos tres elementos: utensilios comunes, materiales educativos y juegos, pueden convivir juntos. Eso no es verdad; ya que además reflejan claramente las grandes diferencias existentes entre las distintas escuelas didácticas, basta, simplemente con examinar si en las clases hay materiales concretos (para usar con fines didácticos) y, en caso de ser así, que tipo de materiales son. Los colegios pueden diferir en sus filosofías educativas, en lo relativo a cómo los alumnos aprenden, y al tipo de herramientas que se necesitan para favorecer la comprensión de los conceptos y los procesos”.*

Veamos un ejemplo, en este sentido, de posición radical frente a los materiales concretos. El Grupo del *Proyecto de Genova*, que realiza trabajos

en Escuelas de Primaria y en Secundaria, cuyo director es Paolo Boreo, no duda en arremeter contra el uso de materiales educativos y de juegos en el aula. Los profesores de los proyectos emplean utensilios comunes (calendarios, dinero, termómetros, reglas, mapas, calculadoras de bolsillo,...) o fenómenos (las sombras producidas por el sol, etc.); de vez en cuando fabrican, durante las actividades de clase, algunos materiales adecuados para un fin específico, (por ejemplo, maquetas del edificio del colegio), pero sólo como una herramienta mediadora en el aprendizaje activo de sus alumnos.

Según su filosofía pedagógica general, los participantes en los proyectos no utilizarán materiales educativos por los siguientes motivos:

1) Los conceptos que se desarrollan al emplear utensilios comunes permiten acoplar satisfactoriamente lo estudiado con la experiencia que los alumnos tienen de la vida fuera del aula, así como permiten una transferencia inmediata del uso de las matemáticas a las situaciones de la vida real; lo cual normalmente no sucede cuando se usan materiales educativos.

2) Los utensilios comunes han sido seleccionados a través de la evolución cultural de la especie humana, conectando la construcción histórica de conceptos matemáticos con los procedimientos; como consecuencia de este proceso de selección, los profesores pueden explotar los utensilios como mediadores eficientes entre los condicionantes derivados de la realidad y los procesos mentales en los que intervienen las matemáticas.

3) El tiempo que se necesita para enseñar a los alumnos el uso apropiado de los materiales educativos es un despilfarro; pues se requiere menos tiempo para enseñarles a utilizar adecuadamente utensilios comunes

de dificultad equiparable a la de los materiales educativos, lo cual se debe a la conexión que se establece con la experiencia extraescolar.

4) El profesor puede emplear mal los materiales educativos, sin tener posibilidad de recibir datos que viertan resultados de los alumnos, de los padres, u de otras personas; mientras que los profesores y los padres, por las propias circunstancias de la vida, son expertos en el uso cotidiano de los utensilios comunes.

Los participantes en el Proyecto tampoco utilizan los juegos como método de aprendizaje, porque creen que los alumnos pueden recibir una falsa imagen de la naturaleza de las matemáticas, como disciplina, ya que éstas son una cosa bien diferente a las situaciones que se crean con los juegos (Boero, 1991, citado en Szendrei, 1996).

La innovación educativa y los materiales concretos

Existen diferentes concepciones sobre lo que es una innovación en matemática, y en general en otras áreas del conocimiento. En términos generales se puede decir que una innovación en la enseñanza de las matemáticas es cualquier aspecto nuevo para los elementos que constituyen el sistema escolar (matemáticos, educadores matemáticos (docentes), investigadores en didáctica de las matemáticas, institución escolar, administradores (evaluadores del sistema educativo), padres y alumnos). Esto implica que la noción de innovación depende de los individuos que componen el sistema escolar, es decir, puede ocurrir que lo que es innovación para una persona o institución no lo es para las otras.

La innovación educativa puede por tanto ser definida, descrita e interpretada de múltiples formas por los diferentes elementos del sistema educativo. De esta manera, las administraciones públicas, los diseñadores del

currículo, los profesores, los maestros, los padres, los alumnos, etc., cada uno puede tener y de hecho tienen un modo de entender y de hablar de la innovación en educación. Junto a esta complejidad nos encontramos en la literatura dedicada a los temas educativos un conjunto de palabras tales como: reforma educativa, cambio educativo, renovación, innovación, investigación, etc., con significados que se interceptan o son parecidos.

Vamos a considerar brevemente tres elementos estrechamente relacionados: reforma, investigación y renovación educativa.

Una reforma educativa debe entenderse como un proceso que en sus líneas principales pretende modificar tanto las finalidades de la educación como la organización estructural del sistema escolar. Por ejemplo, nuestra actual reforma educativa supone un cambio en el sistema a gran escala que afecta, no sólo al desarrollo y organización curricular de las distintas disciplinas, sino que introduce cambios estructurales a los ya existentes. Así modifica la estructura hasta hoy de manera sustancial, introduciendo dos etapas educativas absolutamente novedosas: la Educación Infantil (de 3 a 6 años), y la Enseñanza Secundaria Obligatoria (de 12 a 16 años), con lo que la obligatoriedad se amplía de los catorce años a los dieciséis. Por otra parte, reduce la Educación Primaria de ocho años a seis y también el actual Bachillerato (incluyendo el Curso de Orientación Universitaria) pasará de cuatro, a dos años.

La concepción del término reforma parece dejar en un segundo término la atención a los métodos de trabajo docente, y he aquí donde aparece el término innovación con el significado de modificar las formas de actuación como respuesta a los cambios que se trata de producir, sobre todo en el alumnado, y supone una organización del trabajo escolar, mediante la utilización de métodos diferentes a los que precedían a la innovación. Sin

embargo, también podemos hablar de innovación en el campo curricular y ello comporta cambios referidos a los contenidos del currículo, a su secuenciación, a los materiales a utilizar, a la organización espacio-temporal donde se desarrolla la enseñanza, a los roles de los implicados en la innovación, etc. Podemos en general hablar de innovación en el contexto escolar tanto cuando consideramos los cambios curriculares, como cuando introducimos nuevos productos, materiales, ideas e incluso personas dentro de un sistema educativo.

González y Escudero (1987), consideran la innovación educativa como una serie de procesos deliberados y sistemáticos por medio de los cuales se intenta introducir y promocionar ciertos cambios en las prácticas educativas vigentes; procesos que son, a su vez, reflejo de una serie de dinámicas explícitas que pretenden alterar las ideas, concepciones y metas, contenidos y prácticas escolares, en alguna dirección renovadora respecto a la existente.

La innovación no puede ser considerada como un proceso simple, de fácil implantación, es más bien un proceso complejo, en el que las interpretaciones son una constante que marcan su sentido y su evolución.

Lo que sí parece claro es que la innovación se sitúa en el terreno de “la práctica educativa” y que sus protagonistas son los profesores y profesoras que cada día desarrollan su labor profesional en centros educativos, ante grupos de estudiantes cuya correcta formación depende, en gran medida, de las actitudes y de las aptitudes de sus profesores.

La innovación se plantea en términos de actuar directa e inmediatamente sobre el sistema educativo, y ésta es una de sus características esenciales. Se plantea y diseña para producir efectos inmediatos. El profesor desea experimentar un nuevo recurso didáctico

(material manipulativo o no), que le permita mejorar la introducción de un determinado contenido o bien quiere conseguir desarrollar mejor ciertas capacidades del alumno (abstracción, generalización,...) a través de actividades o contenidos nuevos o de enfoques diferentes, con el fin de mejorar la comprensión y fomentar la actitud positiva de sus alumnos hacia las matemáticas, proporcionándoles ideas y actividades más creativas y lúdicas de acuerdo con sus experiencias y capacidades. En cualquiera de los casos, el profesor innovador no se debe plantear obtener resultados a medio o a largo plazo como suele ocurrir con la investigación, sino que debe obtener resultados de forma inmediata.

La innovación en matemática se ha caracterizado por un intento de desarrollar actividades que complementen la formación algoritmizada que se ofrece a los alumnos en los programas de matemáticas, así como aportar recursos para profundizar en procesos que contengan grandes dosis de abstracción, creatividad, intuición matemática, estrategias de resolución de problemas matemáticos y no matemáticos, procesos lógicos, acercamiento a la historia de las matemáticas y de las ciencias en general, etc., y fomentar así el principio de respeto a la diversidad.

En relación investigación/innovación, Gutiérrez (1991) señala, que es importante distinguir entre lo que se entiende por innovación (entendida como la elaboración de actividades o grupos de actividades que implica la utilización de recursos didácticos nuevos para mejorar la comprensión de los alumnos en un tema determinado) y lo que se entiende por investigación en sí misma, dado que la innovación adolece de algunas componentes básicas de la actividad investigadora, como son:

- Una planificación que tenga en cuenta los conocimientos disponibles sobre el tema y no sólo la experiencia personal acumulada por el profesor.

- La situación del trabajo que se va a realizar dentro de un marco conceptual concreto que permita analizarlo y relacionarlo con otras investigaciones sobre el mismo tema.

- Un conocimiento tanto didáctico como matemático del tema de estudio, para identificar los orígenes de las dificultades de aprendizaje y enseñanza.

- Una verificación objetiva de los logros alcanzados, más allá de la intuición personal o de los resultados de los test.

Aparecen en la innovación dos cuestiones de importancia capital: la evaluación de la efectividad o no de la innovación y la internalización del cambio, si este tiene lugar.

La evaluación de la efectividad o no, del uso de determinados materiales didácticos es un eslabón que vincula la innovación con la investigación educativa. La posición que toma la investigación desde esta perspectiva evaluadora de la innovación, es entender las potencialidades y dificultades que genera la innovación desde el análisis de las complejas interacciones que se dan entre una innovación, los elementos implicados y sus objetivos; es decir, mostrar lo que realmente está pasando con la utilización de un nuevo aspecto del currículo, un nuevo producto o un nuevo material, etc., en la escuela y lo que se necesita hacer a partir de ello. El segundo aspecto sería la internalización del cambio, que supone que los sujetos implicados en la innovación la valoren de forma positiva y se comprometan con su práctica; sin ello, sólo tendría un efecto menor y

estaríamos ante una innovación sin cambio, que difícilmente permitiría una generalización de la misma.

Los materiales didácticos han tenido muy poca relevancia en las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, incluso dentro del enfoque conceptualista y los trabajos de innovación desarrollados han sido claramente insuficientes al no desarrollar un proceso de evaluación efectiva y una internalización del cambio que hubiese permitido una posible generalización de su uso; podemos indicar que muchas de estas innovaciones han sido en muchos casos inoperantes.

Mal uso de los materiales concretos: “El deslizamiento metacognitivo”

Un mismo material concreto puede ser a la vez una herramienta útil y un enemigo perjudicial para el aprendizaje matemático. Los casos de las Regletas de Cuisenaire o el Minicomputador de Papy pueden ser buenos ejemplos.

En el caso de las Regletas de Cuisenaire, la utilización de las mismas puede ser especialmente importante si se apuesta por comenzar a desarrollar el concepto de medida, paso a paso, desde una perspectiva constructivista, y no, únicamente, como un conocimiento técnico socialmente aceptado, (Bauersfeld, 1992; Kílpatrick, 1987).

Estas Regletas ayudan al desarrollo del concepto de número y de operación aritmética desde el punto de vista de la medida. Una aplicación que tiene este material es ayudar a comprender el concepto de medida en sí mismo; igualmente es útil para hacer que los alumnos entiendan el concepto de fracción.

Como señala Szendrei (1996), las investigaciones a cargo del Proyecto Húngaro de Matemáticas Integradas dirigido, por Tomás Varga, mostraron las ventajas de usar las Regletas para desarrollar conceptos como el de serie, funciones y ecuaciones. Por otra parte esta herramienta es el punto de arranque para varios problemas y actividades combinatorios. De igual forma, pueden ayudar a desarrollar la intuición, a formular conjeturas y a construir demostraciones tanto simples como complejas. Sin embargo el uso inadecuado aparece cuando en algunos casos extremos a los alumnos se les fuerza a memorizar los convenios entre colores-números (como, por ejemplo, blanco-1). Al explotar este conocimiento, se limita el uso de las Regletas de Cuisenaire a varios ejercicios triviales relativos a sumas. De esta forma, las Regletas no se convierten en una herramienta para ayudar a razonar, sino en un contenido más, de los muchos que se enseñan.

Muchas veces el uso que se le da al material le hace perder su “adaptabilidad”, es decir, lo restringimos a que no se le pueda dar posteriormente otros usos. Por ejemplo, si comenzamos las actividades con las Regletas de Cuisenaire a usar la regleta de 1 centímetro (blanca), como una unidad llamándola “uno”, sin que ni siquiera hayan mencionado que van a medir la longitud de la regleta. En actividades posteriores, la usan constantemente para medir las otras regletas, hasta que los alumnos comprenden fácilmente que una regleta significa dos, otra tres, otra diez, y así sucesivamente. Durante este proceso los profesores llegan muy rápidamente a un resultado, para ellos evidente; a la vez que los alumnos parece que tienen soltura en sumar y restar usando dichas regletas.

Pero surgen algunos problemas de consideración en torno a esta utilización de las Regletas de Cuisenaire:

1) Los alumnos se aprenden una asociación carente de significado, en la que un número se une a un color.

2) La concepción errónea de que una longitud significa un número puede que se desarrolle en la mente de los alumnos. Aunque al principio del proceso afirman correctamente que miden con la longitud de la recta blanca, posiblemente esta frase se ha quedado como una expresión carente de significado para ellos, puesto que nunca cambian la unidad.

De ahí, que resulte muy difícil utilizar las regletas en el desarrollo del concepto de fracción. Los alumnos que estaban acostumbrados a la edad de seis años a usar el blanco como unidad, no serán capaces de entender a la edad de nueve años, o incluso más tarde, que si ahora, cambiáramos la unidad, tendríamos que la longitud de la regleta azul, por ejemplo, sería justamente la unidad. A veces, decimos frases inadecuadas: “ahora el cuatro será el uno”, en lugar de: “la regleta de cuatro centímetros la tomamos como la unidad de longitud”.

Análogamente podemos decir del Minicomputador de Papy que en general, cuando se ha usado en algún texto de matemáticas, especialmente en primaria se ha convertido en un contenido más de los muchos que se enseñan en las clases de matemáticas.

Debemos tener presente que los materiales educativos no pueden lograr por sí mismos enseñar matemáticas, sino que es más, las matemáticas son un valor añadido al material. El material que es por tanto un medio de enseñanza, lo convertimos, muchas veces, en un objeto de enseñanza.

Mientras el profesorado considera al material como un control semántico del objeto matemático, éste se convierte para el alumno en un objeto de enseñanza y por tanto no es un modelo correcto y no permite el

control esperado. Desde esta perspectiva el material a su vez se recarga de convenciones, de lenguajes específicos que a su vez son enseñados y explicados en cada etapa de su uso.

Parece lógico pensar que en este proceso, cuanto más comentarios y convenios produce la actividad de enseñanza, menos pueden los alumnos controlar las situaciones que se les proponen; es el efecto llamado: “deslizamiento metacognitivo”, estudiado por Brousseau (1986), con relación a los diagramas de Venn (círculos de Euler, patas de Papy,...).

Otra manera de mirar los materiales concretos

Los objetos o dispositivos educativos presentes en las diferentes actividades de enseñanza/aprendizaje generan múltiples problemas, tanto desde el punto de vista de la práctica educativa como desde la investigación didáctica. La tendencia en la literatura respecto a la organización de estos objetos o dispositivos es variada, pero podemos observar tres grandes tendencias: caracterización de los objetos educativos, tipologías y problemas derivados de su uso.

La caracterización de estos objetos a fin de organizarlos, como señala Coriat (1997) es extremadamente difícil. A pesar de los diferentes términos propuestos para su organización no es posible encontrar organizaciones puras. No obstante, a efectos de tener un punto de referencia organizado podemos usar el acercamiento pragmático propuesto por Coriat (1997), que utiliza el término: “recurso didáctico” para considerar todos aquellos materiales que el profesor usa en clase (pizarra, cuadernos, libros, calculadoras, juegos, ordenadores, etc.), y el término “material didáctico”

para aquéllos que se construyen con fines educativos específicos como los utensilios comunes, los materiales educativos y los juegos.

Podemos identificar en este acercamiento pragmático los materiales didácticos con los materiales manipulativos anteriormente descritos y tendríamos una primera organización útil, al menos para identificar el objeto sobre el que hablamos.

Como hemos indicado los materiales didácticos han tenido una relevancia restringida en las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas; incluso dentro del enfoque conceptualista y los trabajos de innovación desarrollado han sido claramente insuficientes y en muchos casos, inoperantes.

El resurgimiento en la década de los ochenta del estudio de los aspectos sintácticos y semánticos de las representaciones semióticas formales de los objetos matemáticos, a fin de explicar las interpretaciones de los estudiantes a estas representaciones formales (Rojano, 1994), supone de hecho el desarrollo de una perspectiva más amplia que la perspectiva conceptualista: la psicolingüística, que al considerar las representaciones semióticas de los objetos matemáticos como lenguaje, amplía la perspectiva conceptualista y permite incorporar una nueva dimensión a las representaciones de los objetos matemáticos, la dimensión semiótica. Esta dimensión semiótica del material didáctico, utilizado en las representaciones de un objeto matemático, puede ayudar a clarificar la propuesta pragmática de organización propuesta.

Desde esta perspectiva podemos avanzar más en la organización anterior (Coriat/Szendrei) y considerar el material didáctico como un sistema de representación semiótico para un objeto matemático dado, pero esto no es obviamente una adaptación inmediata. Para poder utilizar un material

didáctico como representación semiótica en un proceso de enseñanza/aprendizaje, se necesita realizar “transformaciones adaptativas” del mismo, de manera que configure, este material didáctico, como un sistema de representación semiótico “autosuficiente”, que permite tanto las elaboraciones sintácticas como semánticas del objeto.

Consideramos que un Sistema de Representación Semiótico es “Autosuficiente” cuando satisface las tres propiedades siguientes:

1. Todo objeto matemático codificado en el Sistema de representación permite desarrollar elaboraciones semánticas y sintácticas.
2. Sus acciones están caracterizadas mediante operaciones internas o con magnitudes.
3. Es un sistema de representación semiótico significativo (cultural, didáctica o matemáticamente).

(Palarea y Socas, 1994, p.114)

Esta posición supone en nuestro trabajo considerar tres aspectos como esenciales:

a) La necesidad de un acercamiento pragmático a los sistemas de representación semióticos. En este sentido optamos por una organización para estos sistemas en los que consideramos tres situaciones distintas: analógica, digital y mixta.

A efectos de clarificar esta propuesta de organización, tomemos por ejemplo los bloques multibase como una representación semiótica para comunicar o representar cantidades numéricas o de magnitud; esta colección de control la consideramos como una representación analógica de tipo discreto, por permitir, esta forma de presentar las cantidades, una cierta “correspondencia uno a uno” con las cantidades de los objetos

representados; en este sentido se trata de una representación analógica. No es éste el caso de las representaciones numéricas formales, donde la cantidad se representa por el último elemento puesto en correspondencia uno a uno. Así, una colección de caramelos se representa por una sola cifra, que representa la cantidad de una forma aparentemente arbitraria, por eso, a esta forma de representación se le denomina digital (numérica o convencional). Las representaciones de naturaleza mixta son aquellas que combinan aspectos analógicos y digitales.

A título de ejemplo recogemos algunos materiales didácticos que en nuestras investigaciones han sido o están siendo utilizados como registros de representación autosuficientes:

Analógico	Mixto	Digital
- Colecciones de control - Bloques multibase - Tablas de contar, sumar, restar y multiplicar	- Ábaco/bloque multibase - Puzzle Algebraico - Representación Visual Geométrica (RSVG) - Tablero Matemático	- Escritura formal - Tablas de sumar y multiplicar.

No pasamos a describir estas representaciones semióticas por las limitaciones de este artículo, aunque el lector interesado puede consultar en algunas de estas referencias bibliográficas: Colecciones de control (Socas, 1999); Ábaco/bloque multibase (Noda, Hernández y Socas, 1996); Representación Semiótica Visual Geométrica (RSVG) (Palarea y Socas, 1994); Tablas de contar, sumar y restar (Socas, 1998); Tablas de contar,

multiplicar y dividir (Socas, 1998); Puzzle algebraico (Socas, 2000); Tablero matemático (Socas, 2000).

b) Aceptar como hipótesis de partida que el uso del material didáctico en el sentido de representación semiótica puede facilitar en gran medida la actividad matemática, estimulando y favoreciendo el desarrollo del conocimiento matemático.

c) Asumir que la utilización de materiales didácticos como representaciones semióticas es una forma racional de tratamiento de la diversidad en cualquier etapa educativa, y en especial en las enseñanzas obligatorias: Primaria y E.S.O., para preservar el principio de “matemáticas para todos”.

El término “transformación adaptativa” de un material didáctico tiene el sentido siguiente: para que un material didáctico pueda ser usado como una representación semiótica autosuficiente de un objeto matemático este debe sufrir transformaciones que le harán apto para ser considerado como tal, es decir, utilizamos este término para indicar el conjunto de transformaciones que van dándose en los recursos didácticos hasta transformarlos en una representación semiótica autosuficiente de naturaleza analógica, digital o mixta.

Nuestra propuesta de organización de los diferentes medios didácticos utilizados en clase de matemáticas se recoge en el cuadro anterior que esquematiza, mediante ejemplos, el Proceso de transformación adaptativa que se propone, y que supone de hecho desarrollar un proceso adaptativo que parte desde una concepción del medio a utilizar como recurso didáctico a su uso como una representación semiótica del objeto matemático.

Propuesta de organización:

Recursos Didácticos	Materiales Didácticos	Registros de Representación “autosuficientes”
Pizarra Cuaderno Libro Retroproyector Diapositivas Juegos Calculadora Ordenador ...	Palillos, boliches, ... (Objetos o utensilios comunes) Ábaco Balanza Juegos Calculadora Ordenador “Gráficos” “Diagramas” ...	ANALÓGICOS Colecciones de control Utensilios comunes Bloques multibase Tablas de contar, sumar y multiplicar DIGITALES Escrituras Formales Tablas de sumar y multiplicar MIXTOS Balanza Ábaco/bloque multibase Representación Visual Geométrica (RSVG) Puzzle Algebraico Tablero Matemático ...
(Coriat)	(Coriat/Szandrei)	(Socas y otros)

Queremos destacar, a modo de consideraciones finales, sobre los materiales concretos que:

- El material concreto tiene una doble dimensión, por un lado, es un “objeto” con su semántica y su sintaxis (concepto y signo), y por otro, es un “medio”, es decir, una representación semiótica de un objeto matemático.
- Los objetos o utensilios comunes con ayuda del lenguaje natural se usan para describir situaciones concretas que puedan ser con diferentes representaciones semióticas de los objetos matemáticos.
- Debemos cuidar el error que muchas veces cometemos al presentar el material concreto como un “objeto” y descuidar su función de “medio” para representar semióticamente un objeto matemático.

- En los trabajos de innovación y en las investigaciones que tratan sobre los materiales concretos encontramos que no son en sí mismo la panacea al problema didáctico, y que para que su utilización tenga sentido y pueda resultar eficaz se precisa un mayor conocimiento de los mismos y una planificación que los organice de forma coherente en las situaciones de aprendizaje de un objeto matemático determinado; por ejemplo, que se articulen como representaciones semióticas autosuficiente en el sentido propuesto en este trabajo (transformación adaptativa).

Referencias Bibliográficas:

- CASTELNUOVO, E. (1975): *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.
- CORIAT, M. (1997): Materiales, recursos y actividades: un panorama. En Rico, L. y otros. *La educación matemática en Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori.
- DIENES, Z. P. (1970): *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*. OCDL: París (Traducción al castellano: *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*. Teide: Barcelona, 1971).
- GONZÁLEZ, M. T. y ESCUDERO, J. M. (1987): *Innovación educativa: teorías y procesos de desarrollo*. Barcelona: Humanitas.
- GUTIÉRREZ, A. (1991): La investigación en didáctica de las Matemáticas. En Gutiérrez, A. (Ed.) *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.
- KÍLPATRICK, J. (1987): What Constructivism Might Be in Mathematics Educations. *Proceeding PME-11*. Montreal: University of Montreal, 1,3-27.

NODA, A.; HERNÁNDEZ, J. Y SOCAS, M.M. (1996): El uso de sistemas de representación no verbales en problemas aritméticos en el D.C.B. de Primaria. *Números*, 27, 13-31.

PALAREA, M.M. Y SOCAS, M.M. (1994): Elaborations Sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement-apprentissage de l'Algebre scolaire (12-16 ans). *Actas de la 46 CIEAEM*, 2, 111-119. Toulouse. France.

RESNICK, L.B.; FORD, W.W. (1990): *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós-MEC.

ROJANO, T. (1994): La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 12 (1), 45-56.

SOCAS, M.M. (1998): Modelo educativo de utilidad: “*Tablas de contar, sumar y restar*”. Número: 1998/38/28518. Gobierno de Canarias. Fecha, 18-12-1998.

SOCAS, M.M. (1998): Modelo educativo de utilidad: “*Tablas de contar, multiplicar y dividir*”. Número: 1998/38/28519. Gobierno de Canarias. Fecha, 18-12-1998.

SOCAS, M.M. (1999): El aprendizaje del cálculo con “colecciones de control”: el material de Herbinière Lebert. *Tagasaste*. Revista de los Centros del Profesorado de la Palma, 15, 7-10.

SOCAS, M.M. (2000): Modelo educativo de utilidad: “*Puzzle Algebraico*”. Gobierno de Canarias.

SOCAS, M.M. (2000): Modelo educativo de utilidad: “*Tablero matemático*”. Gobierno de Canarias.

SZENDREI, J. (1996): Concrete materials n the classroom, en Bishop, A. J. et al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. Vol. 4, 411-434. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.